

O MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO NO ESTUDO DE CABOS UMBILICAIS

FERNANDO A. ROCHINHA*
RUBENS SAMPAIO*
y
PATRICK LE TALLEC**

**Departamento de Engenharia Mecânica,
Pontifícia Universidade Católica,
Rio de Janeiro, Brasil*

***Laboratoire Central des Ponts
et Chaussées,
Paris, Francia*

RESUMEN

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentem grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo mecânico resulta num sistema não-linear, que é resolvido por um método de decomposição-coordenação via Lagrangeano Aumentado. Este tratamento possibilita a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos à grandes deslocamentos.

SUMMARY

The aim of this paper is to present the numerical modeling of large displacements and large rotations of hyperelastic pipeline. The mechanical model results in a non linear system, that is solved by a Augmented Lagrangian splitting method. This treatment makes possible the description of the coupling which appears between flexion and torsion in the large displacements of a pipeline.

INTRODUÇÃO

Técnicas numéricas capazes de tratar problemas não lineares vem sendo alvo de inúmeros pesquisadores. Isto se deve ao fato que, cada vez mais, surgem modelos sofisticados para a descrição de realidades físicas que, ao fim, geram sistemas de equações não lineares.

O estudo de cabos umbilicais representa un exemplo das situações mencionadas no parágrafo anterior. Na ligação entre plataformas e poços petrolíferos são utilizados cabos de grande comprimento (conhecidos industrialmente como cabos umbilicais) para o transporte de fluidos (lama de perfuração e óleo bruto) e de sinais elétricos. A

Recibido: Marzo 1989

geometria particular destes cabos sugere a utilização de modelos que explorem este fato, minimizando, assim, o custo em projetos e cálculos computacionais. Porém, não deve ser esquecido que os mesmos cabos são, em muitas situações de operação, submetidos à grandes deslocamentos, aonde surgem efeitos complexos como o acoplamento flexão-torção.

Neste trabalho, será utilizado, para a descrição do comportamento mecânico de cabos umbilicais, um modelo unidimensional baseado em¹ que permite, por força das poucas restrições impostas, a descrição do movimento de cabos que experimentam grandes deslocamentos. Este modelo, que utiliza de uma forma sistemática a noção dos vetores diretores², se mostra ao mesmo tempo simples e eficaz já que, como será visto mais adiante, conduz a um problema "bem posto" do ponto de vista matemático, pode ser resolvido numericamente e alcança resultados muito bons na descrição de efeitos como o do acoplamento flexão-torção.

Para a solução de problemas de cabos umbilicais é proposta uma formulação variacional consistente que permite uma decomposição via Lagrangeano Aumentado, gerando, assim, um problema de ponto-de sela, que é resolvido por um algoritmo de UZAWA.

Por fim, são apresentados alguns resultados numéricos que evidenciem a capacidade e a eficácia do método proposto.

MODELO MATEMÁTICO

O modelo que será agora apresentado aproveita, desde o início, a forma geométrica particular dos cabos umbilicais. Para tanto, uma configuração qualquer é caracterizada através de três campos vetoriais. O primeiro destes, denotado por r , é o vetor posição, segundo uma origem previamente escolhida, de uma curva c imersa em \mathbb{R}^3 . Neste Trabalho, c é interpretada como o lugar geométrico dos centroides das seções que estão associadas à cada ponto da curva. Os outros dois campos restantes, chamados diretores e denotados por d_1 e d_2 , são utilizados na descrição do movimento dessas seções. Os campos citados são parametrizados por S o comprimento de arco tomado em C (a curva c na configuração de referência).

Os dois diretores são tomados unitários e ortogonais entre si. Esta é uma hipótese restritiva à deformação das seções, já que a posição $x(X)$ de toda partícula X do cabo após deformação será dada por

$$x(X) = r(S) + X_1 d_1(S) + X_2 d_2(S) + \psi(S, X_1, X_2) d_3(S) \quad (1)$$

onde X_1 e X_2 são as coordenadas de X na configuração de referência, d_3 é o terceiro diretor tomado igual à $d_1 \times d_2$ e ψ é a função de empenamento como definido em³. Fisicamente, (1) representa um movimento aonde as seções dos cabos experimentam apenas pequenas deformações. No entanto, não são feitas restrições sobre r ou mesmo sobre a posição dos diretores, o que implica que os cabos poderão ser submetidos à grandes rotações das seções. Segundo⁴, a hipótese de pequenas deformações para as seções fornece resultados bastante realistas.

Da hipótese de ortonormalidade das seções é definido o campo u através de

$$d'_i = u \times d_i \quad (i = 1, 3) \quad (2)$$

onde' designa a derivada em relação a S . Como pode ser encontrada em⁴, as componentes de u na base dos diretores: u_1 e u_2 são medidas de flexão, enquanto u_3 é uma medida de torção, . Neste modelo as seções não são obrigadas a permanecerem ortogonais a c . Assim sendo o cisalhamento é expresso através das componentes v_1 e v_2 do vetor r' , o vetor tangente a c sendo o alongamento expresso por $v_3 - 1$.

Como pode ser visto em ¹, os u_i e v_i definidos no parágrafo anterior são medidas de deformação objetivas para cabos umbilicais submetidos ao movimento x . Elas são definidas independentemente do observador e permitem, pela intergração de (2) e r' , a determinação de x , a menos de um movimento rígido. A bem da verdade, ainda restaria determinar a função ψ . Porém esta é, dentro do regime de pequenas deformações, determinada previamente³ em função da forma geométrica de seção.

Para que a ambiguidade na determinação de x seja retirada é necessária a prescrição de condições de contorno. Neste trabalho, estas condições se restringirão à:

$$r(0) = 0 \quad (3)$$

e uma ou mais das seguintes

$$r(L) = r_L \quad (4)$$

$$d_i(0 \text{ ou } L) = d_L^0 \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\} \quad (5)$$

$$d_i(0 \text{ ou } L) = d_i^0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (6)$$

onde $S = L$ determina a outra extremidade do cabo. As condições (3) e (4) são prescrições da posição das extremidades enquanto (5) caracteriza uma articulação e (6) o engastamento.

A postulação dos balanços de momento linear e angular conduz, respectivamente, às seguintes equações de equilíbrio para cabos umbilicais:

$$n' + f = 0 \quad (7)$$

$$m' + r' \times n + g = 0 \quad (8)$$

onde n é a força de contato, m o momento interno, f um carregamento externo distribuído e g o momento externo distribuído.

Neste trabalho, os cabos serão considerados hiperelásticos, o que tem um papel fundamental na análise numérica do problema, como pode ser visto em⁴. Portanto, os esforços deste modelo se relacionam com as deformações através de:

$$n = \frac{\partial w}{\partial u_i} d_i \quad (9)$$

$$m = \frac{\partial w}{\partial v_i} d_i \quad (10)$$

onde w é uma densidade de energia elástica que descreve a resposta mecânica dos cabos umbilicais.

Em suma, o problema de encontrar uma configuração de equilíbrio $\Phi = (r, d_i)$ de um cabo consiste em resolver o sistema de equações ordinária à valor de contorno (27)–(28). Por força das restrições escolhidas, permitindo grandes deslocamentos e rotações este sistema é não-linear, o que, do ponto de vista matemático, representa grandes dificuldades na solução. Tal fato exige uma estratégia numérica sofisticada que permite, inclusive, o enfrentamento de problemas com múltiplas soluções, caso comum em sistemas da natureza não linear. Nos próximos capítulos serão mostrados uma formulação matemática consistente para o problema e sua respectiva estratégia numérica.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A escolha da densidade de energia w tem um papel fundamental na formulação do problema de cabos. Por isto, neste trabalho é escolhida a seguinte forma quadrática:

$$w(u_i, v_i, S) = \frac{GA}{2}(S)(v_1^2 + v_2^2) + \frac{EA}{2}(S)(v_3 - 1)^2 + \frac{EI_1}{2}(S)u_1^2 + \frac{EI_2}{2}(S)u_2^2 + GJ(S)u_3^2 \quad (11)$$

onde G e E são, respectivamente, os coeficientes de cisalhamento e Young, enquanto I_1 , I_2 e J os momentos de inércia. O primeiro termo leva em conta o cisalhamento, o segundo termo o alongamento, os outros dois a flexão e o último a torção. Apesar de (11) ser uma boa escolha do ponto de vista matemático não é possível serem descrito cabos curvos em configuração livres de esforços, já que o gradiente de w é nulo somente para $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 - 1 = 0$.

A partir de (11) é possível o estabelecimento de equivalência entre o sistema (7)–(8), mais condições de contorno e mais a exigência de ortonormalidade dos diretores com o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \Phi(r, d_i) \quad \text{tal que} \\ &J(\Phi) = \min \quad J(\hat{\Phi}) \\ &\hat{\Phi} \in K \end{aligned} \quad (12)$$

$K = \{ \hat{\phi} = (r, d_i) \in H^1(0, L; \mathbb{R}^{12}), \quad d_i d_j = \delta_{ij} (i, j) = 1, 3 \}$, e condições de contorno previamente escolhidos entre (3) e (6) }. Este resultado é encontrado em⁴.

O problema (12) admite a seguinte formulação variacional.

Encontrar $\Phi = (r, d_i) \in K$ tal que, $\forall (p, g_i) \in dK(r, d_i)$ se tenha

$$\frac{\partial J}{\partial(r, d_i)}(r, d_i) \cdot (p, g_i) = \int_0^L f \cdot p ds \quad (13)$$

onde $J(r, d_i) = \int_0^L w(S, u_i, v_i) dS$ e $dK(r, d_i)$, o espaço tangente à K é dado formalmente por:

$dK(r, d_i) = \{ (p, g_i) \in H^1(0, L, \mathbb{R}^{12}), p(0) = 0, p(L) = 0, \text{ se (4) é imposta, } g_K(0 \text{ ou } L) = 0 \text{ se (5) ou (6) são impostas, } \exists U \in H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \text{ com } g_i = U \times d_i (i = 1, 3) \}$

Como o já esperado o problema variacional (13) é altamente não linear, fato expresso pela não convexidade de K . Neste trabalho, o problema, será tratado via uma técnica de "decomposição-coordenação" por Lagrangeano Aumentado⁶, que consiste na introdução de uma variável suplementar $\{\tau_i\}$, sobre a qual é imposta como restrição a igualdade como $\{d_i\}$, na dualização do problema e, ainda, na adição de um termo de regularização,. Assim sendo, é construído o seguinte Lagrangeano Aumentado.

$$L_R(r, d_i, \tau_i, \lambda_i) = J(r, d_i) + \sum_{i=1}^3 \int_0^L \left\{ \frac{R}{2} |d_i - \tau_i|^2 + \lambda_i \cdot (d_i - \tau_i) \right\} dS \quad (14)$$

onde R é um número positivo e arbitrário. A introdução do termo $\frac{R}{2} |d_i - \tau_i|^2$ é justificada em⁶, aonde são apresentados alguns resultados numéricos que demonstram que este termo melhora as condições regularidade do problema.

A partir de (14) o seguinte problema de "ponto-de-sela" pode ser construído.

Encontrar $\{(r, d_i), \tau_i, \lambda_i\} \in H \times L^2(0, L, 0_3^+) \times L^2(0, L, \mathbb{R}^9)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_R}{\partial(r, d_i)}(r, d_i, \tau_i, \lambda_i) \cdot (p, g_i) &= \int_0^L f \cdot p dS, & \forall (p, g_i) \in dH \\ \frac{\partial L_R}{\partial \tau_i}(r, d_i, \tau_i, \lambda_i) \cdot U \times \tau_i &= 0, & \forall U \in L^2(0, L; \mathbb{R}^3) \\ \frac{\partial L_R}{\partial \lambda_i}(r, d_i, \tau_i, \lambda_i) \cdot \mu_i &= 0, & \forall \{\mu_i\} \in L^2(0, L; \mathbb{R}^9) \end{aligned} \quad (15)$$

onde

$H = \{ (r, d_i) \in H^1(0, L; \mathbb{R}^{12}), r(0) = 0, (r, d_i) \text{ satisfazendo condições de contorno escolhidos entre (4 e 6)} \}$

$0_3^+ = \{ \{\tau_i\} (i = 1, 3) \in \mathbb{R}^9, \{\tau_i\} \text{ é um triêdo ortonormal} \}$

Em⁶ é demonstrada que toda solução de problema (15) é, também, uma solução do problema variacional (12).

UM ALGORITMO PARA A FORMULAÇÃO PROPOSTA

A principal vantagem da formulação Lagrangeana (15) reside na possibilidade de utilização de um algoritmo do tipo UZAWA na solução numérica do problema. Associado a um método de relaxação por blocos, esse algoritmo permite a decomposição do problema inicial, altamente não-linear, em uma sequência de problemas simples de serem resolvidas. O algoritmo é formalmente apresentado em seguida.

Escoher $\{\lambda_i^0\}$ em $L^2(0, L; \mathbb{R}^3)$ e $\{\tau_i^{-1}\}$ em $L^2(0, L; O_3^+)$.

$\{\lambda_i^n\}$ e $\{\tau_i^{n-1}\}$ conhecidos, calcular (r^n, d_i^n) , $\{\tau_i^n\}$ e $\{\lambda_i^{n+1}\}$ resolvendo iterativamente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_R}{\partial(r, d_i)}(r^n, d_i^n, \tau_i^n; \lambda_i^n) \cdot (p, g_i) &= \int_0^L f \cdot p dS, & \forall (p, g_i) \in dH \quad (r^n, d_i^n) \in H \\ \frac{\partial L_R}{\partial \tau_i}(r^n, d_i^n, \tau_i^n; \lambda_i^n) \cdot U \times \tau_i^n &= 0, & \forall U \in L^2(0, L; \mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\{\tau_i^n\} \in L^2(0, L; O_3^+) \quad (17)$$

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + R|d_i^n - \tau_i^n| \quad (18)$$

O algoritmo que acaba de ser descrito introduz dois problemas: o primeiro (16), é resolvido ponto a ponto, através de técnicas matriciais e o segundo (17) corresponde ao problema variacional (3) sem a restrição $(r^n, d_i^n) \in K$. Ele pode, então, ser resolvido globalmente via o método dos Elementos Finitos.

O Algoritmo para a solução do problema (16) se baseia na de composição a valor singular⁷, introduzindo:

$$B_{ij} = (Rd_i + \lambda_i) \cdot e_j, \quad B = Q^g D Q^d \quad (19)$$

$$Q_{ij}^r = \tau_i \cdot e_j \quad (20)$$

$$A_{ij} = e_{ijk} U \cdot e_k \quad (21)$$

onde $\{e_i\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , D uma matriz diagonal e Q^g , e Q^d matrizes ortogonais diretas. Assim:

$$\{R(\tau_i - d_i) - \lambda_i\} \cdot U \times \tau_i = \text{Traço } \{(RQ^r - B)^T Q^r A\}$$

de (14) e (16) o seguinte problema é encontrado:

Encontrar Q^r e $L^2(0, L; O_3^+)$ tal que, para toda matriz A antissimétrica, se tenha:

$$\int_0^L \text{Traço} \{(RQ^\tau - B)^T Q^\tau A\} dS = 0 \quad (22)$$

e admite como solução

$$Q^\tau = Q^g Q^d \quad (23)$$

já que:

$$\text{Traço} \{(RQ^g Q^d - B)^T Q^g Q^d A\} = \text{Traço} \{RA - (Q^d)^\tau T D Q^d A\} = 0$$

A partir de (23), o algoritmo para (20) é construído como:

- . Calcular B através de (25).
- . Calcular e tridiagonalizar BB^T .
- . Calcular os valores singulares $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ de BB^T .

Seguido pelas fórmulas de Cardan aplicadas ao polinômio característico da forma tridiagonal de BB^T .

- . Calcular os vectores próprios de BB^T resolvendo

$$BB^T g_j = b_j g_j, \quad |g_j| = 1$$

- . Fazer $D_{11} = \sqrt{b_1}$, $D_{22} = \sqrt{b_2}$, $D_{33} = \sqrt{b_3}$ signal ($\det B$)
- . Fazer $Q_{ij}^g = g_j \cdot e_i$
- . Fazer $\tau_i = (Q^g D^{-1} (Q^g)^T B)_{ij} e_j$

Todos os cálculos acima são feitos ponto a ponto; não requerendo mais do que 80 operações algébricas elementares por ponto.

Para demonstrar o funcionamento da resolução do problema (17) é escolhido, neste trabalho, a seguinte forma para a densidades da energia de deformação:

$$w(u_i, v_i, S) = \frac{EI_1}{2}(S)u_j^2 + \frac{EI_2}{2}(S)u_2^2 + G\frac{I_3}{2}(S)u_3^2 \quad (24)$$

A forma acima difere de (11) por não levar em conta o cisalhamento e o alongamento. Esta escolha, bastante realista para cabos umbilicais, conduz à um problema, do ponto de vista numérico, melhor condicionado⁸.

A partir de (24) é obtido o seguinte funcional de energia elástica:

$$J(r, d_i) = \int_0^L \frac{E}{2} \{(I_2 + I_3 - I_1)|d_1|^2 + (I_3 + I_1 - I_2)|d_2|^2 + (I_1 + I_2 - I_3)|r''|^2\} dS$$

É importante ser lembrado que na expressão acima o cisalhamento não é levado em conta, sendo tal fato expresso por $r' = d_3$.

Por construção de Lagrangeano (14), o problema (17) é equivalente à:

Encontrar $(r^n, d^n) \in H$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial(r, d_i)}(r^n, d_i^n) \cdot (p, g_i) = \int_0^L \{f \cdot p - [R(r^n)' - \tau_3^{n-1}] - \\ - p' - [R(d_\alpha^n - \tau_\alpha^{n-1}) + \lambda_\alpha^n] \cdot g_\alpha\} dS \quad \forall (p, g_i) \in dH \end{aligned} \quad (25)$$

Em (25) as variáveis r^n e d_α^n ($\alpha = 1, 2$) são desacopláveis. O cálculo de r^n se resume, então, a resolução de 3 equações bi-harmônicas:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{E}{2} (I_1 + I_2 - I_3) (r^n)'' \cdot p'' dS + R \int_0^L (r^n)' \cdot p' dS = \\ = \int_0^L (R\tau_3^{n-1} - \lambda_3^n) \cdot p' dS + \int_0^L f \cdot p dS \end{aligned} \quad (26)$$

$\forall p \in d[H^2(0, L; E) + C.C]$

enquanto o de d_α^n ($\alpha = (1, 2)$) a resolução de 6 equações harmônicas:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{E}{2} (I_2 + I_3 + I_1) d_1' \cdot g' dS + R \int_0^L d_1 \cdot g = \\ = \int_0^L (R\tau - \lambda_j) \cdot g dS \\ \int_0^L \frac{E}{2} (I_3 + I_1 + I_2) d_2' \cdot g dS + R \int_0^L d_2 \cdot g = \\ = \int_0^L (R\tau_2 - \lambda_2) \cdot g dS \end{aligned} \quad (27)$$

$\forall g \in d[H^1(0, L; E) + C.C.]$

A discretização das equações (26) e (27) é feita através do método dos Elementos Finitos. Para as equações bi-harmônicas são utilizados elementos de Hermite de grau 3, enquanto para as equações harmônicas foram escolhidos elementos de Lagrange de grau 2. Com isto, são obtidas para r 3 elementos finitos, a 4 graus de liberdades cada um, e para d_α 6 elementos finitos independentes, a 3 graus de liberdade cada um. As matrizes resultantes da discretização são fatorizadas pelo método do Cholesky apenas uma vez, já que independem da iteração n de UZAWA.

A convergência da algoritmo de UZAWA é controlada pelos seguintes testes:

$$\frac{(\int_0^L \{|r^n - r^{n-j}|^2 + |(r^n)^1 - (r^{n-1})|^2 + |d_1^n - d_1^{n-1}|^2 + |d_2^n - d_2^{n-1}|^2\} dS)^{\frac{1}{2}}}{(\int_0^L \{|r^n|^2 + |(r^n)^1| + |d_1^n|^2 + |d_2^n|^2\} dS)^{\frac{1}{2}}} \leq 10^{-5}$$

$$(\int_0^L \{|r' - \tau_3|^2 + |d_1 - \tau_1|^2 + |d_2 - \tau_2|^2\} dS)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-3} \quad (28)$$

A não existência de um teste para os multiplicadores $\{\lambda_i\}$ se deve a dificuldade de convergência destes⁹. Esta dificuldade se reflete no cálculo dos esforços que, ao invés de serem calculadas como uma combinação dos multiplicadores, são obtidos em:

$$\text{(momento fletor)} \quad m_f = \frac{dw}{du_\alpha} d_\alpha = -EI_1(r'' \cdot d_1) + EI_2(r'' \cdot d_1)d_2$$

$$\text{(momento torsor)} \quad m_T = \frac{dw}{du_3} d_3 = 2GI_3(d'_1 \cdot d_2)r'$$

$$n = N + F$$

onde N é a reação na extremidade $S = L$ e $F(S) = \int_S^L f(t)dt$.

RESULTADOS

Neste capítulo é mostrada uma aplicação da modelagem numérica apresentada. É escolhido um cabo inicialmente retilíneo, com 20 metros de comprimento, imerso no plano xz , engastado em uma extremidade e livre na outra. Sendo adotada a densidade de energia (24) o cabo é considerado inextensível, logo, se for imposto um deslocamento qualquer à extremidade livre, a curva c assume uma forma não retilínea. Portanto, o cabo é submetido a uma flexão. O exemplo que será mostrado, apesar de não representar operações cotidianas de cabos umbilicais, evidencia a capacidade do modelo de descrever o comportamento mecânico dos cabos quando submetidos à grande deslocamentos, inclusive o acoplamento flexão-torção, e demonstra, também, a eficácia do método numérico utilizado.

O exemplo consiste de um cabo que está engastado na extremidade de coordenadas $(0,0,0)$ e com a outra, de coordenadas $(20,0,0)$, livre. A esta última é imposto um deslocamento prescrito por $y = 20 - x$. Os parâmetros escolhidos para o problema são $EI_1 = 235$ da $N \times m^2$, $EI_2 = 360$ da $N \times m^2$, $EI_3 = 100$ da $N \times m^2$. Os cabos possuem seção elíptica. As condições de contorno são descritas por:

$$r(0) = 0 \quad , \quad r'(0) = i$$

$$d_1(0) = j \quad , \quad d_2(0) = k$$

$$r(L) = (X_F, 20 - X_F, 0)$$

onde $\{i, j, k\}$ é a base vetorial associada ao sistema de coordenadas XYZ e X_F determina o deslocamento imposto.

A Figura 1 mostra a evolução da configuração do cabo $X_F = 19m$ e $X_F = 16m$.

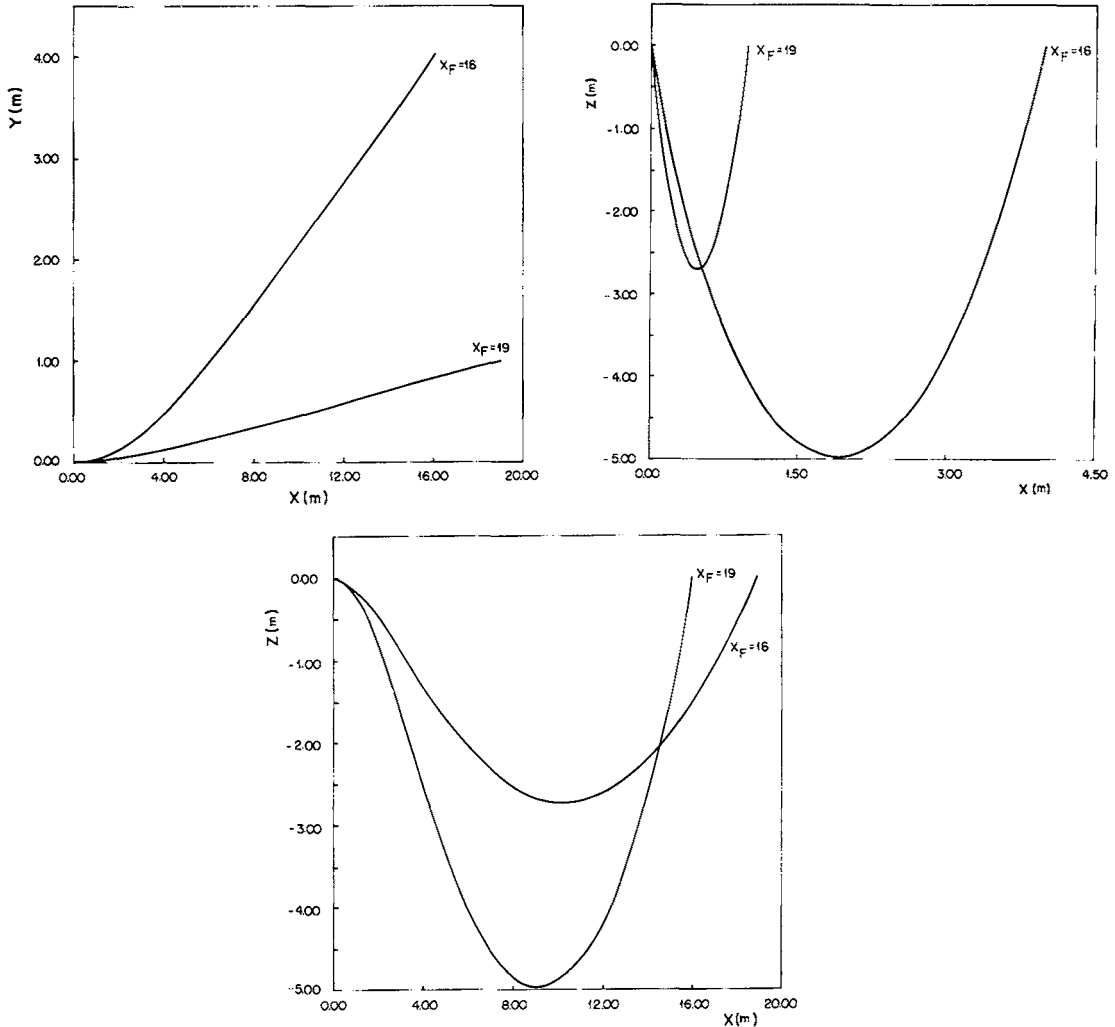


Figura 1. Projeções do cabo planos coordenados X, Y , e Z para $X_F = 16m$ e $X_F = 19m$.

Como já foi dito, o deslocamento imposto à extremidade livre é equivalente a imposição de uma flexão ao cabo. Ao serem analisadas as Figuras 2 e 3 fica claro que associada à esta flexão surge uma torção, o que caracteriza um acoplamento entre as duas deformações.

Todos os ensaios numéricos envolvidos neste exemplo foram feitos num computador Bull DPS 68. A convergência foi alcançada na média em 50 iterações de UZAWA para um $R = 400$. Cada uma das iterações demorou em média 60 segundos.

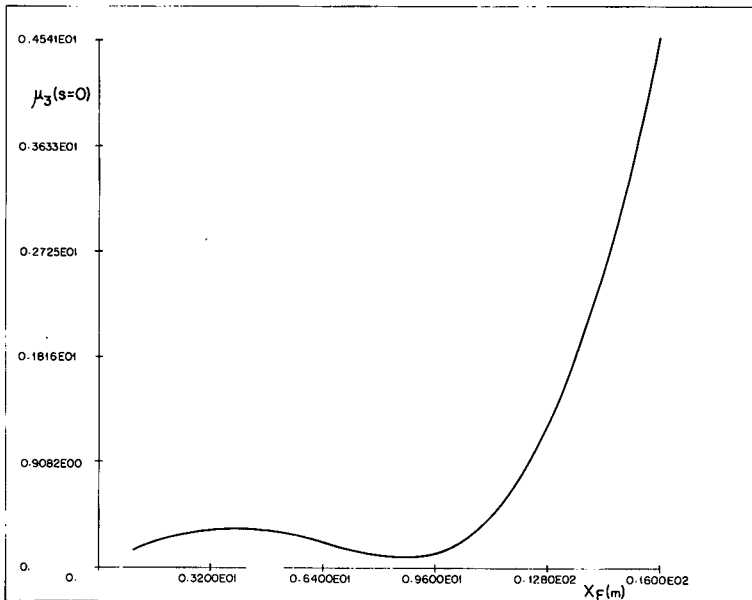


Figura 2. Evolução de torção (u_3) no engaste em funções do deslocamento imposto (X_F).

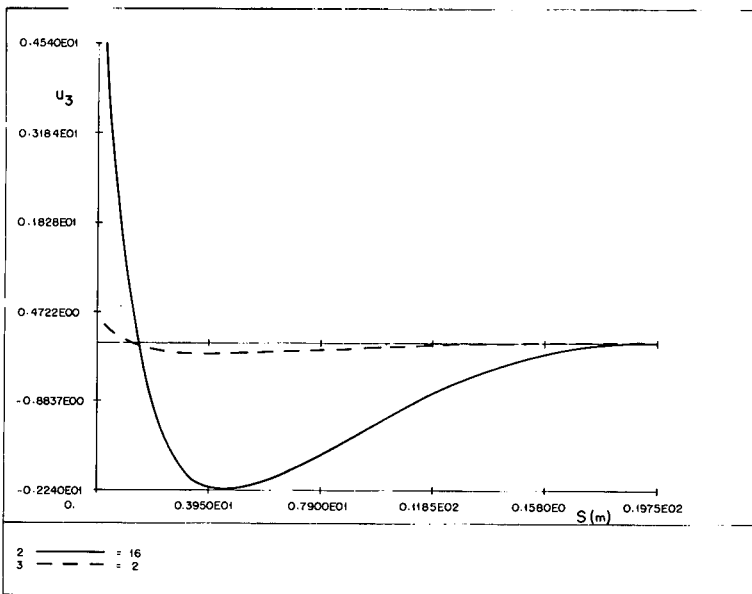


Figura 3. Comparação entre torção experimentada pelo cabo $X_F = 16m$ e $X_F = 2m$.

REFERENCIAS

1. S.S. Antman y C.S. Kenney, "Larged Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods under Torsion, Thrust and Gravity", *Arch. Rat Mech. Anal.*, Vol. 76, pp. 289-337, (1981).

2. E. Cosserat y F. Cosserat, "*Théorie des corps déformables*", Hermann, Paris, (1909).
3. L. Landau y E. Lifchitz, "*Théorie de l'Elasticité*", Editors MIR, Moscou, (1967).
4. F.A. Rochinha, "Uma Contribuição à Teoria de Estruturas Unidimensionais Inelásticas", *Dissertação de Mestrado*, PUC-RJ, 1985.
5. J.F. Bougart, S. Mani y P. Le Tallec, "Modelisatio et Calcul des Grands Deplacements de Tuyaux Elastiques en Flexion et Torsion", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, a aparecer.
6. M. Fontin y R. Glowinski, "Méthodes de Lagrangien Augmenté", Dunod Bordas, Paris, (1982).
7. G.H. Golub y C.F. Van Loan, "*Matrix Computations*", Johns Hopkins, University Press, Baltimore, (1983).
8. S. Mani, Modelisation et Analyse Numerique des Problemes d'Equilibre d'une Barre Elastique en Grandes Deformations", *These de Doctorat de l'Universite Paris IV*, (1987).
9. P.G. Ciarlet, "Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation", Masson, Paris, (1985).