REFORMULACIÓN DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

JAVIER JENARO MAC-LENNAN

RESUMEN

Supuesto un elemento de un fluido moviéndose a lo largo de un tubo de corriente, la fuerza que actúa sobre éste volumen en un instante dado es una integral de superficie sobre la que actúan la presión p(x,y,z) y se puede transformar en una integral de volumen introduciendo el gradiente de presiones. Esta fuerza se invierte en modificar la cantidad de movimiento del volumen considerado. Nuestro punto de vista consiste en analizar dinámicamente un elemento de corriente y seguirle en su trayectoria, de manera que a menos que el fluido esté estático, con lo que sus velocidades son nulas, las variaciones de la velocidad de cada partícula ocasionan fuerzas medibles en en ella y forman parte de la historia de dicha partícula, que es toda su trayectoria, consideración fundamental que es distinta a la mantenida por Leonard Euler, pues que mientras que éste considera la variación de la velocidad del fluido que llega a un determinado punto fijo del mismo sometido a una presión estática, independiente del tiempo, nosotros consideramos que las fuerzas dinámicas que se desarrollan son las que actùan sobre el elemento de volumen considerado, que está en constante movimiento y que es variado si lo hace el vector velocidad, bien en magnitud o bien en dirección o ambas cosas a la vez y que dependerá del gradiente de presiones. Mediante tediosos cálculos de diferenciales e integrales hemos llegado a una ecuación que describe las trayectorias de cualquier partícula en el fluido. Seguidamente se aplica al movimiento de una nave inmersa en un fluido obteniéndose los parámetros necesarios para la flotabilidad.

ABSTRAC

Assume an element of a fluid moved along a stream tube, the force acting on this volume at any given time is an integral of super on which they act the pressure p (x, y, z) and can be transformed into an integral of volume introducing the pressure gradient. This force is reversed in modi car the amount of movement of the volume considered. Our point of view consists in dynamically analyzing a current element and following it in its trajectory, of way that unless the It is static, so its speeds are zero, the variations in the velocity of each particle cause measurable forces in it and they are part of the history of this particle, which is its entire trajectory, consideration on fundamental that is different from that maintained by Leonard Euler, because while this considers the variation of the speed of the fluid that reaches a certain point The same subject to static pressure, independent of time, we we consider that the dynamic forces that develop are those that act on the volume element considered, which is in constant motion and is varied if the velocity vector does it, either in magnitude or in direction or both at the same time and that depend on the pressure gradient. Through tedious calculations of differentials and integrals we have reached an equation that describes the trajectories of any particle in the uido It is then applied to the movement of a ship immersed in a In order to obtain the necessary parameters for the flotability

MOVIMIENTO AERODINÁMICO

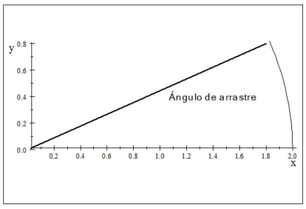

Figura 1. Ángulo de arrastre β

Consideramos aquí una partícula de un fluido inmersa en un volumen elemental dV de densidad $\rho(t)$ $Figura 1$ y que se desplaza en el espacio y seguimos su evolución a lo largo del recorrido que es su historia, es decir su trayectoria dentro del continuo, la partícula o el volumen elemental del fluido tiene distinto comportamiento en su desplazamiento si lo hace en el seno del fluido semejante o si lo hace respecto a otro con el que no esta en reposo, en este segundo caso lo que les distingue es la viscosidad que es una característica inherente a cada fluido. La partícula esta sometida a una presión p estando en reposo, si dicha presión se libera a traves de una superficie dS la fuerza liberada es:

$$\overrightarrow{F}_p = \int\int_S p\overrightarrow{T}dS = \int\int\int_V \frac{\partial}{\partial s}\left(p\overrightarrow{T}\right)dV = \int\int\int_V \frac{\partial p}{\partial s}\overrightarrow{T}dV + \int\int\int_V p\frac{1}{R}\overrightarrow{N}dV = \int\int\int_V \overrightarrow{gradp}dV$$
(1)

En donde hemos considerando la trayectoria lineal $R = \infty$.Y ya que la partícula tiene una inercia tambien se desarrollará la fuerza:

$$\boxed{\overrightarrow{F}_I = \int\int\int_V \frac{d\overrightarrow{v\rho}}{dt}dV}$$

Y si el contacto con el contorno es deslizante aparecerála fuerza de rozamiento:

$$\overrightarrow{F}_R = \int\int_S \overrightarrow{\tau}dS = \int\int_S \tau\ \overrightarrow{N}\ dS = \int\int_S \tau\overrightarrow{T}dS = \int\int\int_V \frac{d}{ds}\left(\tau\overrightarrow{T}\right)dV = \mu\int\int\int_V \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\overrightarrow{T}\right)dV = \mu\int\int\int_V \left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\overrightarrow{T} + \frac{dv}{dt}\frac{\overrightarrow{N}}{R}\right)dV$$

Y como antes consideramos la trayectoria rectilínea.Y poniendo el equilibrio del volumen:

$$\boxed{\int\int\int_V \overrightarrow{gradp}dV + \int\int\int_V \frac{d\overrightarrow{vp}}{dt}dV + \mu\int\int\int_V \left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\overrightarrow{T}dV + \int\int\int_V \rho g\overrightarrow{j}\,dV = 0}$$

Lo que obliga a considerar:

$$\boxed{\overrightarrow{gradp} + \frac{d(v\rho)}{ds}v\overrightarrow{T} + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\overrightarrow{T} + \rho g\overrightarrow{k} = 0}$$

Reemplazando los vectores por sus componentes:

$$\partial p\overline{_{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{k} + \frac{d(v\rho)}{ds}v\left(\frac{dx}{ds}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{ds}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{ds}\overrightarrow{k}\right) + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{ds}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{ds}\overrightarrow{k}\right) + \rho g\overrightarrow{k} = 0}$$

Y escribiendo las ecuaciones de las componentes:

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{d(v\rho)}{ds}v\cos^2\alpha + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\cos^2\alpha = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{d(v\rho)}{ds}v\cos^2\delta + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\cos^2\gamma = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{d(v\rho)}{ds}v\left(\cos^2\theta\right) + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right)\left(\cos^2\theta\right) + \rho g\cos\theta = 0$$

Y sumando ambas:

$$\boxed{3\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{d(v\rho)}{ds}v + \mu\left(\frac{d}{ds}\frac{dv}{ds}\right) + \rho g\cos\theta = 0}$$

Multiplicando por ds e inegrando:

$$\boxed{3p + \frac{1}{2}v^2\rho + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dv}{ds}\right) + \rho gz = C}$$

La constante C es la presión atmosférica en la cota $z = 0$.

$$\boxed{3p_1 + \frac{1}{2}v_1^2\rho_1 + \frac{1}{2}\mu\frac{dv_1}{ds} + \rho_1 gz_1 = 3p_2 + \frac{1}{2}v_2^2\rho_2 + \frac{1}{2}\mu\frac{dv_2}{ds} + \rho gz_2}$$

1 Ecuaciones del movimiento aerodinámico

Si ahora consideramos que una nave en movimiento en un fluido desarrolla una presión dinámica aplicada sobre su superficie de ataque w através del mismo y consideramos un punto en el espacio con el eje de la nave formando con la horizontal unángulo α y tomamos como parámetros del vuelo la superficie de ataque w, la ongitud L_d para despegar en la pista, una densidad de los gases de combustión ρ_g, una boca de tobera $b(m^2)$, tendremos una impulsión $I = RT\rho_g b$, con R constante de los gases perfectos T temperatura Kelvin, y el ángulo de acometida del ala β que tomamos igual a 6^o y la masa de la nave $2500kg$. Las presiones atmosféricas arriba y abajo de la nave por ser despreciable su altura respecto de la altura total de aire dan una fuerza resultante nula sobre la nave, por lo que la ecuación diferencial se escribe entre el punto de despegue y otro sobre el nivel del mar, por ejemplo. Si elegimos el punto de partida del movimiento de la nave y el punto de flotación observamos que en este punto las fuerzas han alcanzado el equilibrio porque el desplazamiento es uniforme por lo que $p_2 = 0$.

$$\boxed{3p_1 + \tfrac{1}{2}\mu\tfrac{dv_1}{ds} = \tfrac{1}{2}v_2^2\rho_2}$$

Así aplicando la ecuación de los fluidos obtenida antes y considerando despreciable el efecto cortante de la viscosidad sobre capas sucesivas de aire podemos escribir:

$$\boxed{3\tfrac{F}{w} - \tfrac{1}{2}\rho v^2 = 0}$$

Consideramos el coeficiente de arraste o rozamiento entre el fluido o aire y la nave como χ y adoptando el momento de la flotabilidad de la nave tenemos las ecuaciones:

$$\boxed{F = 3\left(I - mg\sin(\alpha) - m\tfrac{dv}{dt} - \chi\tfrac{1}{2}\rho v^2\sin(\alpha+\beta)\,w\right) - \tfrac{1}{2}\rho v^2 w\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{F_x = 3\left(I\cos\alpha - m\tfrac{dv_x}{dt} - \chi w\tfrac{1}{2}\rho v_x^2 w\cos(\alpha+\beta)\right) - \tfrac{1}{2}\rho v_x^2 w\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{F_z = 3\left(I\sin\alpha - mg - m\tfrac{dv_z}{dt} - \chi w\tfrac{1}{2}\rho v_z^2 w\sin(\alpha+\beta)\right) - \tfrac{1}{2}\rho v_z^2 w\cos(\alpha+\beta)}$$

Donde χ es el coeficiente de arrastre o rozamiento entre nave y fluido (aire). En la dirección del eje vertical y a partir de la flotabilidad será $v_{0z} = v_{L_p}$(Velocidad de flotación en el despegue).Teniendo encuenta que la última ecuación en F_z solo es válida desde el momento en que la nave se libera del sustento, es decir desde la flotabilidad:

$$3\left(I\cos\alpha - m\frac{dv_x}{dt} - \chi w\frac{1}{2}\rho v_x^2 w\cos(\alpha+\beta)\right) - \frac{1}{2}\rho v_x^2 w\sin(\alpha+\beta) = 0$$

$$3\left(I\sin\alpha - mg - m\tfrac{dv_z}{dt} - \chi w\tfrac{1}{2}\rho v_z^2\sin(\alpha+\beta)\right) - \tfrac{1}{2}\rho v_z^2 w\cos(\alpha+\beta) = 0.$$

Cuando tras la rodadura se alcanza la flotación tenemos:

$$3I\cos\alpha - 3m\frac{dv_x}{dt} - 3\chi w\frac{1}{2}\rho v_x^2\cos(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\rho v_x^2 w\sin(\alpha+\beta) = 0$$

$$3\left(I\sin\alpha - mg - m\frac{dv_z}{dt} - \chi w\frac{1}{2}\rho v_z^2\sin(\alpha+\beta)\right) - \frac{1}{2}\rho v_z^2 w\cos(\alpha+\beta) = 0$$

Elegimos las costantes en la forma:

$$a = w\frac{1}{2\rho\left(\left(3\chi\right)\sin\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)}$$
$$b = w\frac{1}{2\rho\left(\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\left(\left(3\chi\right)\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)\right.}$$
$$d = I\cos\alpha$$
$$f = w\frac{1}{2}\rho\left(\sin\left(\beta\right)+\left(3\chi\right)\cos\left(\beta\right)\right)$$
$$h = w\frac{1}{2}\rho\left(\left(3\chi\right)\sin\left(\beta\right)+\cos\left(\beta\right)\right)$$
$$c = mg - I\sin\alpha$$

Hay dos tramos muy claros en el despegue de la nave, el primero la trayectoria se desarrolla sobre la pista y la velocidad en el momento de la flotación es:

$$v_x = \sqrt{\frac{3\left(mg\right)}{w\frac{1}{2}\rho\left(\left(3\chi\right)\sin\left(\beta\right)+\cos\left(\beta\right)\right)}}$$
$$v_x = \sqrt{\frac{3\left(11000\right)}{\left(18.22\right)\frac{1}{2}\left(1.2\right)\left(3\left(0.05\right)\sin\left(0.104\,72\right)+\cos\left(0.104\,72\right)\right)}}$$
$$v_x = 54.\,664\left(3.6\right)v_x = 196.\,79km/h$$

Velocidad en el tramo de deslizamiento hasta llegar a la flotación.

Calculamos la velocidad horizontal con la ecuación:

$$3I\cos\alpha - 3m\frac{dv_x}{dt} - w\frac{1}{2}\rho v_x^2\left(\left(3\chi\right)\cos\left(\beta\right)+\sin\left(\beta\right)\right) = 0$$

O lo que es lo mismo que:

$$3I - 3m\frac{dv}{dt} - fv^2 = 0$$

Cuya solución es:

$$v_x = \sqrt{\frac{3I}{f}}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\frac{1}{fI}}\left(2t+6Pm\right)}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\frac{1}{fI}}\left(2t+6Pm\right)}\right)-1}$$

Con las condiciones de contorno $t=0$ para $v_x=0$:

$$\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Pm}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}\right)+1=0 \qquad P=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\,(i\pi)\sqrt{\frac{1}{fI}}$$

Resultando la velocidad horizontal v_x:

$$v_x=\sqrt{\frac{3I}{f}}\frac{\exp\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}-i\pi\right)+1}{\exp\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}-i\pi\right)-1}$$

Y para los valores de las costantes ya fijadas tenemos el gráfico de la velocidad v_x en la $Figura$ 2:

Tomando el Impulso I igual:

$I=(11200)\,kg$

$m=(1122.4)$

$a=w\frac{1}{2}\rho\,(\sin(\alpha+\beta)+(3\chi)\cos(\alpha+\beta))$

$a=(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)\,(\sin(0.317\,65+0.104\,72)+(3\,(0.05))\cos(0.317\,65+0.104\,72))=5.970\,4$

$f=w\frac{1}{2}\rho\,(\sin(\beta)+(3\chi)\cos(\beta))$

$f=(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)\,(\sin(0.104\,72)+3\,(0.05)\cos(0.104\,72))=2.770\,5$

$b=w\frac{1}{2}\rho\,((3\chi)\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$b=(3\,(0.05)\sin(0.317\,65+0.104\,72)+\cos(0.317\,65+0.104\,72))\,(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)=10.632$

$h=w\frac{1}{2}\rho\,((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta))$

$h=(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)\,((3\,(0.05))\sin(0.104\,72)+\cos(0.104\,72))=11.031$

$m=\frac{11000}{9.8}=1122.4$

$\chi=0.05$

$$v_x=\sqrt{\frac{3}{(2.770\,5)}\,(11200)}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.770\,5)(11200)}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.770\,5)(11200)}}}}+1}=110.13\frac{\exp\left(0.104\,63\sqrt{3}t\right)-1}{\exp\left(0.104\,63\sqrt{3}t\right)+1}\quad(3.6)$$

Ahora sabemos que la flotación se obtiene en una velocidad horizontal v_x para un tiempo t_p según la ecuación:

$$v_x = \sqrt{\frac{3}{(2.7705)}(11200)}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t_p}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t_p}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}+1} = 110.13\frac{\exp\left(0.10463\sqrt{3}t_p\right)-1}{\exp\left(0.10463\sqrt{3}t_p\right)+1}$$

(3.6)

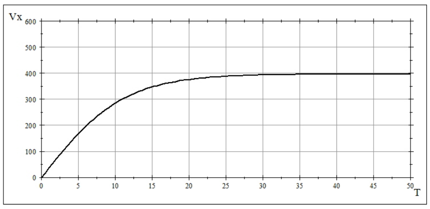

Figura 2 Gráfico de la velocidad horizontal v_x en km/h para un impulso horizontal de

Resultando el valor de t_p, tiempo hasta la flotación, con la particularización de las costantes al caso elegido:

$$t_p = \frac{1}{2}\sqrt{3}(1122.4)\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}$$

$$\left(\ln\frac{3\sqrt{\frac{1}{(2.7705)}(11200)}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{11000}{(18.2)(1.2)(\cos(0.10472)+3(0.05)\sin(0.10472))}}}{3\sqrt{\frac{1}{(2.7705)}(11200)}-\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{11000}{(18.2)(1.2)(\cos(0.10472)+3(0.05)\sin(0.10472))}}}\right) = 6.0131 seg$$

La velocidad en el instante de la flotación será:

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{(2.7705)}(11200)}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{6.0131}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)11200}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{6.0131}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)11200}}}}+1} = 54.694(3.6) = 196.90 km/h$$

Obtenemos la ecuación del espacio horizontal recorrido:

$$x = \sqrt{\frac{3}{f}I}\int\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}}+1}dt \qquad (2)$$

Haciendo el cambio:

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}} = u \qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{3}m\sqrt{\frac{1}{fI}}u$$

Remplazando tenemos para x:

$$x=\frac{3}{2f}m\int\frac{e^u-1}{e^u+1}du=-\frac{3}{2f}m\ln\left(\frac{4e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}}}{\left(e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{fI}}}}+1\right)^2}\right)$$

Particularizando las costantes por los valores ya adoptados y representando sta funcin en la $Figura$ 3 :

$$x=-\frac{1}{2}\frac{3}{(2.7705)}(1122.4)\ln\left(\frac{4e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}}{\left(e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}+1\right)^2}\right)$$

$$x=-607.69\ln 4.0\frac{\exp(0.18122t)}{(\exp(0.18122t)+1.0)^2}$$

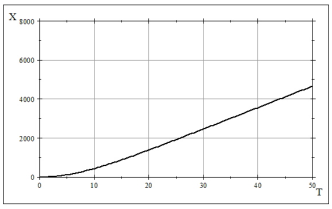

Figura 3 Gráfico del espacio horizontal x con un impulso de $11200kg$

Y la longitud de pista hasta la flotación sera ($t=6.0131seg$):

$$L_p=-607.69\ln 4.0\frac{\exp(0.18122(6.0131))}{(\exp(0.18122(6.0131))+1.0)^2}=172.12m$$

En ese momento el piloto cambia el ángulo de ataque a $18.2°$ $\alpha=\frac{18.2(2\pi)}{360}=0.31765rd$. Con lo que las costantes son: $I=(11200)\,kg$

$d=I\cos\alpha=11200\cos(0.31765)=10640.$

$m=(1122.4)$

$a=w\frac{1}{2}\rho(\sin(\alpha+\beta)+(3\chi)\cos(\alpha+\beta))$

$a=(18.2)\frac{1}{2}(1.2)(\sin(0.31765+0.10472)+(3(0.05))\cos(0.31765+0.10472))=5.9704$

$f=w\frac{1}{2}\rho(\sin(\beta)+(3\chi)\cos(\beta))$

$f=(18.2)\frac{1}{2}(1.2)(\sin(0.10472)+3(0.05)\cos(0.10472))=2.7705$

$b=w\frac{1}{2}\rho\left((3\chi)\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

$b=\left(3\,(0.05)\sin(0.317\,65+0.104\,72)+\cos(0.317\,65+0.104\,72)\right)(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)=10.\,632$

$h=w\frac{1}{2}\rho\left((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta)\right)$

$h=(18.2)\,\frac{1}{2}\,(1.2)\left((3\,(0.05))\sin(0.104\,72)+\cos(0.104\,72)\right)=11.\,031$

$m=\frac{11000}{9.8}=1122.\,4$

$\chi=0.05$

Y las ecuaciones son:

$$3I\cos\alpha-3m\frac{dv_x}{dt}-w\frac{1}{2}\rho v_x^2\left(3\chi\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)=0 \qquad (3)$$

$$3\left(I\sin\alpha-mg-m\frac{dv_z}{dt}\right)-w\frac{1}{2}\rho v_x^2\left(3\chi\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)=0 \qquad (4)$$

O lo que es lo mismo para la primera ecuació la solución es:

$$3m\frac{dv_x}{dt}+bv_x^2-3d=0 \qquad v_x=\sqrt{\frac{3d}{a}}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Pm}{\sqrt{\frac{1}{da}}}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Pm}{\sqrt{\frac{1}{da}}}\right)-1}$$

Será $t=0$ $\qquad v_x=\sqrt{\frac{3(mg)}{w\frac{1}{2}\rho((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta))}}$

$$\sqrt{\frac{3d}{a}}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Pm}{\sqrt{\frac{1}{da}}}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Pm}{\sqrt{\frac{1}{da}}}\right)-1}=\sqrt{\frac{3(mg)}{w\frac{1}{2}\rho((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta))}}$$

$$P=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\left(\ln\left(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{3(mg)}{w\frac{1}{2}\rho((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta))}}+3\sqrt{\frac{1}{a}d}}{-\sqrt{3}\sqrt{\frac{3(mg)}{w\frac{1}{2}\rho((3\chi)\sin(\beta)+\cos(\beta))}}+3\sqrt{\frac{1}{a}d}}\right)\right)\sqrt{\frac{1}{ad}}$$

Resultando para v_x:

$$v_x=\sqrt{\frac{3d}{a}}\frac{\left(-\frac{3\sqrt{\frac{1}{a}d}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{g\frac{m}{w\rho\cos\beta+3w\chi\rho\sin\beta}}}{3\sqrt{\frac{1}{a}d}-\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{g\frac{m}{w\rho\cos\beta+3w\chi\rho\sin\beta}}}\right)\exp\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ad}}}\right)+1}{\left(-\frac{3\sqrt{\frac{1}{a}d}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{g\frac{m}{w\rho\cos\beta+3w\chi\rho\sin\beta}}}{3\sqrt{\frac{1}{a}d}-\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{g\frac{m}{w\rho\cos\beta+3w\chi\rho\sin\beta}}}\right)\exp\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ad}}}\right)-1}$$

Y representando esta ecuación con los valores de las costantes elegidas obtenemos la gráfica de la velocidad horizontal v_x en el ascenso en la

Figura 4:

$$v_x=\sqrt{\frac{3\,(10640)}{(5.9704)}}$$

$$\left(\frac{-\frac{3\sqrt{\frac{1}{(5.9704)}(10640)}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{(9.8)\frac{(1122.4)}{(18.2)(1.2)\cos(0.10472)+3(18.2)(0.05)(1.2)\sin(0.10472)}}}{3\sqrt{\frac{1}{(5.9704)}(10640)}-\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{(9.8)\frac{(1122.4)}{(18.2)(1.2)\cos(0.10472)+3(18.2)(0.05)(1.2)\sin(0.10472)}}}e^{\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(5.9704)(10640)}}}\right)}+1}{-\frac{3\sqrt{\frac{1}{(5.9704)}(10640)}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{(9.8)\frac{(1122.4)}{(18.2)(1.2)\cos(0.10472)+3(18.2)(0.05)(1.2)\sin(0.10472)}}}{3\sqrt{\frac{1}{(5.9704)}(10640)}-\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{(9.8)\frac{(1122.4)}{(18.2)(1.2)\cos(0.10472)+3(18.2)(0.05)(1.2)\sin(0.10472)}}}e^{\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(5.9704)(10640)}}}\right)}-1}\right)=$$

$$73.119\frac{6.9366\exp(0.25930t)-1.0}{6.9366\exp(0.25930t)+1.0}\,(3.6)\,km/h$$

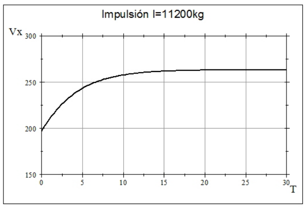

Figura 4 Gráfico de la velocidad horizontal v_x desde la flotación

Y la velocidad de crucero se alcanza en $\alpha=0$:

$$v_x=\sqrt{\frac{3\,(11200)}{(2.7705)}}$$

$$\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(11200)(2.7705)}}}}\frac{3\sqrt{\frac{(11200)}{(2.7705)}}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{3((1122.4)(9.8))}{(18.2)(1.2)((3(0.05))\sin((0.10472))+\cos((0.10472)))}}}{-3\sqrt{\frac{(11200)}{(2.7705)}}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{3((1122.4)(9.8))}{(18.2)(1.2)((3(0.05))\sin((0.10472))+\cos((0.10472)))}}}+1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(11200)(2.7705)}}}}\frac{3\sqrt{\frac{(11200)}{(2.7705)}}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{3((1122.4)(9.8))}{(18.2)(1.2)((3(0.05))\sin((0.10472))+\cos((0.10472)))}}}{-3\sqrt{\frac{(11200)}{(2.7705)}}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\frac{3((1122.4)(9.8))}{(18.2)(1.2)((3(0.05))\sin((0.10472))+\cos((0.10472)))}}}-1}$$

$$\mathrm{v}_x=110.13\frac{13.307\exp(0.18122t)-1.0}{13.307\exp(0.18122t)+1.0}\,(3.6)\,km/h$$

Cuyo gráfico se tiene en la *Figura* 5:

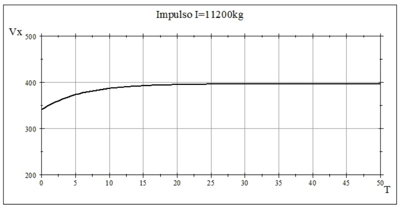

Figura 5 Gráfico de la velocidad horizontal de crucero v_x a partir de la flotación α

2 Ascenso de la nave.

Y para el ascenso de la nave con velocidad vertical v_z tenemos:

$$3\left(-h+mg-m\frac{dv_z}{dt}\right)-\left(3\left(\chi\right)+1\right)\frac{1}{2}\rho\cos\left(\alpha+\beta\right)v_z^2{=}0$$

Y expresando esta ecuacón en manera reducida:

$$\frac{dv_z}{dt}+\frac{1}{3m}cv_z^2-3\frac{1}{3m}a=0 \qquad v_z=\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{3}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6C_5m}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6C_5m}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)-1}$$

Obtenemos el valor del ascenso vertical z integrando la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt}-\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{3}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)-1}=0$$

Hacemos el cambio:

$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}=u \qquad t=3Qm+\frac{1}{2}\sqrt{3}m\sqrt{\frac{1}{ac}}u$$

Quedando la ecuación a integrar:

$$\frac{dz}{du}-\frac{3}{2}\frac{m}{c}\frac{\exp u+1}{\exp(u)-1}=0 \qquad z=3\frac{m}{2c}\ln\frac{\left(e^{\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}-1\right)^2}{e^{\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{2t-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}}$$

Para $t=0 \qquad z=0$:

$$\frac{\left(e^{\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}-1\right)^2}{e^{\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}}=1 \qquad e^{\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{-6Qm}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}$$

$$Q=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)\right)\sqrt{\frac{1}{ac}}$$

Resultando para z:

$$z=3\frac{m}{2c}\ln\frac{\left(e^{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}-1\right)^2}{e^{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}\right)}}=3\frac{m}{2c}\ln\frac{\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}}}$$

z

Y dibujando la gráfica de esta función para el rercorrido vertical de la nave z tenemos en la $Figura$ 6:

$$z=3\frac{(1122.4)}{2(11.454)}\ln\frac{\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{((9.8)(1122.4)-(3498.2))(11.454)}}}}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{((9.8)(1122.4)-(3498.2))(11.454)}}}}}=$$

$$146.99\ln\frac{0.38197(2.618\exp(0.30156t)-1.0)^2}{\exp(0.30156t)}$$

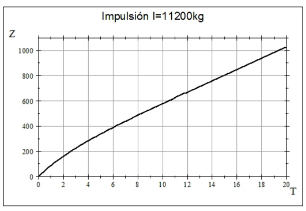

Figura 6 Gráfico de la ascensión vertical para un ángulo de 18.2

Y la velocidad es v_z:

$$\mathrm{v}_z = \sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{3}\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)exp\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}+1}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{ac}}}}-1}$$

Y dibujando la gráfica de la velocidad v_z para las costantes ya elegidas con anterioridad en la $Figura$ 7:

$$v_z = \sqrt{\frac{3((9.8)(1122.4)-(3498.2))}{(11.454)}}\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{((9.8)(1122.4)-(3498.2))(11.454)}}}}+1}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{((9.8)(1122.4)-(3498.2))(11.454)}}}}-1}$$

$$= 44.325\frac{(2.618\exp(0.30155t)+1.0)}{2.618\exp(0.30155t)-1.0}$$

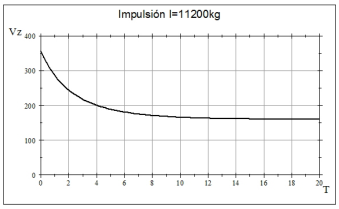

Figura 7 Gráfico de la velocidad vertical para un ángulo de ascenso 18.

Y para la velocidad horizontal de crucero a partir del estado de flotación tenemos v_x representada en la $Figura$ 8:

$$v_x = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{(5.1478)}(11200)}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(5.1478)(11200)}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(5.1478)(11200)}}}}+1} = 80.$$

$79\frac{\exp(0.24703t)-1.0}{\exp(0.24703t)+1.0}(3.6)\,km/h$

$$v_x = 183.46km/h$$

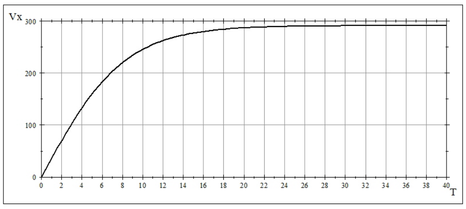

Figura 8 Gráfico de la velocidad horizontal de crucero a partir de la flotación con un impulso de

3 Flujo del fluido sobre la nave. Tunel de viento

A los efectos de analizar las perturbaciones sobre el fluido por el movimiento de la nave debemos considerar la nave en reposo mediante la ecuación:

$$3\left(I\cos\alpha - m\frac{dv_x}{dt} - \chi\frac{1}{2}\rho w v_x^2 \cos(\beta)\right) - \frac{1}{2}\rho v_x^2 w \sin(\beta) = 0 \qquad (5)$$

Llamando:

h=$3\chi\frac{1}{2}\rho w\cos(\beta) = \left(\frac{1}{2}\right)(1.2)(18.2)(3(0.05)\cos(0.104\,72) + \sin(0.104\,72)) =$ $2.\,770\,5$

Si suponemos que la nave alcanzó su trayectoria de crucero será $\alpha = 0$:

$$3\left(I - m\frac{dv_x}{dt} - \chi\frac{1}{2}\rho v_x^2 \cos(\beta)\,w\right) - \frac{1}{2}\rho v_x^2 w \sin(\beta) = 0 \qquad (6)$$

O lo que es lo mismo introduciendo costantes para los coeficientes:

$$3m\tfrac{dv_x}{dt} + hv_x^2 - 3I = 0 \qquad v_x = \sqrt{\tfrac{3}{h}I}\frac{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\frac{1}{hI}}}(2t+6Qm)\right)+1}{\exp\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\frac{1}{hI}}}(2t+6Qm)\right)-1}$$

Para $t = 0$ $v_x = 0$:

$$\exp\left(\tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\frac{1}{hI}}}(6Qm)\right) + 1 = 0 \qquad Q = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\tfrac{1}{hI}}\,(i\pi)$$

Resultando para la velocidad horizontal v_x:

$$v_x = \sqrt{\tfrac{3}{h}I}\frac{\exp\left(i\pi + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}\right)+1}{\exp\left(i\pi + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}\right)-1} = \sqrt{\tfrac{3}{h}I}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}+1}$$

La velocidad de flotación, es decir cuando es la impulsión lo que equilibra el peso sera cuando la velocidad sea $v_x = \sqrt{\frac{3(mg)}{(3\chi+1)w\frac{1}{2}\rho\cos(\beta)}}$ lo que ocurrirá en el tiempo t_p:

$$\sqrt{\frac{3}{h}I\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t_p}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t_p}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}+1}} = \sqrt{\frac{3\,(mg)}{(3\chi+1)\,w\frac{1}{2}\rho\cos(\beta)}} \tag{7}$$

Y particularizando las costantes en la ecuación 7:

$$\sqrt{\frac{3}{(12.489)}(11200)\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(12.489)(11200)}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(12.4897)(11200)}}}}+1}} - \sqrt{\frac{3((1122.4)(9.8))}{(3(0.05)+1)(18.2)\frac{1}{2}(1.2)\cos(0.10472)}} = 0$$

$$51.869\frac{\exp(0.38476t)-1.0}{\exp(0.38477t)+1.0} - 51.402 = .159.99\frac{\exp(0.12474t)-1.0}{\exp(0.12474t)+1.0} - 51.402 = 0$$

Resulta: $t_p = 6.0131 seg$

Y la gráfica de la velocidad horizontal v_x del aire es en la $Figura$ 9:

$$v_x = \sqrt{\frac{3}{(2.7705)}(11200)\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}+1}} = 110.13\frac{\exp(0.18122t)-1.0}{\exp(0.18122t)+1.0}$$

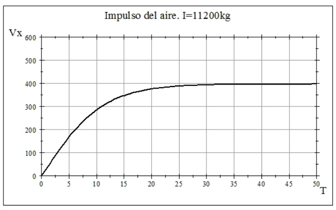

Figura 9 Gráfico de la velocidad del aire sobre la nave fija en tierra

Ahora determinaremos el recorrido horizontal del flujo aereo:

$$x = -\frac{2}{m}I\int \frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}+1}dt$$

Haciendo el cambio:

$$.\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}} = u \qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{3}m\sqrt{\frac{1}{hI}}u$$

Resulta para el espacio recorrido x:

$$x = \frac{3}{2f} m \ln \frac{\left(e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}+1\right)^2}{4e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}}$$

La flotación de la nave se inicia para $t = 6.0131 seg$. Y grafiando el espacio en la $Figura$ 10:

$$\text{x=}\frac{3}{2((2.7705))}(1122.4)\ln\left(\frac{1}{4}\frac{\left(e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{6.0131}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}+1\right)^2}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{(1122.4)}\frac{6.0131}{\sqrt{\frac{1}{(2.7705)(11200)}}}}}\right) = 172.12m$$

4 Onda de choque en el movimiento de la nave.

La nave se desplaza mientras sus motores producen un ruido que se desplaza por el aire a la velocidad del sonido, es decir el sonido de libera del movimeinto de la nave, pero al aumentar la velocidad de la nave la distancia entre la onda y la nave va disminuyrndo hasta que el periodo de la onda y su longitud de onda se anula lo que provoca una acumulación de ondas en el morro de lanave lo que es conocido como onda de choque.

Así por lo tanto si el periodo de la onda sonora es:

$$T = \frac{\lambda}{v_s}$$

λ longitud de onda del sonido, v_s velocidad del sonido
Y el tiempo de recorrido de la nave a velocidad sónica es en una longitud igual a la longitud de onda del sonido es:

$$\sqrt{\frac{3}{h}I}\frac{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}-1}{e^{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{m}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{hI}}}}+1} = v_s \qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{3}m\sqrt{\frac{1}{hI}}\left(\ln\frac{3\sqrt{\frac{1}{h}I}+\sqrt{3}v_s}{3\sqrt{\frac{1}{h}I}-\sqrt{3}v_s}\right) = \frac{\lambda}{v_s}$$

Particularizando las costantes al caso que hemos propuesto:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(1122.4)\sqrt{\frac{1}{(1.3127)I}}\left(\ln\frac{3\sqrt{\frac{1}{(1.3127)}I}+\sqrt{3}(331)}{3\sqrt{\frac{1}{(1.3127)}I}-\sqrt{3}(331)}\right) - \frac{20}{(331)} = 0$$

Esta ecuacion da el impulso necesario para alcanzar la onda de choque con la velocidad de la nave a la velocidad del sonid v_s:

Con lo que resulta:

$$I = 48108.kg$$

Impulso necesario para alcanzar la velocidad del sonido.

5

Conclusión

La consideración de tratar al fluido en este caso de aviónica con las consideraciones de las leyes de la Mecánica de Fluidos y de la Estática ha permitido obtener unas sencillas ecuaciones para gobernar la navegabilidad de las naves en aquellos casos y explicar de forma sencilla el fenómeno de la trasgresión de la barrera del sonido. Así pues la aplicación de las nuevas ecuaciones desarrolladas resultan inmediatas y efectivas.

Bibliografia:

Javier Jenaro Mac-Lennan. *Sobre la acción de un fluido en el codo de una tuberia.* Revista de Obras Públicas, 2000. (Español)