

N. Insausti^a, I. Adarraga^a, J. Urruzola^a, F. Mujika^a^a GRUPO MATERIALES + TECNOLOGÍAS / MECÁNICA DE MATERIALES

Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería de Gipuzkoa, Universidad del País Vasco, Donostia-San Sebastián 20018, España

Aplicación del método Rigidez-Fuerza en el análisis de una placa a tracción con un agujero central

RESUMEN

Historia del artículo:

Recibido 5 de Mayo 2017

En la versión revisada 5 de Mayo 2017

Aceptado 31 de Mayo 2017

Accesible online 21 de Junio 2017

Palabras clave:

Método rigidez-fuerza

Elementos finitos

Tracción

El método Rigidez-Fuerza (SFM) es un método en cuya formulación se tienen en cuenta las ecuaciones de equilibrio y las de compatibilidad de las deformaciones, obtenidas éstas a partir de los principios del trabajo virtual y del trabajo virtual complementario. La estructura de la ecuación de gobierno de este método es similar al método de la rigidez (SM) ya que las incógnitas principales son los desplazamientos. Este método es equivalente al IFMD desarrollado por Patnaik y a los métodos híbridos desarrollados por Pian.

Para el análisis por elementos finitos mediante el método Rigidez-Fuerza, se ha realizado una subrutina de usuario UEL de un elemento cuadrilátero de cuatro nodos y esta se ha implementado en el programa comercial Abaqus. El procedimiento seguido para el análisis del modelo ha sido el siguiente:

1. Análisis del modelo mediante el programa Abaqus que utiliza el método SM en su formulación.
2. Análisis del mismo modelo mediante la subrutina de usuario UEL que utiliza el método SFM.
3. Comparación de los resultados de ambos análisis con diferentes grados de discretización y con los obtenidos mediante una aproximación analítica.

Este método ha sido utilizado en el análisis del ensayo de tracción de un composite unidireccional con un agujero en el centro.

Application of the Stiffness-Force method to the analysis of a plate in tension with a central hole

ABSTRACT

Keywords:

Stiffness-force method

Finite elements

Tension

In the formulation of the Stiffness-Force method (SFM) are taken into account the equilibrium equations and the compatibility conditions. These are obtained from the principles of virtual work and complementary virtual work. The structure of the governing equation of this method is similar to that of stiffness-method (SM) as the principal unknowns are the displacements. This method is equivalent to IFMD formulated by Patnaik and to the hybrid methods formulated by Pian.

For the Stiffness-Force method finite element analysis, a user subroutine UEL for a four node quadrilateral element has been developed. This subroutine has been implemented in the commercial program Abaqus. The procedure followed for the analysis of the model has been:

1. Analysis of the model using the program Abaqus that employs the SM in its formulation.
2. Analysis of the same model using the user subroutine UEL employing the SFM.
3. Comparison of the results of both analysis, using varying degrees of discretization, to those obtained by an analytical approach.

This procedure has been used in the analysis of the open-hole tensile strength test of a unidirectional composite.

1 Introducción

El método de la rigidez (SM), basado en las condiciones de equilibrio que derivan de la aplicación del principio del trabajo virtual, se utiliza extensamente en el análisis por elementos finitos [1].

La otra aproximación básica en el análisis estructural es el método de las Fuerzas (FM) [2]. Este método se deriva de la aplicación del principio del trabajo virtual complementario. A partir de este método, Patnaik et al. desarrollaron el método de las fuerzas integrado dual (IFMD) [3], que tiene la misma ecuación de gobierno que el método de la rigidez. En el método IFMD se tienen en cuenta tanto las ecuaciones de equilibrio como las condiciones de compatibilidad. Por otro lado, Pian [4] introdujo el método híbrido (HM) y, recientemente, Adarraga et al. [5] indicaron que ambos métodos son equivalentes.

IFMD y HM se pueden obtener de la aplicación de los principios del trabajo virtual y del trabajo virtual complementario y satisfacen las ecuaciones de equilibrio como en SM y las condiciones de compatibilidad como en FM. Los autores denominan al método Rigidez-Fuerza con la intención de unificar la nomenclatura.

2 El método rigidez-fuerza (SFM)

2.1 Formulación

Las ecuaciones del SFM se obtienen de la aplicación de los principios del trabajo virtual y del trabajo virtual complementario:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (1)$$

$$\int_V \{\delta \sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (2)$$

donde $\{a^i\}$ y $\{P^i\}$ son los vectores de desplazamientos y de fuerzas nodales respectivamente. A partir de los desplazamientos nodales, se pueden conocer los desplazamientos en cualquier punto del elemento [1]:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (3)$$

donde $[N]$ es la matriz de funciones de interpolación de desplazamientos. Una vez obtenidos los desplazamientos nodales se conocen también las deformaciones en el elemento:

$$\{\varepsilon\} = [L][N] \{a^i\} = [B] \{a^i\} \quad (4)$$

donde $[L]$ es la matriz de operadores diferenciales y $[B]$ es la matriz de forma. En el método SFM la interpolación de las tensiones y los desplazamientos es independiente [5]. Las

tensiones en cualquier punto del elemento se interpolan a partir de los parámetros de tensión $\{F^i\}$:

$$\{\sigma\} = [Y] \{F^i\} \quad (5)$$

siendo $[Y]$ la matriz de funciones de interpolación de tensiones. Por otro lado, el vector de tensiones se relaciona con el vector de deformaciones mediante la matriz de coeficientes de flexibilidad del material $[S]$:

$$\{\sigma\} = [S] \{\varepsilon\} \quad (6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4) y (5) en el principio del trabajo virtual (1) resulta:

$$\left(\int_V [B]^T [Y] dV \right) \{F^i\} = \{P^i\} \quad (7)$$

La matriz de equilibrio se define como:

$$[E] = \int_V [B]^T [Y] dV \quad (8)$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio (7) se expresa como:

$$[E] \{F^i\} = \{P^i\} \quad (9)$$

Al sustituir las ecuaciones (5), (6) y (9) en el principio del trabajo virtual complementario (2), resulta:

$$\left(\int_V [Y]^T [S] [Y] dV \right) \{F^i\} = [E^e]^{-T} \{a^i\} \quad (10)$$

La matriz de flexibilidad se define como:

$$[G] = \int_V [Y]^T [S] [Y] dV \quad (11)$$

La ecuación (10) se puede expresar como:

$$[G] \{F^i\} = [E]^{-T} \{a^i\} \quad (12)$$

De la ecuación (12) se obtienen los parámetros de tensiones del elemento $\{F^i\}$:

$$\{F^i\} = [G]^{-1} [E]^{-T} \{a^i\} \quad (13)$$

Multiplicando esta expresión en ambos lados por la matriz de equilibrio $[E]$, el primer término de la ecuación (13) corresponde al vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos, $\{P^i\}$:

$$\{P^i\} = [E][G]^{-1} [E]^{-T} \{a^i\} \quad (14)$$

La ecuación (14) se puede escribir:

$$\{P^i\} = [K] \{a^i\} \quad (15)$$

En el método SFM la matriz de rigidez del elemento es:

$$[K^e] = [E][G]^{-1} [E]^{-T} \quad (16)$$



La matriz de rigidez de la estructura se obtiene del ensamblaje de las matrices elementales, tal y como se hace en el método SM. Por lo tanto, la ecuación de gobierno del método SFM es:

$$[K]\{a^l\} = \{P^l\} \tag{17}$$

2.2 Elemento cuadrilateral de 4 nodos

En esta sección se describe la formulación del método SFM correspondiente al elemento cuadrilateral isoparamétrico bidimensional de 4 nodos que se muestra en la figura 1.

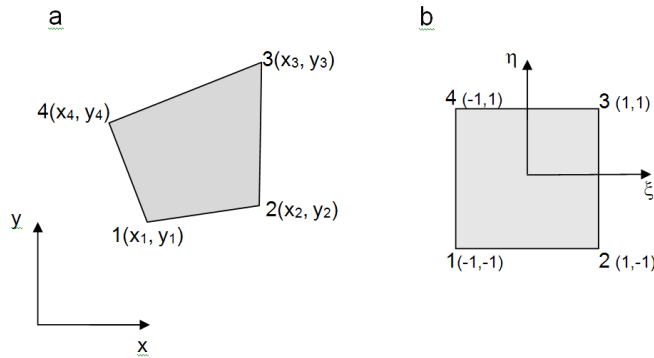


Figura 1. Elemento cuadrilateral de 4 nodos: a) coordenadas globales; b) coordenadas naturales.

Conforme a lo descrito en la sección anterior, la matriz de rigidez del elemento se calcula a partir de las matrices de equilibrio y de flexibilidad.

En la formulación del elemento cuadrilátero isoparamétrico se emplean las mismas funciones de interpolación lineales que en el cuadrilátero general $[N]$ que se utilizan en el método SM [1]:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) x_i \tag{18}$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) y_i$$

La matriz de deformación del elemento $[B]$ se obtiene derivando la matriz de funciones de interpolación:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{19}$$

En el caso de un cuadrilátero general esta matriz $[B]$ varía con las coordenadas de cada punto.

Utilizando las funciones de interpolación de tensiones definidas en [6,7] la ecuación (5) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^2 \eta & a_3^2 \xi \\ 0 & 1 & 0 & b_1^2 \eta & b_3^2 \xi \\ 0 & 0 & 1 & a_1 b_1 \eta & a_3 b_3 \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

2.2.1 Matriz de Equilibrio $[E]$

La matriz de equilibrio de cada elemento se calcula mediante la siguiente expresión:

$$[E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [Y] |J| t \cdot d\xi d\eta \tag{21}$$

Donde t es el espesor del elemento y $|J|$ el determinante del Jacobiano.

2.2.2 Matriz de Flexibilidad $[G]$

La matriz de flexibilidad de los elementos se obtiene según:

$$[G] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Y]^T [S] [Y] |J| t \cdot d\xi d\eta \tag{22}$$

2.2.3 Matriz de Rigidez $[K]$

Una vez calculadas las matrices de equilibrio y de flexibilidad del elemento, la matriz de rigidez del elemento se obtiene mediante la ecuación (16).

Conocidas las matrices de rigidez elementales, la matriz de rigidez del sistema se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de todos los elementos.

3 Análisis mediante SFM de una placa a tracción con un agujero circular central

La concentración de tensiones alrededor de agujeros tiene una gran importancia práctica, puesto que suelen ser causa de fallo. El análisis de placas agujereadas ha tenido una larga trayectoria y sigue vigente hoy en día. La solución de una placa infinita con un agujero circular central sometida a tracción uniaxial fue desarrollada por Kirsch [8]. Posteriormente Howland [9] obtuvo las tensiones alrededor del agujero en el caso de placas de ancho finito mediante una aproximación analítica. Tan [10] definió los factores de corrección debidos a ancho finito.

Existen en la bibliografía análisis experimentales [11,12] y gran variedad de aproximaciones analíticas [13-17], que se comparan con resultados obtenidos de modelos numéricos.

En el presente trabajo se pretende analizar la concentración de tensiones de una placa con un agujero circular central (ver figura 2) sometida a tracción uniaxial mediante el método SFM.

El análisis se ha realizado utilizando el programa de elementos finitos Abaqus. Para ello se ha escrito una



subrutina de usuario, UEL, correspondiente al elemento cuadrilátero isoparamétrico y se ha implementado dicho código en el citado programa comercial Abaqus.

El modelo y las condiciones de contorno que se han utilizado en el análisis por elementos finitos se muestran en la figura 3.

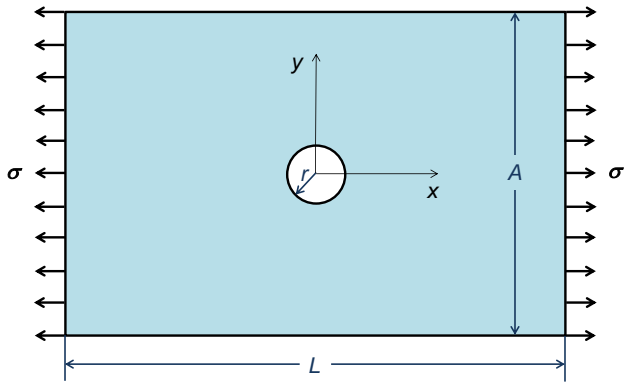


Figura 2. Placa a tracción con un agujero circular en su centro.

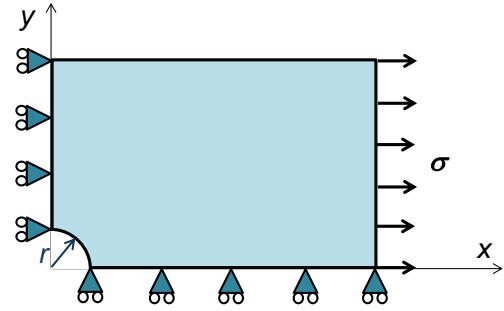


Figura 3. Modelo y condiciones de contorno de la placa.

La distribución de tensiones horizontales σ_x y verticales σ_y se indican en las figuras 4 y 5, respectivamente.

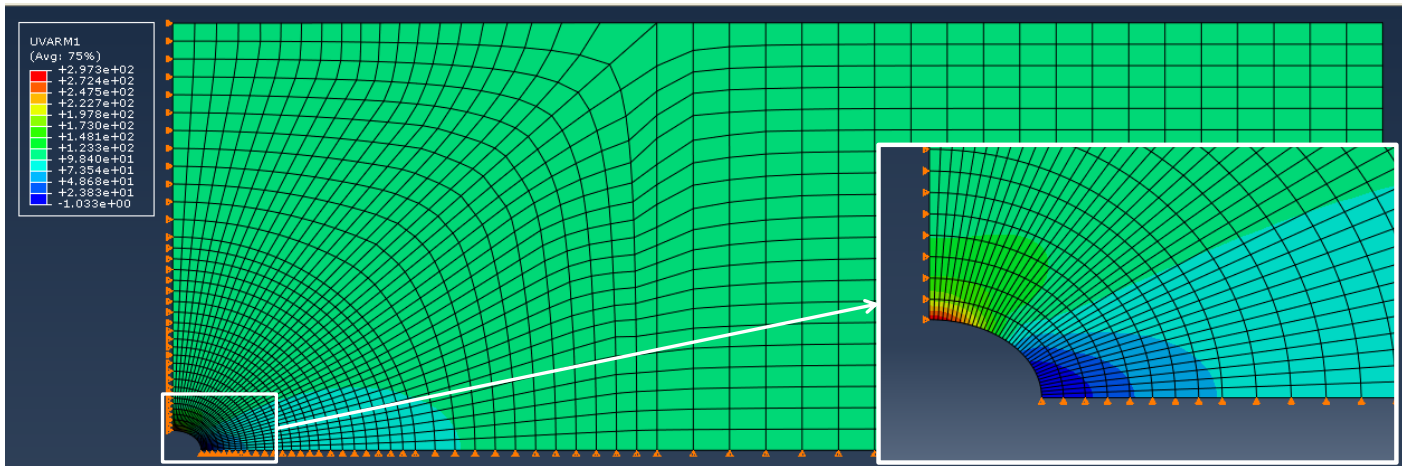


Figura 4. Distribución de tensiones horizontales σ_x .

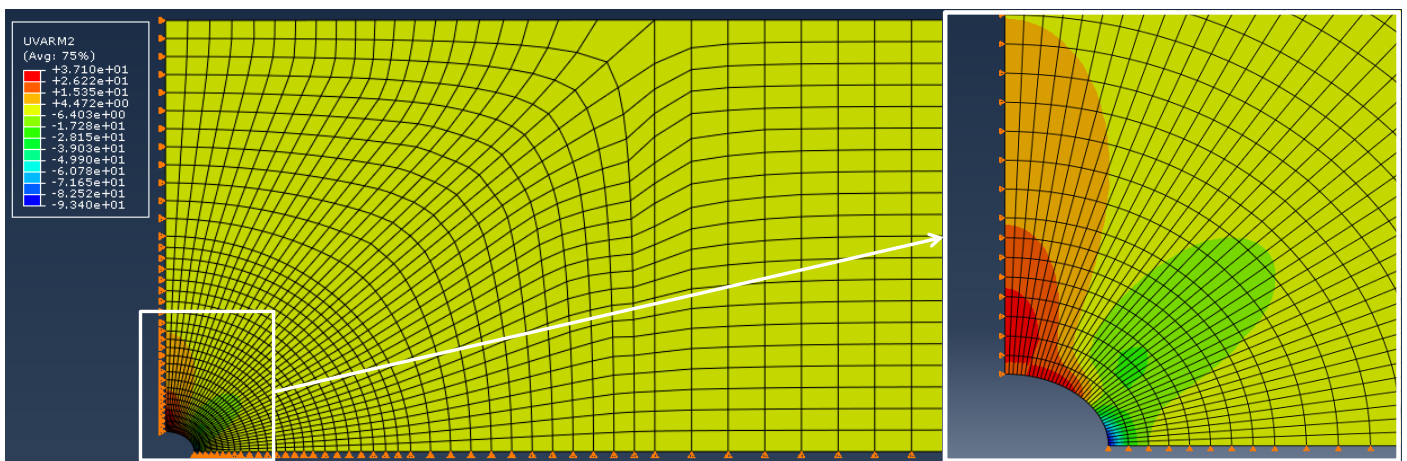


Figura 5. Distribución de tensiones verticales σ_y .



4 Conclusiones

La intención de este trabajo es analizar las concentraciones de tensiones generadas alrededor de un agujero circular central en composites mediante el método SFM. Para ello se ha escrito el código correspondiente a un cuadrilátero general y se ha implementado esa subrutina de usuario UEL en Abaqus.

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) la financiación del Grupo de Investigación Mecánica de Materiales GIU 16/51 en la convocatoria de 2016.

Referencias

-
- [1] E.Oñate, *Structural analysis with the finite element method*. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering (2009).
- [2] J.Robinson, *Integrated theory of finite element methods*. London: John Wiley & Sons (1973).
- [3] S.N.Patnaik, R.M.Coroneos, D.A.Hopkins, *Advances in Engineering Software*, **29**, 3–6, pág. 463-474 (1998).
doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0965-9978\(97\)00070-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0965-9978(97)00070-7)
- [4] T.H.H.Pian, *AIAA Journal*, **2**, 7, pág. 1333-1336 (1964).
- [5] I.Adarraga, M.A.Cantera, J.M.Romera, N.Insausti, F:Mujika, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **98**, 9, pág. 663-677 (2014). doi:10.1002/nme.4644
- [6] T.H.H.Pian, K.Sumihara, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**, 9, pág. 1685-1695 (1984).
doi:10.1002/nme.1620200911
- [7] C.Zhang, D.Wang, J.Zhang, W.Feng, Q.Huang, *Finite Elements in Analysis and Design*, **43**, 4, pág. 321-332 (2007).
doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2006.11.002>
- [8] S.P.Timoshenko, J.N.Goodier, *Teoría de la elasticidad; S. Timoshenko y J.N. Goodier; traducido por Alberto Fuentes Pérez*. Bilbao: Urmo (1968).
- [9] R.C.J.Howland, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.Series A*, **229**, 670-680, pág. 49-86 (1930).
doi:10.1098/rsta.1930.0002
- [10] S.C.Tan, *Journal of Composite Materials*, **22**, 11, pág. 1080-1097 (1988).
doi:10.1177/002199838802201105
- [11] P.P.Camanho, P.Maimí, C.G.Dávila, *Composites Science and Technology*, **67**, 13, pág. 2715-2727 (2007).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.02.005>
- [12] R.M.O'Higgins, M.A.McCarthy, C.T.McCarthy, *Composites Science and Technology*, **68**, 13, pág. 2770-2778 (2008).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2008.06.003>
- [13] H.Wu, B.Mu, *Composites Part B: Engineering*, **34**, 2, pág. 127-134 (2003).
doi:[https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(02\)00097-5](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(02)00097-5)
- [14] P.P.Camanho, G.H.Erçin, G.Catalanotti, S.Mahdi, P.Linde, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, **43**, 8, pág. 1219-1225 (2012).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.03.004>
- [15] E.Martin, D.Leguillon, N.Carrère, *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 26, pág. 3915-3922 (2012).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.08.020>
- [16] R.M.Frizzell, M.A.McCarthy, C.T.McCarthy, *Composite Structures*, **110**, pág. 51-61 (2014).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.003>
- [17] J.D.D.Melo, J.Bi, S.W.Tsai, *Composite Structures*, **159**, pág. 44-52 (2017).
doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.055>

