

# UM MÉTODO NUMÉRICO PARA A MODELAGEM DE FRATURAMENTO COESIVO EM 3D

TÚLIO N. BITTENCOURT\*  
e  
ANTHONY R. INGRAFFEA\*\*

\* *Laboratório de Mecânica Computacional  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, EPUSP  
Universidade de São Paulo  
e-mail:tbitten@fox.cce.usp.br*

\*\* *Cornell Fracture Group  
Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA*

## SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se um método que estende o modelo de fraturamento coesivo proposto por Hillerborg *et al.*<sup>4,6</sup> para problemas tri-dimensionais. O principal objetivo é o estudo do efeito das dimensões absolutas de elementos de materiais cerâmicos em seu comportamento estrutural. As hipóteses básicas e limitações de tal método são apresentadas e discutidas. O novo modelo obtido é então apresentado através da formulação matricial do problema coesivo. Esta formulação fornece um sistema de equações não-lineares que pode ser resolvido com o algoritmo de Newton-Raphson. O modelo é capaz de representar a evolução das zonas de processos inelásticos e das de fissura verdadeira para diferentes geometrias estruturais<sup>2</sup>. A implementação computacional do modelo é feita utilizando-se técnicas de programação orientada para objetos e computação gráfica. Finalmente, apresenta-se um exemplo em que uma solução tri-dimensional gerada com este modelo matemático é comparada com a solução bi-dimensional conhecida na literatura.

## SUMMARY

In this work a method is presented to extend the cohesive fracture model proposed by Hillerborg *et al.*<sup>4,6</sup> to three-dimensional problems. The main objective is the study of the dimensional effect of ceramic elements in their structural behaviour. The basic assumptions and limitations of the method are presented and discussed. The obtained model is then presented using the matrix formulation of the cohesive problem. This formulation generates a system of non-linear equations that can be solved using the Newton-Raphson algorithm. The model is able to represent the evolution of regions with inelastic processes as well as real crack propagation for different structural geometries<sup>2</sup>. The implementation of the model is done using object oriented programming techniques and computer graphics. Finally, an example problem

Recibido: Enero 1995

is presented where a 3D solution obtained using this mathematical model is compared to the bidimensional solution from the literature.

## INTRODUÇÃO

Estruturas constituídas de materiais cerâmicos exibem uma variação de resistência devido à mudanças nas dimensões absolutas das mesmas. Este fenômeno é conhecido como efeito de escala<sup>5,1</sup>. Os princípios da mecânica do fraturamento podem ser utilizados para explicar este fenômeno. Neste contexto, o efeito de escala é atribuído à variação da taxa de liberação de energia potencial absorvida pelo fronte da fissura em função do volume da estrutura<sup>3</sup>. O modelo de fissura coesiva (*Cohesive Crack Model - CCM*) foi introduzido por Hillerborg<sup>4</sup> para que este fenômeno pudesse ser modelado.

Neste trabalho, o método desenvolvido pelo grupo de Hillerborg<sup>4,6</sup> é estendido para a modelagem do comportamento coesivo em 3D.

O modelo 3D apresentado é implementado em um programa de computador denominado CoCrack-3D (*Cohesive Crack 3D*). CoCrack-3D é um programa capaz de simular a propagação dos fronts verdadeiro e fictício da fissura sobre uma superfície pré-determinada. Para cada passo de propagação, a extensão e a forma da zona de processos inelásticos é determinada. Além disso, a abertura da fissura e a força de superfície associada a ela são computadas sobre a superfície que define a fissura. O programa CoCrack-3D faz uso de conceitos sofisticados de programação orientada para objetos e de computação gráfica, o que permite ao usuário do sistema visualizar o processo de propagação.

## O FRATURAMENTO COESIVO EM 3D

O problema de fraturamento coesivo em 3D pode ser formulado como descrito em Sousa<sup>7</sup>.

Para o modelo aqui proposto, a superfície que define a trajetória de propagação da fissura é considerada conhecida *a priori*. Esta superfície é definida por uma malha arbitrária de elementos de superfície (neste trabalho serão utilizadas malhas de elementos de contorno - Figura 1). A trajetória de propagação é criada pelo analista através de um corte arbitrário na estrutura. A superfície assim definida será a arena onde a propagação coesiva se desenvolverá.

A propagação da fissura sobre a superfície pré-definida é modelada impondo-se, inicialmente, continuidade de deslocamentos nos nós, com posterior relaxamento desta condição à medida que a fissura avança. As condições de transferência de forças de superfície são também consideradas para simular o efeito da zona de processos inelásticos, ou neste caso, zona coesiva. O limite de propagação (*crack path limit*) é identificado como a linha frontal de fundo da superfície pré-definida (Figura 1). Esta linha limite não é considerada como integrante do problema, ela somente define o limite para a simulação de propagação para a configuração geométrica corrente.

A trajetória, ou superfície, de propagação é definida por duas superfícies coincidentes, as duas faces da fissura. Estas duas faces opostas apresentam a mesma

discretização. Portanto, há uma perfeita correspondência de elementos e pontos nodais. Para cada ponto nodal, a abertura da fissura é calculada a partir dos deslocamentos dos dois nós opostos. O que permite formular o problema de fraturamento coesivo com apenas uma malha de superfície, sendo as aberturas as variáveis primárias. O modelo coesivo associa um par de forças de superfície atuando em faces opostas com a correspondente abertura da fissura (COD).

Inicialmente, uma disposição inicial das zonas de fraturamento, especificando o comportamento das aberturas da fissura e das forças de superfície, é assumida (Figura 1). Os pontos nodais podem estar posicionados em diferentes zonas dependendo do estágio de propagação.

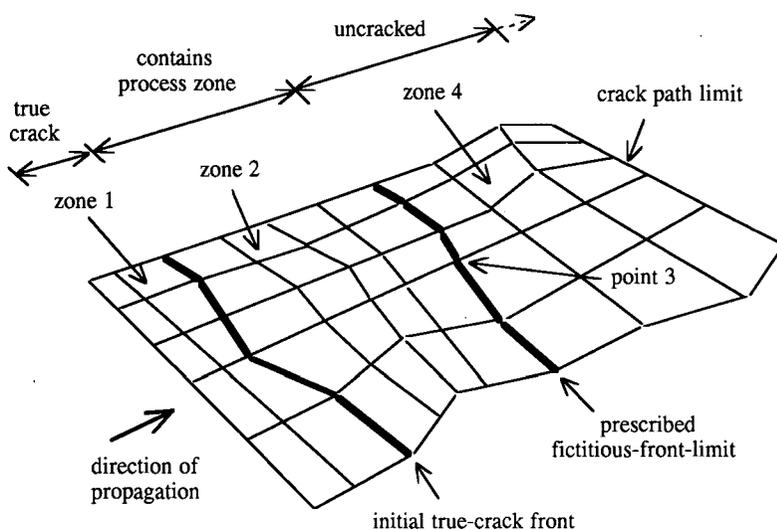


Figura 1. Disposição inicial das zonas de fraturamento sobre a trajetória pré-definida

A zona 1 define a região de fissura verdadeira ou inicial. Não há transferência de forças neste local, porém pode haver alguma força aplicada. As forças de superfície são prescritas enquanto as aberturas nodais são incógnitas e devem ser calculadas.

A zona 2 descreve a região onde ocorrem efeitos de relaxação (*softening*) e localização de deformação. Os pontos nodais que pertencem a esta zona podem migrar para outras zonas de comportamento dependendo da solução do problema (Figura 2). O modelo constitutivo associado a esta região fornece esta possibilidade (Figura 3). Os pontos nodais que permanecem na zona 2 são os que se encontram no trecho de relaxação. Os valores computados das aberturas de fissura e das forças de superfície fornecem uma indicação da posição da linha de frente fictícia, bem como da linha de frente verdadeira da fissura. A transferência de esforços entre as faces que definem a extensão fictícia da fissura é possível como na versão 2D do problema. As aberturas e as forças de superfície são incógnitas, mas o modelo constitutivo define uma relação entre elas (Figura 3). Convém observar que a fronteira entre as zonas 1 e 2 define a linha de frente verdadeira da fissura.

O limite da linha de frente fictícia (*fictitious-front-limit*) é uma curva definida pelo

usuário que estabelece um balizamento para expansão da zona de coesão. Esta curva é definida como uma coleção de pontos nodais sobre a malha de superfície. Os pontos (3) consistem em pontos nodais pertencentes à linha de frente fictícia limite onde a condição local de instabilidade é imposta. Nesta implementação, a condição local de instabilidade é definida pela força de superfície no ponto nodal, devendo esta ser igual à resistência de tração do material. A abertura da fissura no ponto 3 é estabelecida como nula.

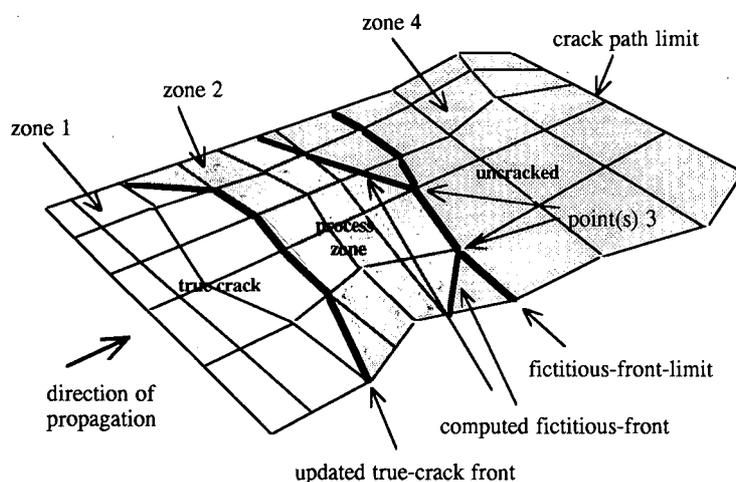


Figura 2. Disposição atualizada das zonas de fraturamento sobre a trajetória pré-definida

A zona 4 define a região ainda intacta e sujeita a comportamento elástico. Os pontos nodais dispostos além da linha de frente fictícia limite, juntamente com os pontos desta linha que não estejam na condição de instabilidade, pertencem a esta região. Não há abertura de fissura e a transferência de esforços ocorre em regime elástico. Conseqüentemente, as aberturas são conhecidas e nulas enquanto as forças de superfície elásticas são incógnitas.

O procedimento necessário para simular a evolução do processo de fraturamento é descrito na próxima seção. Para cada passo de propagação, a solução do passo anterior é utilizado para definir a disposição inicial das zonas de fraturamento.

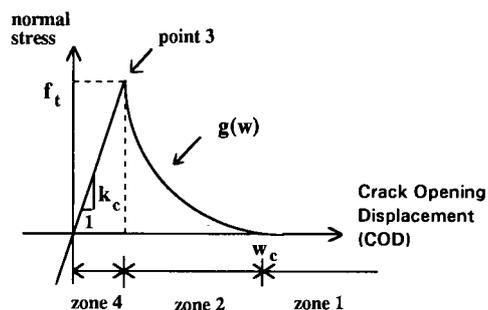


Figura 3. Modelo constitutivo para zonas de fraturamento. A função  $g(w)$  é arbitrária

## MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO COESIVA EM 3D

Em primeiro lugar, dada uma configuração inicial das zonas de fraturamento (Figura 1), um procedimento iterativo deve ser utilizado para se determinar os pontos nodais sobre a linha de frente fictícia limite que estão sujeitos à condição de instabilidade local (ponto 3). Um ponto nodal candidato é selecionado, e a solução do problema é então computada. Há necessidade, então, de se checar se a tensão de resistência de tração do material foi excedida em algum outro ponto nodal sobre a linha limite. Se este for o caso, a condição de instabilidade local deve ser imposta em um outro ponto nodal. O candidato é então substituído. O procedimento é repetido até que todos os nós sobre a linha de frente limite apresentem forças de superfície iguais ou inferiores à resistência de tração do material.

A zona de processos inelásticos, ou zona de coesão, pode tocar a linha de frente fictício limite nos pontos nodais onde a condição de instabilidade local é verificada. Esta condição é inicialmente imposta em uma única posição nodal (ponto 3). Entretanto, isto não significa que a condição de instabilidade pode ser verificada em uma posição nodal apenas. Os outros pontos nodais pertencentes à linha limite e à zona 4 podem eventualmente atingir esta condição, já que a condição de abertura é similar. Caso a força de superfície computada seja igual à resistência à tração do material, a condição de instabilidade também é verificada. Além disso, pontos pertencente à zona 2 podem atingir a condição de instabilidade aproximadamente (Figura 4).

Deve-se ressaltar que o modelo constitutivo (Figura 3) associado à zona 2 permite que a relaxação seja arbitrária. Além disso, diferentes trechos de resposta de abertura da fissura/força de superfície são possíveis. Quando um grande valor de  $k_c$  é introduzido, um comportamento elástico é obtido para pequenos valores de abertura. Nestas circunstâncias, a condição local de instabilidade pode ser alcançada de maneira aproximada, já que a abertura da fissura apresenta um resíduo. Pode-se ainda detectar um avanço da fissura verdadeira quando a abertura excede o valor  $w_c$ . A solução do problema deve determinar o comportamento de cada ponto nodal que define a malha de superfície quando submetidos às condições impostas para a evolução da zona de coesão. A disposição inicial das zonas de fraturamento é apenas uma tentativa inicial.

Uma estratégia para simular a propagação da fissura coesiva em 3D é apresentada a seguir (Figura 4). A linha de frente fictício limite é definida pelo usuário. Esta linha pode ser movida ao longo da simulação. Consequentemente, é possível se obter um estado de equilíbrio para cada linha de frente limite pré-determinada. O processo iterativo, descrito anteriormente, é inicializado para se determinar em qual dos pontos nodais pertencentes à linha de frente limite a condição de instabilidade local deve ser imposta de tal forma que os outros pontos permaneçam em regime elástico. Cada uma destas iterações envolve a solução de um sistema de equações que descreve o problema de fraturamento coesivo para certas condições de contorno em termos de aberturas e forças de superfície. A solução deste sistema é descrito na seção seguinte. A descrição da fissura verdadeira é atualizada movendo-se a zona 1 sobre a zona 2 quando as aberturas de fissura excedem ao valor  $w_c$ , característico do material (Figura 3). A descrição da zona 4 também é atualizada. Os pontos nodais pertencentes à zona 2 que apresentam resposta elástica são transferidos para zona 4, e a solução para o determinado passo de

propagação é repetida. O procedimento para solução do passo corrente estará completo assim que nenhuma nova transferência for necessária. O algoritmo prossegue então para o próximo passo de propagação, definido por uma nova linha de frente fictício limite. A solução do passo anterior é utilizada como a disposição inicial necessária para o passo atual (Figura 4).

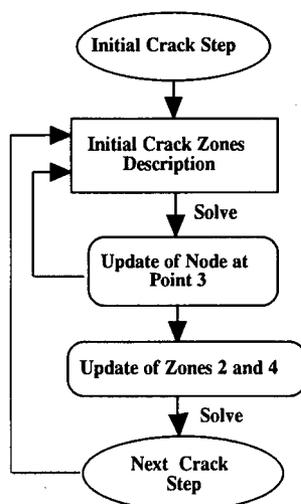


Figura 4. Algoritmo para avanço do processo de fraturamento

## FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

Para a malha de superfície (Figura 1), a equação de influência para as aberturas ( $w$ ) da fissura (*crack opening displacements* - COD) pode ser expressa por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Omega}\mathbf{p} + \mathbf{h}F + \bar{\mathbf{w}} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{\Omega}$  é a matriz de influência para cada força de superfície da fissura,  $\mathbf{p}$  é o vetor de forças de superfície,  $\mathbf{h}$  é o vetor de influência dos carregamentos aplicados,  $F$  é o fator de carregamento, e  $\bar{\mathbf{w}}$  a abertura da fissura devido às tensões de confinamento ou residuais.

As matrizes de influência incorporam a definição geométrica do problema. Qualquer resposta estrutural pode ser avaliada com o uso das matrizes de influência, desde que  $\mathbf{p}$  e  $F$  sejam conhecidos. Por exemplo, um deslocamento arbitrário  $d$  pode ser calculado como:

$$d = \mathbf{D} \bullet \mathbf{p} + d_F F \quad (2)$$

onde  $\mathbf{D}$  é o vetor de influência das forças de superfície na fissura para a resposta desejada, enquanto  $d_F$  é a influência dos carregamentos externos aplicados.

A equação (1) pode ser reescrita considerando as zonas de comportamento mostradas na Figura 1

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ w_3 \\ \mathbf{w}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \{\Omega_{13}\} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \{\Omega_{23}\} & \Omega_{24} \\ \langle \Omega_{31} \rangle & \langle \Omega_{32} \rangle & \Omega_{33} & \langle \Omega_{34} \rangle \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & \{\Omega_{43}\} & \Omega_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ p_3 \\ \mathbf{p}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ h_3 \\ \mathbf{h}_4 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \bar{\mathbf{w}}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{\mathbf{w}}_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

onde as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \text{zona 1 : } \mathbf{p}_1 &= \bar{\mathbf{p}} \\ \text{zona 2 : } \mathbf{p}_2 &= \sigma(\mathbf{w}_2) \\ \text{zona 3 : } p_3 &= f_t \text{ e } w_3 = 0 \\ \text{zona 4 : } \mathbf{w}_4 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Os parênteses < > significam um vetor linha, e  $\sigma$  é uma função definida pelo modelo constitutivo. A equação (3) pode ser reorganizada movendo-se as incógnitas para o lado esquerdo e as variáveis conhecidas para o lado direito da equação.

$$\mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\{\mathbf{h}_1\} & -\Omega_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\{\mathbf{h}_2\} & -\Omega_{24} \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & -h_3 & -\Omega_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\{\mathbf{h}_4\} & -\Omega_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ F \\ \mathbf{p}_4 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \Omega_{11}\bar{\mathbf{p}} + \Omega_{12}\sigma(\mathbf{w}_2) + \{\Omega_{13}\}f_t + \{\bar{\mathbf{w}}_1\} \\ \Omega_{21}\bar{\mathbf{p}} + \Omega_{22}\sigma(\mathbf{w}_2) + \{\Omega_{23}\}f_t + \{\bar{\mathbf{w}}_2\} \\ \langle \Omega_{31} \rangle \bar{\mathbf{p}} + \langle \Omega_{32} \rangle \sigma(\mathbf{w}_2) + \{\Omega_{33}\}f_t + \{\bar{w}_3\} \\ \Omega_{41}\bar{\mathbf{p}} + \Omega_{42}\sigma(\mathbf{w}_2) + \{\Omega_{43}\}f_t + \{\bar{\mathbf{w}}_4\} \end{Bmatrix}$$

e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade.

A solução do sistema não linear (5) fornece as aberturas de fissuras ocasionadas, as forças de superfície e o fator de carregamento associado à presente configuração do problema.

### SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A solução do sistema (5) pode ser obtida através de um método iterativo. O método de solução de Newton-Raphson é usado aqui. Um vetor  $\mathbf{g}$  que define o resíduo da solução é introduzido

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \mathbf{u}$ .

Se o método de Newton-Raphson original for utilizado, o incremento da solução do sistema (5) é dado por

$$\Delta \mathbf{u}^i = - \left[ \mathbf{C} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}^{i-1}}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{i-1}) \quad (8)$$

O método de Newton-Raphson modificado também pode ser empregado. Neste caso o incremento da solução é dado por

$$\Delta \mathbf{u}^i = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{i-1}) \quad (9)$$

Ambos os métodos estão disponíveis no CoCrack-3D.

### EXEMPLO DE APLICAÇÃO – CORPO DE PROVA SEN(B)

Neste exemplo o problema da viga descrito em Sousa<sup>7</sup> é analisado mais detalhadamente.

Sabe-se pela literatura<sup>2</sup> que, para pequenas dimensões absolutas, o colapso pode ser atribuído a um fraturamento dúctil com a ocorrência de relaxação na resposta (*snap-through*) carga-deslocamento. Os tamanhos das zonas de processos inelásticos são significativos neste caso. Por outro lado, quando as dimensões absolutas da viga são aumentadas, ocorre transição para fraturamento frágil e, eventualmente, respostas tipo *snap-back* localizadas podem ser detectadas. Esta transição dos regimes de fraturamento é também uma característica do efeito de escala. O objetivo aqui é demonstrar que o método para fraturamento coesivo tridimensional pode também simular o efeito de escala no problema da viga.

Dois tamanhos de viga foram utilizados nesta análise:  $H = 50$  mm e  $H = 100$  mm. Um aspecto importante deste problema é que a espessura das duas vigas foi mantida constante (10 mm) na definição 2D original do problema e nos dois modelos 3D.

A solução do método de influência 2D foi empregada visando comparar os resultados<sup>2</sup>. No modelamento 3D, foi permitido que a fissura se propagasse no plano vertical no centro da viga. As respostas em termos de carga-deslocamento previstas pelos métodos 2D e 3D foram muito próximas uma da outra (Figura 5). As aberturas e cargas máximas previstas através do método 3D foram um pouco menores. No entanto, a forma geral do gráfico de carga-deslocamento se preservou, indicando o mesmo *snap-back* para  $H = 100$  mm.

A pequena discrepância das aberturas e das cargas máximas pode ser atribuída aos efeitos tridimensionais através da espessura, que não são detectados com a solução 2D. Para a particular geometria de viga, na qual a espessura é muito pequena quando comparada às outras dimensões, estes efeitos 3D são pequenos. Isto pode explicar porque a solução 2D, mesmo não conseguindo captar os efeitos da espessura, prevê resultados próximos daqueles previstos pela solução 3D. Ressalta-se que na solução 2D utilizou-se uma malha refinada (~60 elementos ao longo do comprimento da fissura), enquanto a malha 3D possuía 4 elementos através da espessura e 16 ao longo do comprimento da fissura.

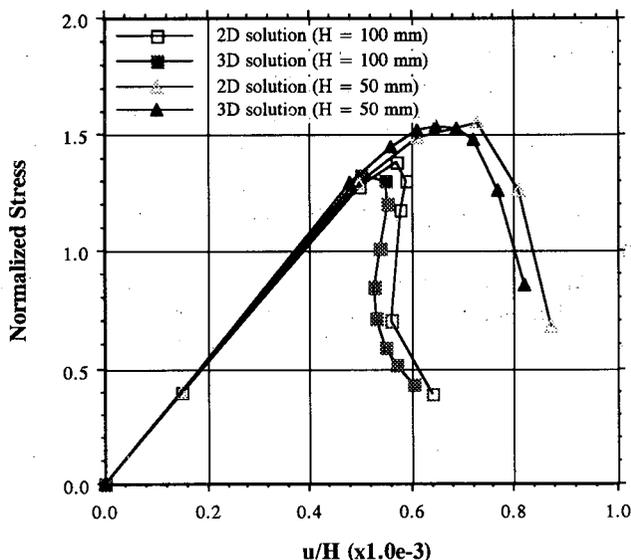


Figura 5. Comparação entre as soluções 2D e 3D do problema da viga (Sousa 1993).  
Espessura = 10 mm

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, um método de modelamento 3D de propagação de fissuras coesivas foi apresentado e discutido. A formulação matricial do problema foi detalhada. Tal formulação resulta em um sistema de equações não-lineares que pode ser resolvido com o método de Newton-Raphson. O método de modelamento se mostrou capaz de simular a propagação tanto da fissura verdadeira como da zona de processos inelásticos para diferentes geometrias.

Os conceitos deste método 3D foram implementados em um programa computacional chamado CoCrack-3D. Este código foi escrito utilizando-se conceitos de orientação para objetos; permitindo, pois, que se estenda facilmente o código para situações mais complexas.

Para ilustrar o uso deste novo método, a viga apresentada em Sousa<sup>7</sup> foi analisada através do método 3D, e a comparação entre as soluções 2D e 3D foi apresentada. Os resultados mostraram uma concordância satisfatória.

## REFERÊNCIAS

1. Z.P. Bazant, "Should design codes consider fracture mechanics size effects," *Concrete Design Based on Fracture Mechanics*, ACI SP-134, pp. 1-23, (1992).
2. T.N. Bittencourt, "Computer Simulation of Linear and Nonlinear Crack Propagation in Cementitious Materials", Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY, (1993).
3. A. Carpinteri, "Size-scale effects on the brittleness of concrete structures: dimensional analysis and snap-back instability", *Fracture Mechanics: Application to Concrete*, ACI SP-118, pp. 197-235, (1989).

4. A. Hillerborg, M. Modeer and P.E. Petersson, "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, (1976).
5. H. Mihashi, "A stochastic theory for fracture of concrete", *Fracture Mechanics of Concrete*, Ch.4.3, ed. by F.W. Wittmann, Elsevier, Amsterdam, NY, pp. 301-339, (1983).
6. P.E. Petersson, "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", Report TVBM-1006/1-174, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, (1981).
7. J.L.A.O. Sousa, T.N. Bittencourt, L.F. Martha and A.R. Ingraffea, "Aspectos de Modelagem Geométrica em Simulação Tridimensional de Propagação de Fraturas em Materiais Frágeis", XIV CILAMCE, São Paulo, (1993).