Introducción a los grupos de Lie y su relación con la solución de las ecuaciones diferenciales

Antonio Lechuga Álvaro, Dr.Ing. de Caminos, Canales y Puertos, Académico correspondiente de la RAMZ.

Resumen

El procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante los llamados grupos de Lie se basa en la geometría diferencial y su alcance notable, una vez que se dominan las técnicas elementales en esta disciplina. La resolución de algunos ejemplos nos ayudarán en este cometido.

1. Introducción

Sophus Lie, siguiendo a Evariste Galois concibió una clase de grupos de transformaciones, ahora llamados grupos de Lie con el propósito de resolver ecuaciones diferenciales del mismo modo que los grupos de Galois resuelven las ecuaciones algebraicas.

2. Scalling

Empezaremos con la transformación llamada "scalling" en el plano.
Las coordenadas antiguas son, x e y, y las nuevas, X e Y.Tendremos:

$X = e^a.x \quad Y = e^a.y$

Es fácil de demostrar que las transformaciones X e Y forman grupo. Ahora bien si el parámetro ,a, es infinitesimal tendremos,
$\xi(x) = \dfrac{\partial X}{\partial a} \; para \; a = 0$
Del mismo modo,
$\eta(y) = \dfrac{\partial Y}{\partial a} \; para \; a = 0$
Y la transformación infinitesimal se puede representar como,
$U = \xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\dfrac{\partial}{\partial y}$
En nuestra transformación (scalling) la correspondiente transformación infinitesimal se escribe,

$$U = x.\frac{\partial}{\partial x} + y.\frac{\partial}{\partial y}$$

Tratemos de resolver este problema: Encontrar la curva tal que el radio vector desde el origen a un punto, la tangente en dicho punto y el eje de abscisas m forman un triángulo isósceles.
Como vemos, este problema es idéntico cualquiera que sea la escala del dibujo, por tanto la transformación es la indicada.
La ecuación diferencial se escribe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Si llamamos,
$p = \dfrac{dy}{dx}$
$y, f \equiv p(x^2 - y^2) - 2xy = 0$
tendremos que se cumple,
$Uf = 2f = 0$
Lo que demuestra que f es invariante anta U.Para resolver la ecuación diferencial,
pasamos a variables canónicas obtenidas mediante U. La ecuación característica de U es,
$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$
El primer invariante es, por tanto R
$R = \dfrac{y}{x}$
La segunda coordenada canónica se obtiene mediante,
$US(x) = 1$, $y, S = ln(x)$

Con esto tendremos,

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{px - y}{x^2}} = \frac{1}{p - R} = \frac{1 - R^2}{R(1 + R^2)}$$

Con lo cual S se resuelve mediante una cuadratura. Tendremos,
$S = ln\dfrac{R}{1 + R^2}$
Finalmente obtenemos,

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{C}$$

Este es el caso cuando los lados iguales son la tangente y la abscisa x.
Si los lados iguales fueran el radio vector y la abscisa el procedimiento es el mismo
pero la solución es,
$y^2 = c^2 - 2cx$

3. Grupo de un parámetro con prolongación

Resolver la ecuación diferencial,

$$\frac{d}{dx}(\frac{xdy}{ydx}) + 2xy = 0$$

En este caso la transformación infinitesimal es la siguiente,

$$U = x.\frac{\partial}{\partial x} - 2y.\frac{\partial}{\partial y}$$

Y la primera prolongación,

$$U^{'} = x.\frac{\partial}{\partial x} - 2y.\frac{\partial}{\partial y} - 3y^{'}\frac{\partial}{\partial y^{'}}$$

Haciendo los cambios,

$$X = x^2 y \quad Y = x^3\frac{dy}{dx}$$

que son invariantes ante la transformación infinitesimal obtenemos,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3x^3y^{'} + x^4y^{''}}{2x^2y + x^3y^{'}} = \frac{3Y + x^4y^{''}}{2X + Y}$$

de donde,

$$x^2y^{''} = (2X + Y)\frac{dY}{dX} - 3Y$$

y la ecuación inicial en las nuevas variables se escribe,

$$(2X + Y)\frac{dY}{dX} = 2Y + \frac{Y^2}{X} - 2X^2$$

La solución de esta ecuación de primer orden es,

$$Y = X\sqrt{C - 4X} - 2X$$

Expresando esta solución en las variables primitivas tenemos,

$$x\frac{dy}{dx} = y\sqrt{C - 4x^2y - 2y}$$

que a su vez es una ecuación diferencial de primer orden cuya transformación infinitesimal es,

$$U = x.\frac{\partial}{\partial x} - 2y.\frac{\partial}{\partial y}$$

Las variables canónicas en este caso son,

$$x_1 = \ln x$$
$$y_1 = x^2 y$$

Su solución en estas variables es,

$$x_1 + C_1 = \int \frac{dy_1}{y_1\sqrt{C - 4y_1}}$$

Finalmente la solución en las variables primitivas es,

$$C_1 x^C = \frac{\sqrt{C^2 - 4x^2 y} - C}{\sqrt{C^2 - 4x^2 y} + C}$$

4, Conclusión

Cualquier ecuación diferencial puede resolverse con este procedimiento de Sophus Lie, tanto si es ordinaria como las que hemos considerado, como en derivadas parciales. Solo hay que encontrar la transformación de Lie correspondiente. En general esta transformación se puede obtener con la ayuda de la geometría.

5.Referencias

(1) Cohen, A.,An introduction to the Lie theory of one parameter groups. Heath and Co. Publishers N.Y.1911

(2) Olver, P.J., Application of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag,1986

(3) Czichowski, G., Lie Theory of Differential Equations and Computer Algebra. Seminar Sophus Lie, 1991

(4) Lechuga, A., parabolic trajectories and Lie contact transformations Scipedia, 2019