Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11,**3**, 345–381(1995)

UN MARCO MATEMÁTICO PARA LA CONSOLIDACIÓN ELASTOPLÁSTICA CON DEFORMACIONES FINITAS

RONALDO I. BORJA*
y
ENRIQUE ALARCÓN**

**Department of Civil Engineering*
Stanford University
Stanford, CA 94305, USA

** *Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales*
Universidad Politécnica de Madrid
José Gutiérrez Abascal, 2
28006, Madrid, Spain

RESUMEN

Se presenta una formulación matemática para los fenómenos acoplados de deformación del suelo y difusión, la llamada consolidación, que incluye los efectos de respuesta elastoplástica del suelo y deformaciones finitas. Se obtienen las ecuaciones variacionales del problema de contorno tanto en sus casos no lineal como linealizado de forma que puedan incorporarse directamente a programas de elementos finitos. El tratamiento algorítmico de la elastoplasticidad con deformaciones finitas para la fase sólida está basado en una descomposición multiplicativa y se acopla con el algoritmo de flujo del fluido a través de la presión neutra de Kirchhoff. Las ecuaciones de la cantidad de movimiento y conservación de la masa se escriben tanto para la fase sólida como para la fluida siguiendo el movimiento de la matriz sólida, combinándolas a continuación mediante la teoría general de mezclas. Puesto que la masa del fluido no tiene que conservarse en la región definida por la matriz sólida, se permite también que la densidad saturada de la mezcla suelo–agua varíe con la deformación del suelo a través del Jacobiano.

SUMMARY

A mathematical formulation for the coupled phenomena of soil deformation and diffusion, known as consolidation, is presented. This includes the effects of the elastoplastic behavior of the soil and the finite deformations. The variational equations of the boundary problem are obtained for the nonlinear case, as well as for the linearized form, which can be incorporated directly in finite element programs. The treatment of elastoplasticity with finite deformations of the solid phase is based on a multiplicative decomposition and is coupled with an algorithm of fluid flow through the neutral pressure of Kirchhoff. The equations for the quantity of flow and the conservation of mass are written for both, the solid phase and the fluid, following the

Recibido: Mayo 1994

 ISSN 0213–1315

movement for the solid matrix, combining them through the general theory of mixtures. Since the fluid mass is not conserved in the region defined by the solid matrix, the saturated density of the soil-water mixture is permitted to vary with the soil deformation through the Jacobian.

INTRODUCCIÓN

La respuesta no lineal de estructuras geotécnicas suele deberse a la plastificación y las deformaciones finitas del esqueleto del suelo. Hay muchas aplicaciones geotécnicas clásicas donde los efectos no lineales debidos a esos dos factores pueden alterar en forma crítica los resultados de análisis numéricos. Como ejemplos se pueden citar los grandes movimientos de taludes y la inclinación de torres debida al efecto $P - \delta$. El impacto de las deformaciones finitas y la respuesta elastoplástica es muy evidente en arcillas blandas donde con el tiempo se desarrollan movimientos debido al llamado retraso hidrodinámico o consolidación, entre otras factores. Por desgracia los modelos matemáticos de la consolidación con deformaciones finitas y comportamiento elastoplástico no están lo suficientemente desarrollados para que puedan usarse de forma rutinaria en prototipos de estructuras geotécnicas.

En los casos de consolidación con deformaciones infinitesimales la estructura matemática y los métodos numéricos están bien desarrollados y documentados[1–13] tanto para el caso elástico como el elastoplástico. El procedimiento general consiste en el establecimiento de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y la conservación de la masa en términos del desplazamiento del suelo y el potencial (o presión neutra de poros) en el fluido, tras lo que se resuelven simultáneamente mediante una formulación mixta bicampo. La hipótesis de deformaciones infinitesimales simplifica la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, puesto que produce una descomposición aditiva de las deformaciones elásticas y plásticas. En el contexto del estudio con elementos finitos la hipótesis infinitesimal simplifica también la ecuación de conservación de la masa, puesto que el cambio de volumen de la mezcla resulta una combinación lineal de los desplazamientos nodales de la fase sólida.

La ampliación a deformaciones finitas de la formulación infinitesimal de las ecuaciones clásicas de la consolidación se basa principalmente en el uso de leyes de comportamiento incrementales[9,10,14]. Además de la limitación a pequeñas deformaciones elásticas impuesta por esta formulación hipoelástica, con ella se embrolla la definición adecuada de "gradientes medios" y "cambios medios de volumen" necesarios para imponer la ecuación de conservación de la masa a incrementos finitos. Con ello los términos de segundo orden en la prolongación hipoelástica se desprecian, particularmente en la ecuación de conservación de la masa, lo que produce una degradación de la precisión cuando el incremento de carga es grande.

Una formulación alternativa para la elastoplasticidad con deformaciones finitas es la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación[15,16]. Este método elimina por completo la "cuestión incremental" en el análisis con deformaciones finitas[17,23] y permite el desarrollo de grandes deformaciones elásticas. En particular, una teoría más reciente[24,25] indica que la técnica de descomposición multiplicativa puede explotarse hasta tal punto que el algoritmo resultante hereda todas la características de los modelos clásicos de plasticidad infinitesimal.

La adecuación de la técnica de descomposición multiplicativa a los sólidos puede justificarse en la naturaleza particulada del material en forma semejante a lo que sucede con los metales debido a su microestructura cristalina[26–28]. Desde un punto de vista microestructural, las deformaciones plásticas en los suelos surgen por el deslizamiento, aplastamiento, cedencia e, incluso para partículas arcillosas aciculares, por flexión plástica de los gránulos que forman el conjunto[29]. Aunque puede argumentarse que las deformaciones en los suelos son predominantemente plásticas, pueden producirse deformaciones reversibles debidas a la elasticidad de las partículas que son grandes si las partículas se acodalan debido a una alta densidad inicial del conjunto. La descomposición multiplicativa del gradiente de la deformación suministra un procedimiento para describir matemáticamente las relaciones entre la configuración de referencia, la configuración actual y la configuración intermedia, descargada y sin tensiones, de una porción de suelo sometida a deformación finita en sentido macroscópico.

La coacción sobre el volumen impuesta por el flujo del fluido es otro tema recurrente en la literatura sobre el análisis de deformación por consolidación. En la formulación presentada en este artículo los puntos clave son el papel jugado por el Jacobiano[30,31] y la adecuada caracterización del flujo fluido. Para describir este último se emplea la teoría de mezclas[32–38] contemplando la mezcla de suelo y agua como un continuo bifásico. Sin embargo, en contraste con planteamientos previos se opta por seguir tan sólo el movimiento de la fase sólida y escribir la ley de Darcy generalizada en formulación *espacial* y en función del movimiento relativo del fluido respecto al sólido[39–41]. Si se puede o no escribir la ley de Darcy generalizada en términos "espaciales", cuando el movimiento de la fase sólida es finito, es un tema que precisa más experimentación lo que, por otra parte, sucede con la mayoría de las leyes de comportamiento incremental de los suelos. Sin embargo, la descripción espacial de la ley de Darcy generalizada suministra una ley de comportamiento fluido completa. Además el uso del movimiento relativo del fluido hace que su movimiento intrínseco se deduzca en forma natural de la formulación matemática.

Finalmente, se desarrollan formas variacionales del problema de contorno y se deducen las expresiones linealizadas de las ecuaciones más importantes del continuo. Las expresiones variacionales del problema de contorno sirven para la implementación mediante elementos finitos de la teoría de la consolidación no lineal, mientras que la linealización suministra el nexo entre las teorías lineal y no lineal, siendo además un paso crucial en la derivación de expresiones explícitas para el *operador tangente consistente* que se usa en el análisis no lineal con elementos finitos[4–6].

La presentación de temas se realiza por capítulos en este orden: las leyes de conservación, las ecuaciones variacionales y la linealización. En cuanto a notación y símbolos las negritas se usan para matrices y vectores, el punto "$\cdot$" indica producto interno de dos vectores (vg.: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i$) o contracción de dos índices adyacentes en dos tensores (vg.: $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = c_{ij}d_{jk}$); los dos puntos indican producto interno de dos tensores de segundo orden (vg.: $\mathbf{c}:\mathbf{d} = c_{ij}d_{ij}$) o contracción doble de los índices adyacentes en tensores de rango dos o superior (vg.: $\mathbf{D}:\mathbf{C} = D_{IJKL}C_{KL}$); los subíndices en mayúsculas indican coordenadas materiales y los subíndices en minúsculas se refieren a coordenadas espaciales.

Ecuaciones de equilibrio

En este apartado se presentan los principios de equilibrio que gobiernan la interacción entre las partes sólida y fluida de la mezcla saturada bifásica suelo–agua. Para la obtención de las leyes de equilibrio se considera por separado el movimiento de las fases sólida y fluida. Tras ello se usa la teoría de mezclas[32–38] para combinar las ecuaciones de campo escogiendo como movimiento de referencia el intrínseco de la fase sólida respecto a la cual se describirá el del fluido.

Conservación de la cantidad de movimiento

Sea $\phi_t: \mathcal{B} \rightarrow R^{n_{sd}}$ el movimiento o conjunto de configuraciones de una porción simple de suelo saturado de agua $\mathcal{B} \subset R^{n_{sd}}$ y sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto con contorno C^1 a trozos tal que $U \subset \mathcal{B}$. Además, sean $\boldsymbol{\sigma}^s$ y $\boldsymbol{\sigma}^w$ los tensores tensión parciales de Cauchy[32–38] originados respectivamente en las tensiones intergranular y fluida y llámese $\mathbf{n}$ al vector unitario normal a la superficie $\partial\phi_t(\mathcal{U})$ de la región deformada $\phi_t(\mathcal{U})$. El tensor total de Cauchy $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ se obtiene de la suma

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^w \tag{1}$$

Para la fase sólida la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas inerciales y fuentes debidas a reacciones químicas con el fluido toma la forma

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_s(1-\varphi)\mathbf{g}dv + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{h}^s dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n} da = \mathbf{0} \tag{2a}$$

con la siguiente expresión local

$$\rho_s(1-\varphi)\mathbf{g} + \mathbf{h}^s + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{0} \tag{2b}$$

donde ρ_s es la densidad de las partículas sólidas, φ la porosidad del suelo (definida como el índice macroscópico del volumen de huecos al volumen total de la mezcla suelo–agua, $\mathbf{g}$ es el vector de aceleración de la gravedad, $\mathbf{h}^s$ es una fuerza de volumen representativa de las fuerzas de filtración por unidad de volumen transferida a la fase sólida por los efectos de difusión y "div" es el operador divergencia en la descripción espacial.

Para la fase fluida la conservación de la cantidad de movimiento se expresa mediante una ecuación semejante

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w\varphi\mathbf{g}dv + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{h}^w dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma}^w \cdot \mathbf{n} da = \mathbf{0} \tag{3a}$$

con la siguiente expresión local

$$\rho_w\varphi\mathbf{g} + \mathbf{h}^w + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^w = \mathbf{0} \tag{3b}$$

donde ρ_w es la densidad de la fase fluida y $\mathbf{h}^w$ es la fuerza de filtración por unidad de volumen ejercida por la matriz sólida sobre la fase fluida. Obsérvese que, puesto que

$\mathbf{h}^s$ y $\mathbf{h}^w$ son fuerzas internas que no afectan la mezcla conjunta suelo–agua, se tiene $\mathbf{h}^s + \mathbf{h}^w = \mathbf{0}$. En consecuencia al sumar (2a) y (3a) se tiene

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \mathbf{g} dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} da = \mathbf{0} \tag{4a}$$

con la expresión local

$$\rho \mathbf{g} + \mathrm{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \tag{4b}$$

donde

$$\rho = \rho_s(1-\varphi) + \rho_w \varphi \tag{5}$$

es la densidad de la mezcla suelo–agua.

Sean ahora $\mathbf{P}^w$ y $\mathbf{P}^s$ los tensores Piola–Kirchhoff de tensión parciales en el agua y contactos intergranulares respectivamente. Sea también $\mathbf{N}$ el vector unitario normal a la superficie $\partial\mathcal{U}$ de la región no deformada $\mathcal{U}$. El tensor $\mathbf{P}^w$ se define de forma que $\mathbf{P}^w \cdot \mathbf{N}$ representa la fuerza resultante ejercida por el fluido por unidad de superficie de la *matriz sólida* en la configuración no deformada; de la misma forma el producto $\mathbf{P}^s \cdot \mathbf{N}$ es la fuerza resultante neta ejercida por los gránulos individuales (que pueden incluir efectos parciales de presión fluida) sobre la misma superficie de referencia indeformada. Por efecto de la descomposición aditiva de los tensores parciales de Cauchy se obtiene una expresión similar para el tensor total de Piola–Kirchhoff $\tilde{\mathbf{P}}$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^s + \mathbf{P}^w \tag{6}$$

donde $\mathbf{P}^s$ y $\mathbf{P}^w$ son los primeros tensores parciales de Piola–Kirchhoff originados en las fases sólida y fluida respectivamente.

Una descomposición más habitual del tensor $\tilde{\mathbf{P}}$ se basa en el uso de las llamadas tensiones efectivas y toma la forma

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \frac{\mathbf{P}^w}{\varphi} \tag{7}$$

donde $\mathbf{P}$ es el primer tensor efectivo de Piola–Kirchhoff y $\mathbf{P}^w/\varphi$ es un tensor no simétrico definido de modo que $(\mathbf{P}^w/\varphi) \cdot \mathbf{N}$ represente la fuerza resultante ejercida por el fluido sobre la unidad de área de huecos en la configuración indeformada. Obsérvese que el tensor de tensión efectiva $\mathbf{P}$ y el tensor parcial de tensiones $\mathbf{P}^s$ no son el mismo, sino que están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{P}^s = \mathbf{P} + \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right) \mathbf{P}^w \tag{8}$$

La ecuación (7) proviene de la ecuación de tensiones efectivas de Terzaghi[42] que es clave en numerosos problemas en mecánica de suelo.

Se puede desarrollar una ecuación semejante a la (4a) en función del tensor $\tilde{\mathbf{P}}$.

Usando la configuración indeformada, (4) puede escribirse como

$$\int_{\mathcal{U}} \rho_0 \mathbf{G} dV + \int_{\partial \mathcal{U}} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} dA = \mathbf{0} \tag{9}$$

donde $\mathbf{G} \equiv \mathbf{g}$ es el vector de aceleraciones de la gravedad asociado con la configuración indeformada y ρ_0 es una aplicación regresiva (*pull–back)* de densidad de la mezcla suelo–agua obtenida mediante

$$\rho_0 = J\rho; \quad J = \det(\mathbf{F}); \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}; \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \tag{10}$$

donde J es el Jacobiano, $\mathbf{F}$ el gradiente de la deformación, $\boldsymbol{\phi}$ las coordenadas del movimiento, $\mathbf{X}$ las coordenadas de un punto X en la configuración indeformada y $\mathbf{u}$ es el desplazamiento macroscópico de la fase sólida.

Las definiciones anteriores se basan en las ecuaciones de transformación asociadas con el desplazamiento $\mathbf{u}$ de la fase sólida. En consecuencia el fluido que llena los huecos en el punto $\phi(X,t)$ puede no ser el mismo que los ocupaba en la referencia $\phi(X,0)$ de la región indeformada $\mathcal{U}$. Matemáticamente $\phi_t(\mathcal{U}) = \phi_t^w(\mathcal{U}^w)$, donde ϕ_t^w es la configuración de la fase fluida derivada de su propio movimiento que ahora coincide con ϕ_t, y $(\mathcal{U}^w) = \phi_{t=0}^w$ es la región originalmente ocupada por el fluido que ahora se encuentra en ϕ_t y que puede incluso no estar en $\mathcal{B}$. En otras palabras, la masa total de la mezcla de suelo–agua en $\mathcal{B}$ no tiene que conservarse en $\phi_t(\mathcal{B})$.

Para comprender mejor las implicaciones de los efectos de la difusión en las densidades, considérese el siguiente análisis de las relaciones de fases. Sea $\varphi_0 = \varphi_0(X, t=0)$ la porosidad inicial del punto X en $\mathcal{B}$. El volumen inicial de huecos en un volumen elemental dV es $\varphi_0 dV$, mientras que el volumen de sólidos es $(1-\varphi_0)dV$. Conforme se deforma la matriz sólida, su volumen cambia a $dv = JdV$. Supóngase ahora que la fase sólida es incompresible. Puesto que $\mathbf{u}$ es el desplazamiento de la fase sólida, su volumen conserva en el valor $(1-\varphi_0)dV$ en dV, mientras que el volumen de huecos cambia a $dv - (1-\varphi_0)dV$, por lo que la porosidad varía según

$$\varphi = \frac{JdV - (1-\varphi_0)dV}{JdV} = 1 - (1-\varphi_0)J^{-1} \tag{11}$$

Es decir, tanto la densidad como la porosidad del suelo varían con la deformación según el Jacobiano J.

La expresión local de (9) produce el siguiente planteamiento parcial del problema de contorno: obtener el movimiento $\phi_t: \mathcal{B} \rightarrow R^{n_{sd}}$ tal que

$$\mathrm{DIV}\tilde{\mathbf{P}} + \rho_0 \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{12}$$

sometido a las siguientes condiciones de contorno: el movimiento ϕ está obligado a ser igual a ϕ_d en la parte $\partial\mathcal{B}^d$ del contorno $\partial\mathcal{B}$ y el vector tensión $\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}$ se prescribe en el resto $\partial\mathcal{B}^t$; además debe cumplirse la conservación de la masa. En (12) DIV es el operador divergencia en la descripción material.

Conservación de la masa

Sean m_s y m_w las masas totales de sólido y fluido respectivamente en una configuración deformada arbitraria $\phi_t(\mathcal{U})$. En función de las densidades esas masas se obtienen mediante las siguientes integrales de volumen

$$m_s = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_s(1-\varphi)dv, \quad m_w = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w \varphi dv \tag{13}$$

Por la ley de conservación la derivada material respecto al tiempo de estas masas se anula individualmente. Para la fase sólida se tiene

$$\frac{d(m_s)}{dt} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left\{ \frac{\partial[\rho_s(1-\varphi)]}{\partial t} + \mathrm{div}[\rho_s(1-\varphi)\mathbf{v}] \right\} dv = 0 \tag{14a}$$

con la localización

$$\frac{\partial[\rho_s(1-\varphi)]}{\partial t} + \mathrm{div}[\rho_s(1-\varphi)\mathbf{v}] = 0 \tag{14b}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad intrínseca de la fase sólida. Para la fase fluida se tienen igualmente

$$\frac{d(m_w)}{dt} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left\{ \frac{\partial(\rho_w\varphi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_w\varphi\mathbf{v}^w) \right\} dv = 0 \tag{15a}$$

con la localización

$$\frac{\partial(\rho_w\varphi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_w\varphi\mathbf{v}^w) = 0 \tag{15b}$$

donde $\mathbf{v}^w$ es la velocidad intrínseca de la fase fluida.

La conservación de la masa para la mezcla suelo–agua puede obtenerse directamente a partir de (14) y (15). Por ejemplo, sumando (14b) y (15b), se tiene

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) = 0 \tag{16}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad media volumétrica de la mezcla, es decir

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\rho_s(1-\varphi)\mathbf{v} + \rho_w\varphi\mathbf{v}^w}{\rho} \tag{17}$$

Cuando las fases sólida y fluida sigan el mismo movimiento, se tiene $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^w = \mathbf{v}$ y la mezcla suelo–agua tiene un flujo monofásico. Es el tipo que prevalece en condiciones de carga sin drenaje.

Para uso futuro es conveniente definir una velocidad superficial o de Darcy mediante

$$\tilde{\mathbf{v}} = \varphi(\mathbf{v}^w - \mathbf{v}) \tag{18}$$

El vector $\tilde{\mathbf{v}}$ representa el ratio volumétrico del flujo por unidad de área de la masa de suelo deformándose.

En lo que resta se supondrá que tanto la fase fluida como la sólida son incompresibles. En estas condiciones ρ_s y ρ_w pueden sacarse de la derivada parcial y eliminarse de (14a) y (15a). La suma de las expresiones resultantes conduce a

$$\operatorname{div}[(1-\varphi)\mathbf{v}] + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}^w) = 0 \tag{19}$$

Puesto que según (18) $\varphi \mathbf{v}^w = \tilde{\mathbf{v}} + \varphi \mathbf{v}$, se obtiene el siguiente problema de contorno complementario a (12): obtener el potencial Π en $\phi_t(\mathcal{B})$ tal que

$$\operatorname{div}\ \mathbf{v} + \operatorname{div}\ \tilde{\mathbf{v}} = 0 \tag{20}$$

con las siguientes condiciones de contorno: se prescribe que Π valga Π_θ en una parte $\partial\phi_t^\theta$ de $\partial\phi_t(\mathcal{B})$ y el flujo volumétrico sea $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = -q$ en el resto $\partial\phi_t^h$, además del enlace impuesto por la conservación de la cantidad de movimiento. $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a la superficie deformada $\partial\phi_t(\mathcal{B})$ y q es positiva cuando el fluido entra en el suelo.

Conservación de la energía

Esta sección describe la primera ley de la termodinámica para una mezcla saturada de suelo y agua. La conservación de la energía es importante para interpretar la llamada función de energía almacenada que será usada ampliamente en las siguientes secciones.

Supóngase que existen funciones de energía interna e_s y e_w que representan la función de energía interna por la unidad de masa sólida y la función de energía interna por unidad de masa fluida respectivamente. Despreciando los términos de energía cinética y potencia no mecánica y suponiendo que se conservan la masa y la cantidad de movimiento, el balance de energía de la fase sólida se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_s(1-\varphi)e_s dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_s(1-\varphi)\mathbf{g}\cdot \mathbf{v} dv + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{h}^s \cdot \mathbf{v} dv + \\ + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma}^s \colon \mathbf{v}\otimes \mathbf{n} da\end{aligned} \tag{21a}$$

con la siguiente localización

$$\rho_s(1-\varphi)\dot{e}_s = \boldsymbol{\sigma}^s \colon \mathbf{d} \tag{21b}$$

donde $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{n})_{ij} = v_i n_j$ y

$$\mathbf{d} = \operatorname{sim}\ (\boldsymbol{l}); \qquad \boldsymbol{l} = \operatorname{grad}\ \mathbf{v} \tag{22}$$

$\mathbf{d}$ es el llamado tensor de velocidad de deformación y $\boldsymbol{l}$ es el gradiente de velocidad en descripción espacial.

Bajo la misma serie de hipótesis, el balance de energía en la fase fluida se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w\varphi e_w dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w\varphi\mathbf{g}\cdot \mathbf{v}^w dv + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{h}^w \cdot \mathbf{v}^w dv + \\ + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma}^w \colon \mathbf{v}^w\otimes \mathbf{n} da\end{aligned} \tag{23a}$$

con la localización

$$\rho_w \varphi \dot{e}_w = \boldsymbol{\sigma}^w : \mathbf{d}^w \tag{23b}$$

donde

$$\mathbf{d}^w = \text{sim }(\boldsymbol{l}^w); \qquad \boldsymbol{l}^w = \text{grad}(\mathbf{v}^w) \tag{24}$$

Las versiones localizadas del balance de energía se pueden derivar como sigue. Considérese por ejemplo el primer miembro de (23a). Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w \varphi e_w dv &= \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left\{ \frac{\partial(\rho_w \varphi e_w)}{\partial t} + \text{div}[\rho_w \varphi e_w \mathbf{v}^w] \right\} dv = \\ &= \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left\{ e_w \left[\frac{\partial(\rho_w \varphi)}{\partial t} + \text{div}[\rho_w \varphi \mathbf{v}^w] \right] + \right. \\ &\left. + \rho_w \varphi \left(\frac{\partial e_w}{\partial t} + \text{grad } e_w \cdot \mathbf{v}^w \right) \right\} dv \equiv \\ &\equiv \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho_w \varphi \dot{e}_w dv\end{aligned}$$

en virtud de la versión localizada de la conservación de la masa (15b). Además

$$\int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma}^w : \mathbf{v}^w \otimes \mathbf{n} da = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} [(\text{div}\boldsymbol{\sigma}^w) \cdot \mathbf{v}^w + \boldsymbol{\sigma}^w : \boldsymbol{l}^w] dv$$

La sustitución en (23a), el uso de la versión localizada de la conservación de la cantidad de movimiento (3b) y la observación que, puesto que $\boldsymbol{\sigma}^w$ es simétrico, $\boldsymbol{\sigma}^w : \boldsymbol{l}^w = \boldsymbol{\sigma}^w : \mathbf{d}^w$ permiten llegar a la versión localizada (23b).

El balance de energía para la mezcla suelo–agua puede derivarse sumando las potencias de las tensiones en (21b) y (23b). El resultado toma la forma

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma}^s : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^w : \mathbf{d}^w \tag{25}$$

donde $\dot{e}$ es el incremento de energía interna para la mezcla suelo–agua obtenido a partir de la media volumétrica

$$\dot{e} = \frac{\rho_s(1-\varphi)\dot{e}_s + \rho_w \varphi \dot{e}_w}{\rho} \tag{26}$$

En ocasiones conviene escribir la conservación de la energía en la descripción material, donde el dominio de integración permanece fijo. Para ello se usa la siguiente transformación. Tómese el índice derecho del tensor $\tilde{\mathbf{P}}$ y sométase a una aplicación progresiva (*push-forward*) mediante la configuración ϕ_t. El resultado es el tensor de tensiones totales de Kirchhoff $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, que difiere del tensor de tensiones totales de Cauchy $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ en el factor J, es decir

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = J\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{F}^t \tag{27}$$

Debido a la descomposición aditiva de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\tilde{\mathbf{P}}$ se puede también descomponer $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ en una parte sólida y otra fluida en cualquiera de las siguientes formas [ver (6) y (7)]

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}^s + \boldsymbol{\tau}^w = \boldsymbol{\tau} + \frac{\boldsymbol{\tau}^w}{\varphi} \tag{28}$$

Siempre que sea posible se utilizará la segunda forma basada en la idea de tensiones efectivas. Además se supondrá un fluido perfecto (es decir, sin capacidad para resistir tensiones tangenciales) y se escribirá la ecuación de tensiones efectivas basada en tensiones de Kirchhoff como sigue

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \theta \mathbf{1} \tag{29}$$

donde θ es la presión neutra de Kirchhoff (compresiones positivas) y $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden.

Si se retrae $\tilde{\mathbf{P}}$ por la izquierda mediante el movimiento inverso, $\phi_t^* =$ inverso(ϕ_t), se obtiene el tensor de tensiones totales simétrico de Piola-Kirchhoff $\tilde{\mathbf{S}}$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{F}^{-t} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{F}^{-t} \tag{30}$$

Además, mediante la descomposición aditiva de las tensiones en el sólido y el fluido, se tiene la siguiente ecuación en tensiones efectivas

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \theta \mathbf{C}^{-1} \tag{31}$$

donde $\mathbf{S}$ es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff de tensiones efectivas y $\mathbf{C}$ es el tensor simétrico derecho de Cauchy-Green dado explícitamente por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} \tag{32}$$

Sean ahora $x = \phi(X,t)$, $E_s(X,t) = e_s(x,t)$ y $E_w(X,t) = e_w(x,t)$. Si se multiplica la ecuación de conservación de energía para la fase sólida en su forma localizada (21b) por J y se usa la expresión (11) de la porosidad, se obtiene la siguiente expresión del balance de energía de la fase sólida en forma localizada y descripción material

$$\rho_s(1-\varphi_0)\dot{E}_s = \boldsymbol{\tau}^s : \mathbf{d} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{S}^s : \dot{\mathbf{C}} \tag{33}$$

No debe sorprender la semejanza de forma entre (21b) y (33), puesto que la masa de la fase sólida se conserva en su propio movimiento. Por otro lado, al multiplicar el balance localizado de energía en la fase sólida por el mismo Jacobiano, se tiene

$$\rho_w[J - (1-\varphi_0)]\dot{E}_w = \boldsymbol{\tau}^w : \mathbf{d}^w \equiv \frac{1}{2}\mathbf{S}^w : \dot{\mathbf{C}}^w \tag{34}$$

con una interpretación equivalente para el tensor $\mathbf{C}^w$. En contraste con (33), la (34) carece de significado físico, pues el movimiento de la fase fluida no está asociado con el

Jacobiano J. Ahora se puede escribir el balance de energía para la mezcla suelo–agua en la descripción material como

$$J\rho\dot{\bar{E}} = \boldsymbol{\tau}^s:\mathbf{d} + \boldsymbol{\tau}^w:\mathbf{d}^w = \frac{1}{2}\mathbf{S}^s:\dot{\mathbf{C}} + \frac{1}{2}\mathbf{S}^w:\dot{\mathbf{C}}^w \tag{35}$$

donde $\dot{\bar{E}}$ se obtiene mediante media volumétrica

$$\dot{\bar{E}} = \frac{\rho_s(1-\varphi_0)\dot{E}_s + \rho_w[J-(1-\varphi_0)]\dot{E}_w}{J\rho} \equiv \dot{e} \tag{36}$$

La cantidad $J\rho\dot{\bar{E}}$ es la potencia mecánica generada por unidad de volumen de referencia de la mezcla suelo–agua.

Hasta ahora se han presentado los resultados del balance de energía en términos de tensiones parciales. Sin embargo, en la práctica ingenieril, casi nunca se usan y se prefiere trabajar en tensiones efectivas. La siguiente proposición unifica los conceptos presentados y demuestra que las tensiones efectivas pueden usarse para interpretar las leyes de conservación de la energía con mayor eficacia que las tensiones parciales.

Proposición 1
Suponiendo que tanto las partículas sólidas como el fluido son incompresibles y que se cumple la conservación de la masa para una mezcla saturada de suelo y agua, se tiene

$$J\rho\dot{\bar{E}} = \boldsymbol{\tau}:\mathbf{d} \tag{37}$$

es decir, la suma de las potencias mecánicas de las tensiones parciales es igual a la de las tensiones efectivas con las deformaciones de la matriz sólida calculada a partir de su propio movimiento.

Para probar (37) se necesita el siguiente **lema**:

Lema
El gradiante del Jacobiano en descripción espacial es nulo.

Demostración
Se puede demostrar que si $\mathbf{a}(z)$ es una matriz función de z , se tiene

$$\frac{d}{dz}\det\,\mathbf{a}(z) = \frac{da_{ij}}{dz}\mathrm{COF}(a_{ij})$$

donde $\mathrm{COF}(a_{ij})$ es el cofactor del elemento (a_{ij}) de la matriz $\mathbf{a}$. Por tanto

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial X_K}\right)\mathrm{COF}(F_{jK}) \equiv 0$$

Corolario
Un corolario importante a este resultado en vista de (5) y (11) es que

$$\mathrm{grad}\ J = \mathrm{grad}\ \rho = \mathrm{grad}\ \varphi = 0 \tag{38}$$

Demostración de la proposición
Por definición

$$J\rho\dot{\bar{E}} = \boldsymbol{\tau}^s\!:\mathbf{d} + \boldsymbol{\tau}^w\!:\mathbf{d}^w = \boldsymbol{\tau}^s\!:\mathbf{d} - \varphi\theta\mathbf{1}\!:\mathbf{d}^w = \boldsymbol{\tau}^s\!:\mathbf{d} - \varphi\theta \mathrm{div}\ \mathbf{v}^w$$

Desarrollando ahora la ecuación de conservación del volumen (19) y usando (38), se tiene

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v}^w = \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) \mathrm{div}\ \mathbf{v}$$

Al insertar en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} J\rho\dot{\bar{E}} &= \boldsymbol{\tau}^s\!:\mathbf{d} + \varphi\theta\left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)\mathrm{div}\ \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}^s\!:\mathbf{d} - \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)\boldsymbol{\tau}^w\!:\mathbf{d} = \\ &= \left[\boldsymbol{\tau}^s - \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)\boldsymbol{\tau}^w\right]:\mathbf{d} \equiv \boldsymbol{\tau}\!:\mathbf{d} \end{aligned}$$

□

Nota 1
La *Proposición 1* establece que la potencia mecánica total en la mezcla suelo–agua es absorbida por el incremento de energía $\boldsymbol{\tau}\!:\mathbf{d}$ y que el tensor $\boldsymbol{\tau}^w/\varphi$ en (28) *no trabaja.* Ello puede parecer una paradoja, pero debe recordarse que $\boldsymbol{\tau}^w/\varphi$ es un tensor de fuerzas en el fluido *por unidad de área fluida*, y puesto que aquél se supone incompresible y perfecto, no tiene potencia mecánica. De nuevo, se ve la absoluta diferencia entre el tensor de tensiones parciales $\boldsymbol{\tau}^w$ y el tensor fluido $\boldsymbol{\tau}^w/\varphi$.

ECUACIONES VARIACIONALES, LEYES DE COMPORTAMIENTO Y ALGORITMOS

En este apartado se establece la forma débil de la teoría no lineal de consolidación y se bosqueja cómo se pueden incorporar a la formulación las leyes de comportamiento de las fases sólida y fluida. La idea es usar la configuración no deformada siempre que sea posible, ya que el dominio permanece fijo a lo largo del proceso de solución.

Forma débil del problema de contorno

Siguiendo el esquema clásico de los principios variacionales se definen los siguientes espacios: sea el espacio de configuraciones

$$\mathcal{C}_\phi = \{\phi\!: \mathcal{B} \rightarrow R^{n_{sd}} | \phi_i \in H^l,\ \phi = \phi_d \text{ sobre } \partial\mathcal{B}^d\}$$

y el espacio de variaciones

$$\mathcal{V}_\phi = \{\boldsymbol{\eta}\!: \mathcal{B} \rightarrow R^{n_{sd}} | \eta_i \in H^l,\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\mathcal{B}^d\}$$

Además, sea $G: \mathcal{C}_\phi \times \mathcal{V}_\phi \rightarrow R$ tal que

$$G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}} (\text{GRAD } \boldsymbol{\eta}: \tilde{\mathbf{P}} - \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{G}) dV - \int_{\partial \mathcal{B}^t} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{t} dA \tag{39}$$

Se puede demostrar fácilmente que $G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta}) = 0$ es equivalente a (12) si $\tilde{\mathbf{P}}$ y $\boldsymbol{\eta}$ se suponen en C^l.

A continuación se define el espacio de potenciales como

$$\mathcal{C}_\theta = \{\Pi: \phi_t(\mathcal{B}) \rightarrow R | \Pi \in H^l, \ \Pi = \Pi_\theta \text{ sobre } \partial\phi_t^\theta\}$$

y el correspondiente espacio de variaciones como

$$\mathcal{V}_\theta = \{\psi: \phi_t(\mathcal{B}) \rightarrow R | \psi \in H^l, \ \psi = 0 \text{ sobre } \partial\phi_t^\theta\}$$

Además, sea $H: \mathcal{C}_\theta \times \mathcal{V}_\theta \rightarrow R$ dado por

$$H(\phi, \Pi, \psi) = \int_{\phi_t(\mathcal{B})} (\psi \text{div } \mathbf{v} - \text{grad } \psi \cdot \tilde{\mathbf{v}}) dv - \int_{\partial\phi_t^h(\mathcal{B})} \psi q \, da \tag{40}$$

De nuevo, la condición $H(\phi, \Pi, \psi) = 0$ es equivalente a (20), si ψ, $\mathbf{v}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ se suponen contenidos en C^l.

La forma débil del problema de contorno es como sigue: obténgase $\phi \in \mathcal{C}_\phi$ y $\Pi \in \mathcal{C}_\theta$ tales que

$$G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta}) = H(\phi, \Pi, \psi) = 0 \tag{41}$$

para todo $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\phi$ y $\psi \in \mathcal{V}_\theta$.

La condición (41) surge directamente de la forma fuerte del problema de contorno. Sin embargo, las funciones G y H poseen una estructura complicada que no se presta fácilmente a operaciones matriciales típicas. En lo que sigue se reestructuran estas funciones, especialmente $H(\phi, \Pi, \psi)$, de tal forma que la integración se realiza respecto a la configuración indeformada común $\mathcal{B}$.

Considérese primero la función $G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta})$. Usando los resultados descritos en la sección previa, se puede poner G en la forma siguiente

$$G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}} (\text{grad } \boldsymbol{\eta}: \boldsymbol{\tau} - \theta \text{div} \boldsymbol{\eta} - \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{G}) dV - \int_{\partial \mathcal{B}^t} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{t} dA \tag{42}$$

Considérese a continuación la función $H(\phi, \Pi, \psi)$. Se trata de una función integral arrastrada desde la configuración deformada. El dominio de integración puede obtenerse rápidamente a partir de la configuración indeformada introduciendo el Jacobiano J. Puesto que J jugará un papel esencial en las ecuaciones de volumen, se describen a continuación algunas de sus propiedades más importantes.

Proposición 2
La derivada del Jacobiano es

$$\dot{J} = J \text{ div } \mathbf{v} \tag{43}$$

Demostración
De nuevo, mediante álgebra matricial, si $\mathbf{a}$ es una matriz dependiente del tiempo

$$\frac{d}{dt}\det \mathbf{a}(t) = \frac{da_{ij}}{dt}\mathrm{COF}(a_{ij}) = \dot{\mathbf{a}}\colon \mathrm{COF}(\mathbf{a})$$

Por tanto

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}\right) \mathrm{COF}(\mathbf{F}) = \mathrm{grad}\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\colon \mathrm{COF}(\mathbf{F}) \equiv J \ \mathrm{div}\ \mathbf{v}$$

El último término resulta al observar que el símbolo de contracción ":" produce una suma de nueve determinantes de los que sólo sobreviven tres, ya que en los demás aparecen filas repetidas, y por tanto se anulan.

□

Sea ahora $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N} = -Q$ el incremento de flujo volumétrico prescrito por unidad de área indeformada a través del contorno $\partial \mathcal{B}^h$, donde $\tilde{\mathbf{V}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ es la transformada mediante Piola del vector velocidad de Darcy $\tilde{\mathbf{v}}$ y Q es positiva cuando apunta hacia adentro en relación a la superficie deformada $\partial \mathcal{B}$ con normal exterior $\mathbf{N}$. Introduciendo la identidad (43) en (40), se obtiene la ecuación variacional para el balance de volumen en la configuración indeformada $\mathcal{B}$

$$H(\phi, \Pi, \psi) = \int_{\mathcal{B}} (\psi \dot{J} - \mathrm{grad}\ \psi \cdot J\tilde{\mathbf{v}}) dV - \int_{\partial \mathcal{B}^h} \psi Q \ dA \tag{44}$$

Una condición habitual es $q = Q = 0$, es decir, no entra fluido al sistema, tal como sucede cuando existen contornos impermeables.

Desigualdad de disipación reducida

Sea $\mathcal{D}$ la función de disipación local por unidad de volumen de referencia de la matriz de suelo asociada con el punto material $X \in \mathcal{B}$. Sea además Ψ la función de energía almacenada o energía libre por unidad de volumen de referencia de la matriz de suelo. Despreciando la potencia no mecánica y la producción de energía cinética, la segunda ley establece que

$$D = \boldsymbol{\tau}\colon \mathbf{d} - \frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{S}\colon \dot{\mathbf{C}} - \frac{d\Psi}{dt} \geq 0 \tag{45}$$

Para un material elástico evidentemente $d\Psi/dt = J\rho\dot{E}$ y $\mathcal{D} = 0$ (37). Además, en un proceso elástico isotermo Ψ depende solamente de X y $\mathbf{C}$, ya que debe cumplir el axioma de indiferencia material[30,31]. También se puede decir que Ψ es sólo función de X y del tensor de Cauchy–Green a la izquierda

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t \tag{46}$$

en procesos elásticos isotermos.

Para un proceso elastoplástico más general se puede emplear la siguiente descomposición multiplicativa del gradiente de deformación[15,16]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p, \qquad \forall X \in \mathcal{B}; \qquad t \geq 0 \tag{47}$$

Desde el punto de vista micromecánico $\mathbf{F}^p$ es una variable interna relacionada con los desplazamientos, aplastamientos e incluso flexiones plásticas (para partículas aciculares) de los gránulos que forman el conjunto de suelo. Recíprocamente, $(\mathbf{F}^e)^{-1}$ define la configuración descargada, libre de tensiones, del punto material X. Bajo el esquema propuesto en (47) se puede escribir la siguiente expresión funcional para la función de energía almacenada en un proceso elastoplástico

$$\Psi = \Psi(\mathbf{b}^e, \xi), \qquad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{et} \tag{48}$$

donde $\mathbf{b}^e$ es el tensor elástico de Cauchy–Green a la izquierda y ξ es una variable interna plástica que se define de modo que $\varsigma := \partial\Psi/\partial\xi$ caracteriza la respuesta al endurecimiento del suelo.

Para que (45) sea utilizada en todos los procesos admisibles y para satisfacer el postulado de máxima disipación plástica, un razonamiento típico conduce a las siguientes leyes de comportamiento[25]

$$\boldsymbol{\tau} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial b^e} \cdot \mathbf{b}^e, \qquad -\frac{1}{2}\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = \dot{\gamma}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{b}^e; \qquad \dot{\xi} = \dot{\gamma}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varsigma} \tag{49}$$

donde $\dot{\gamma} \geq 0$, $\mathcal{F} \leq 0$, $\dot{\gamma}\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F}$ es la función de plastificación y $\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e$ es la llamada derivada de Lie de $\mathbf{b}^e$.

Nota 2

Puesto que toda la potencia mecánica está contenida en el tensor $\boldsymbol{\tau}$, es deseable desarrollar las leyes de comportamiento de los suelos en función de las tensiones efectivas. En la práctica los modelos basados en ellas, como el Cam–Clay y sus perfeccionamientos posteriores, se desarrollan prescindiendo de la presencia o ausencia de agua en los poros. Los modelos de este tipo suelen reproducir la respuesta fenomenológica de suelos secos o de los saturados en condiciones con drenaje. El uso de $\boldsymbol{\tau}$ también permite la escritura de la función Ψ de energía almacenada en un volumen de referencia, fijo o indeformado, *de la matriz de suelo.* Ello es ventajoso frente a formulaciones basadas en tensiones parciales, puesto que elimina la necesidad de arrastrar el movimiento material del fluido al modelar la respuesta del suelo.

Nota 3

Además de la indiferencia material, una hipótesis clave es el comportamiento isótropo. Por ejemplo, si $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \varsigma) = 0$ es la función de plastificación, $\mathcal{F}$ debe ser una función isótropa de $\boldsymbol{\tau}$. Ello implica que $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{b}^e$ y $\partial\Psi/\partial\mathbf{b}^e$ son conmutativas. Los temas relativos a la elastoplasticidad con deformaciones finitas están muy bien tratados en[25], en el contexto de la teoría multiplicativa de la plasticidad. Puesto que puede combinarse muy bien con la presente teoría de consolidación no lineal, será adoptada en este artículo. A continuación se describen sus principales características.

Modelos de plasticidad multiplicativa para el esqueleto del suelo

Sea la descomposición espectral del tensor elástico de Cauchy–Green a la izquierda

$$\mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^{3} (\lambda_A^e)^2 \mathbf{m}^{(A)}; \qquad \mathbf{m}^{(A)} = \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \tag{50}$$

donde λ_A^e es el alargamiento elástico principal correspondiente a la dirección principal $\mathbf{n}^{(A)}$ y A es un índice que toma los valores 1, 2 y 3. Recuérdese que $\mathbf{b}^e$ es una medida de la deformación elástica de la matriz sólida o *esqueleto del suelo*. Limitándose al caso isótropo, el tensor de Kirchhoff de tensiones efectivas $\boldsymbol{\tau}$ se puede descomponer también espectralmente en la forma

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^{3} \beta_A \mathbf{m}^{(A)} \tag{51}$$

donde β_A son las tensiones principales de Kirchhoff para $A = 1, 2, 3$. La isotropía implica que las direcciones principales de $\boldsymbol{\tau}$ coinciden con las de $\mathbf{b}^e$.

La indiferencia material y la isotropía también implican que la función de energía libre es una función simétrica de los alargamientos elásticos principales. De forma equivalente se tiene

$$\Psi(X, \mathbf{b}^e) = \tilde{\Psi}(X, \epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e); \qquad \epsilon_A^e = \ln(\lambda_A^e), \quad A = 1, 2, 3 \tag{52}$$

Las ϵ_A^e son llamadas alargamientos logarítmicos elásticos principales. Con ello la ecuación constitutiva (49) se reduce a relaciones escalares entre las tensiones principales efectivas de Kirchhoff β_A y los alargamientos logarítmicos elásticos principales ϵ_A^e, a través de la función $\tilde{\Psi}$ mediante

$$\beta_A = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \epsilon_A^e} \qquad A = 1, 2, 3 \tag{53}$$

Esta ecuación es válida para cualquier forma de energía almacenada $\tilde{\Psi}$ dada por (52).

En el régimen elastoplástico queda la tarea adicional de respetar el criterio de plastificación $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \chi) = 0$ para el esqueleto del suelo. La mejor forma de conseguirlo es por incrementos desde la configuración a la que se ha convergido $\phi_{t_n}(\mathcal{B})$, a la configuración incógnita $\phi_{t_{n+1}}(\mathcal{B})$. El proceso se realiza en dos etapas. En la primera, la plastificación se "congela" y el paso elástico se da ignorando las coacciones impuestas por el criterio de plastificación. Ello conduce a un estado elástico de prueba y al conjunto de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{f}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{f}; \qquad \dot{\mathbf{b}}^e = 2\mathrm{sim}(\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{b}^e); \qquad \dot{\xi} = 0 \tag{54}$$

donde $\mathbf{f} = \partial \phi / \partial \mathbf{x}_n$ es el gradiente de la deformación calculado en relación con la configuración $\phi_{t_n}(\mathcal{B})$.

En el segundo paso se mantiene fijo el estado de prueba y se introduce la relajación plástica mediante una "aplicación de retorno". El algoritmo explícito es

$$\dot{\mathbf{f}} = 0; \qquad \dot{\mathbf{b}}^e = -2\dot{\gamma}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{b}^e; \qquad \dot{\xi} = \dot{\gamma}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} \tag{55}$$

con $\dot{\gamma} \geq 0$, $\mathcal{F} \leq 0$ y $\dot{\gamma}\mathcal{F} = 0$. En (54) y (55) $\mathbf{l}$ es el gradiente espacial de la velocidad de la fase sólida que toma una forma *idéntica* a la dada por (22).

La parte incremental de las ecuaciones de evolución (54) y (55) se obtiene del siguiente algoritmo. En (54) la parte incremental del tensor de prueba de Cauchy–Green a la izquierda se calcula con

$$\mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot \mathbf{f}^t; \qquad \xi = \xi_n \tag{56}$$

donde $\mathbf{b}_n^e$ y ξ_n son los valores respectivos de $\mathbf{b}^e$ y ξ en la configuración ϕ_{t_n}. El tensor $\mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}$ puede descomponerse espectralmente en la forma

$$\mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}} = \sum_{A=1}^{3} (\lambda_A^{e\ \mathrm{tr}})^2 \mathbf{m}^{\mathrm{tr}\ (A)}; \qquad \mathbf{m}^{\mathrm{tr}\ (A)} = \mathbf{n}^{\mathrm{tr}\ (A)} \otimes \mathbf{n}^{\mathrm{tr}\ (A)} \tag{57}$$

Se puede introducir una *aproximación exponencial* en la ecuación de la regla de plastificación mediante

$$\mathbf{b}^e = \exp\left(-2\Delta\gamma\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right) \cdot \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}; \qquad \xi = \xi_n + \Delta\gamma\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} \tag{58}$$

donde $\Delta\gamma$ es un parámetro de congruencia que cumple la condición $\Delta\gamma \geq 0$, $\mathcal{F} \leq 0$ y $\Delta\gamma\mathcal{F} = 0$.

Teniendo en cuenta la isotropía, se llega a la existencia de una función $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \xi)$ tal que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \sum_{A=1}^{3} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \beta_A} \mathbf{m}^{(A)} \tag{59}$$

Insertando (59) en (58) e invirtiendo, se tiene

$$\mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}} = \sum_{A=1}^{3} \left[(\lambda_A^e)^2 \exp\left(2\Delta\gamma\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \beta_A}\right)\right] \mathbf{m}^{(A)} \tag{60}$$

Comparando (57) y (60), se tienen los siguientes resultados útiles

$$\mathbf{m}^{(A)} = \mathbf{m}^{\mathrm{tr}(A)}; \qquad (\lambda_A^e)^2 = \exp\left(-2\Delta\gamma\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \beta_A}\right) (\lambda_A^{e\ \mathrm{tr}})^2 \tag{61}$$

La ecuación (61) establece que las direcciones principales $\mathbf{n}^{(A)}$ coinciden con las direcciones principales de prueba $\mathbf{n}^{\mathrm{tr}\ (A)}$ y que el algoritmo "aplicación de retorno"

(61) tiene lugar según ejes fijos definidos por el estado elástico de prueba. Además las ecuaciones de la aplicación de retorno adquieren una forma aditiva simple, si se toman los algoritmos naturales de (61). El resultado es una aplicación de retorno lineal en el espacio de deformaciones, expresada por

$$\epsilon_A^e = \epsilon_A^{e\ \mathrm{tr}} - \Delta\gamma \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \beta_A} \tag{62}$$

Finalmente, se obtiene un algoritmo lineal por la aplicación de retorno (semejante al presentado en[43] pero en el espacio de las tensiones efectivas de Kirchhoff) al admitir un operador de elasticidad constante α_{AB} mediante la ecuación

$$\beta_A = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \epsilon_A^e} = \sum_{B=1}^{3} \alpha_{AB} \epsilon_B^e, \qquad A = 1,2,3 \tag{63}$$

El resultado es

$$\beta_A = \beta_A^{\mathrm{tr}} - \Delta\gamma \sum_{B=1}^{3} \alpha_{AB} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\beta_B}, \qquad A = 1,2,3 \tag{64}$$

Así, $\boldsymbol{\tau}$ puede definirse completamente mediante (51) y (64) y puede insertarse en la ecuación variacional (42).

Particularización de la teoría de plasticidad multiplicativa al estado de carga sin drenaje

Suponiendo que tanto los granos sólidos como los fluidos en una mezcla saturada suelo–agua son incompresibles, la deformación sin drenaje se obtiene de cualquiera de las siguientes condiciones *equivalentes*

(i) ϕ_t mantiene el volumen,
(ii) $J(X,t) = 1$,
(iii) div $\mathbf{v} = 0$.

A partir de (43) y de la condición $J(X,0) = 1$ se puede establecer la equivalencia entre (ii) y (iii). Las condiciones sin drenaje implican también que las fases sólida y fluida siguen los mismos movimientos de modo que $\mathbf{v} = \mathbf{v}^w$ y $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Las condiciones sin drenaje dominan cuando el suelo se carga a un ritmo tan rápido que se evita el flujo de fluido.

A continuación se van a imponer las condiciones sin drenaje en la teoría de plasticidad multiplicativa[44]. Sea $J^e = \det(\mathbf{F}^e)$ y $J^p = \det(\mathbf{F}^p)$. Tomando el determinante de (47), se tiene la siguiente relación para la carga sin drenaje

$$J = J^e J^p \equiv 1, \qquad \forall X \in \mathcal{B}; \qquad t \geq 0 \tag{65}$$

Imponiendo (65) en el instante t_n y para cualquier instante $t \in [t_n, t_{n+1}]$, se obtiene

$$\frac{J^e(X,t)}{J_n^e} = \frac{J_n^p}{J^p(X,t)} \tag{66}$$

donde J_n^e y J_n^p son los respectivos valores de $J^e(X)$ y $J^p(X)$ en el instante $t = t_n$.

Para obtener una expresión más explícita de $J^e(X,t)$ y $J^p(X,t)$ se aprovecha que $J^e = (\det \mathbf{b}^e)^{1/2}$ dado por (48); la derivada temporal de J^e usando (54) y (55), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{J}^e &= \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{b}}^e}{J^e}\colon \mathrm{COF}(\mathbf{b}^e) = \frac{1}{2}J^e\mathbf{b}^{e-1}\colon \dot{\mathbf{b}}^e = \\ &= J^e\mathbf{b}^{e-1}\colon \left[\mathrm{sim}(\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{b}^e) - \dot{\gamma}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{b}^e\right] \\ &\equiv -J^e\dot{\gamma}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{67}$$

puesto que $\mathbf{b}^{e-1}\colon \mathrm{sim}(\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{b}^e) = \mathrm{div}\,\mathbf{v} \equiv 0$ para condiciones sin drejane. Integrando (67) y usando un esquema de diferencias regresivas para las tensiones

$$\frac{J^e(X,t)}{J_n^e} = \frac{J_n^p}{J^p(X,t)} = \exp\left[-\Delta\gamma\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)\right] \tag{68}$$

donde $\Delta\gamma = \dot{\gamma}(t - t_n)$. Puesto que la parte logarítmica se íntegra exactamente y las tensiones están sólo en forma aproximada, la exactitud de la aproximación se transmite a (68), es decir, la integración es exacta en primer orden.

A partir de la descomposición de $\mathbf{b}^e$ se tiene

$$J^e(X,t) = \det(\mathbf{F}^e) = \sqrt{\det(\mathbf{b}^e)} = \lambda_1^e\lambda_2^e\lambda_3^e \tag{69}$$

donde los λ_A^e son los alargamientos elásticos principales. Por tanto, la coacción de incompresibilidad en el problema sin drenaje es

$$\lambda_1^e\lambda_2^e\lambda_3^e = (\lambda_1^e\lambda_2^e\lambda_3^e)_n \exp\left[-\Delta\gamma\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)\right] \tag{70}$$

Tomando logaritmos naturales en ambos lados, se tiene

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_n^e) - \Delta\gamma\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right) \tag{71}$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^e$ y $\boldsymbol{\epsilon}_n^e$ son los tensores diagonales de los alargamientos logarítmicos principales calculados en los instantes t y t_n respectivamente.

Se puede obtener una expresión semejante a la (71) tomando la traza de (72)

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) - \Delta\gamma\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right) \tag{72}$$

Restando (71) y (72), se tiene en

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_n^e) = \mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) = 0 \tag{73}$$

En otras palabras, la condición de incompresibilidad se cumple mediante la condición que la suma de los incrementos de alargamientos elásticos logarítmicos de prueba principales se anulan en cada incremento de carga. En la siguiente proposición se demuestra que la condición (73) realmente produce la conservación *exacta* del volumen para todo $t \geq t_n$.

Proposición 3
Las siguientes igualdades son equivalentes:

(i) $\mathrm{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e_n) = 0$,
(ii) $\dot{J}^{e\ \mathrm{tr}} = 0$, donde $J^{e\ \mathrm{tr}} = \sqrt{\det \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}}$,
(iii) $\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$.

Demostración
Para demostrar la equivalencia de (i) y (ii) se vuelve a escribir (i) como

$$\lambda_1^{e\ \mathrm{tr}} \lambda_2^{e\ \mathrm{tr}} \lambda_3^{e\ \mathrm{tr}} = (\lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e)_n = \text{constante}$$

Tomando la derivada temporal, se tiene

$$\frac{\dot{\lambda}_1^{e\ \mathrm{tr}}}{\lambda_1^{e\ \mathrm{tr}}} + \frac{\dot{\lambda}_2^{e\ \mathrm{tr}}}{\lambda_2^{e\ \mathrm{tr}}} + \frac{\dot{\lambda}_3^{e\ \mathrm{tr}}}{\lambda_3^{e\ \mathrm{tr}}} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}-1} : \dot{\mathbf{b}}^{e\ \mathrm{tr}} = 0$$

y multiplicando los resultados por $J^{e\ \mathrm{tr}}$

$$\frac{1}{2} J^{e\ \mathrm{tr}} \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}-1} : \dot{\mathbf{b}}^{e\ \mathrm{tr}} = \frac{1}{2} \frac{1}{J^{e\ \mathrm{tr}}} \dot{\mathbf{b}}^{e\ \mathrm{tr}} : \mathrm{COF}(\mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}) \equiv \dot{J}^{e\ \mathrm{tr}} = 0$$

Para demostrar la equivalencia de (ii) y (iii) basta observar que, puesto que $\dot{J}^{e\ \mathrm{tr}} = 0$, la derivada temporal de $\det \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}$ debe anularse también. De (56) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(\det \mathbf{b}^{e\ \mathrm{tr}}\right) = 2 \det \mathbf{f} \det \mathbf{b}^e_n \frac{d}{dt}(\det \mathbf{f}) = 0$$

Puesto que ni $\det \mathbf{f}$ ni $\det \mathbf{b}^e_n$ son cero, se tiene

$$\frac{d}{dt}(\det \mathbf{f}) = \dot{\mathbf{f}} : \mathrm{COF}(\mathbf{f}) = \frac{J}{J_n} \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$$

Como $J \neq 0$, se obtiene $\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$, es decir, la conservación exacta del volumen. □

Un corolario de la *Proposición 3* es que el algoritmo de diferencias regresivas (68) es equivalente al algoritmo producto (58) y que aunque sólo sean exactos hasta el primer orden, los errores numéricos se *cancelan* en (73) de tal forma, que el volumen total de la matriz sólida se conserva exactamente.

La forma débil del problema de contorno para carga sin drenaje puede ahora plantearse como sigue [ver (41)]. Dado $\mathcal{C}_{\mathrm{vol}} = \{\phi \in \mathcal{C}_\phi | J(\phi) = 1\}$ como espacio de todas las configuraciones que conservan el volumen, encuéntrese $\phi \in \mathcal{C}_{\mathrm{vol}}$ de tal forma que para todo $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\phi$

$$G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta}) = 0 \tag{74}$$

donde $G(\phi, \Pi, \boldsymbol{\eta})$ está dada por (42). Se pueden usar los resultados de[45] para demostrar que el problema anterior está bien planteado como consecuencia de estarlo las ecuaciones de compresibilidad obtenidas al poner $\theta = 0$

La solución de (74) puede obtenerse haciendo [ver (44)]

$$H(\phi, \Pi, \psi) \equiv H^*(\psi) = \int_{\mathcal{B}} \psi \dot{J} dV = 0 \tag{75}$$

en cuyo caso la variable de presión neutra θ juega el papel de un multiplicador de Lagrange. Alternativamente se puede retomar la idea de[46,47] y reemplazar la variable de presión neutra θ por la siguiente ley de comportamiento

$$\theta = \theta_n - \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \mathrm{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) \tag{76}$$

donde λ_w es el módulo de compresibilidad de la fase fluida, φ_0 es la porosidad de referencia del suelo y θ_n es la presión de Kirchhoff del agua en los poros en el instante t_n. Obsérvese en (76) que $J = 1$ implica que la presión de agua de Kirchhoff θ coincide con la llamada de Cauchy o simplemente la "presión del agua en poros" y que debido a (11) la porosidad φ se conserva en el valor φ_0. Cuando $\lambda_w \to \infty$, la ecuación de energía (35) muestra claramente que $J\rho\dot{E}$ puede conservarse si y sólo si $\mathrm{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e\ \mathrm{tr}}) \to 0$ (lo que también implica que div $\mathbf{v} \to 0$). La ley de comportamiento (76) tiene la misma forma que la usada en[48,49] para análisis sin drenaje de suelos saturados y deformaciones infinitesimales.

Nota 4

La fórmula (76) permite tratar la presión de agua en poros con valores grandes finitos de λ_w. La presencia de la porosidad φ_0 en el denominador hace que (76) tenga significado físico si se usa el módulo de compresibilidad real del fluido ligeramente compresible; de otra forma λ_w/φ_0 es simplemente un parámetro de penalización. Obsérvese que θ en (76) tiene el significado físico de presión de agua en los poros y no es simplemente otro parámetro artificial, como por ejemplo los términos de presión usados en [46,47] para imponer la condición de incompresibilidad.

Ley de comportamiento del flujo fluido

A continuación se describe una ley de comportamiento del flujo fluido semejante a la desarrollada para la fase sólida. Suponiendo flujo laminar, se puede utilizar la ley generalizada de Darcy para obtener la ley de comportamiento siguiente

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{k} \cdot \mathrm{grad}\, \Pi \tag{77}$$

donde $\mathbf{k}$ es el tensor de permeabilidad de segundo orden y Π es el mismo potencial de fluido usado en (20). El signo negativo en (77) significa que el flujo fluido siempre se dirige según los potenciales decrecientes. Puede admitirse que el tensor de permeabilidad $\mathbf{k}$ es simétrico y definido positivo en la mayoría de los casos.

Para flujo incompresible el potencial Π puede descomponerse en una parte de presión Π^θ y una parte de altura Π^e. Esta última puede medirse en la dirección del eje cartesiano x_3; la descomposición de Π toma así la forma

$$\Pi = \Pi^\theta + \Pi^e = \frac{\theta}{Jg\rho_w} + x_3 \tag{78}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Tomando el gradiente espacial de (78) y usando (38), se obtiene

$$\text{grad } \Pi = \frac{\text{grad } \theta}{Jg\rho_w} + \mathbf{l}_3 \tag{79}$$

donde $\mathbf{l}_3 = \{0, 0, 1\}^t$. Así pues la ecuación variacional (44) para la conservación del volumen puede escribirse como

$$H(\phi, \theta, \psi) = \int_{\mathcal{B}} \psi \dot{J} dV + \int_{\mathcal{B}} \text{grad } \psi \cdot \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\text{grad } \theta}{g\rho_w} + J\mathbf{l}_3 \right) dV - \int_{\partial\mathcal{B}^h} \psi Q \, dA \tag{80}$$

donde la variable θ reemplaza al potencial Π. La condición $H(\phi, \theta, \psi) = 0$ es la forma variacional de la coacción de volumen impuesta por el flujo fluido.

LINEALIZACIÓN

El objetivo de esta sección es doble: (i) proporcionar la conexión entre las teorías lineal y no lineal de la consolidación y (ii) desarrollar expresiones *exactas* para las primeras derivadas de las funciones $G(\phi, \theta, \boldsymbol{\eta})$ y $H(\phi, \theta, \psi)$ con objeto de usarlas en iteraciones de tipo Newton. Más concretamente, se desea linealizar en cierta configuración las ecuaciones no lineales de conservación de masa y cantidad de movimiento ϕ° y presión θ°, que corresponden a variaciones infinitesimales $\delta\mathbf{u}$ y $\delta\theta$. Esta idea se desarrolla en los apartados siguientes, usando tanto la descripción material como la espacial.

Preliminares

A continuación se resumen algunas fórmulas de interés. La primera es la transformación de Piola introducida en la sección anterior [ver (44)] que por su gran importancia se usa ampliamente a lo largo del artículo.

Definición
Sea $\mathbf{y}$ un campo vectorial en $R^{n_{sd}}$ y sea ϕ un movimiento regular en $\mathcal{B}$. La transformación de Piola aplicada a $\mathbf{y}$ se define como

$$\mathbf{Y} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{y} \tag{81}$$

□

La identidad de Piola se establece a continuación en el siguiente teorema.

Teorema
Sea $\mathbf{Y}$ la transformada de Piola de $\mathbf{y}$. Se cumple

$$\text{DIV } \mathbf{Y} = J \text{ div } \mathbf{y} \tag{82}$$

La demostración se encuentra en[31]. Este teorema puede ampliarse a casos en que $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{y}$ son vectores derivados de tensores de orden mayor o igual a dos, fijando todos los índices menos uno (por ejemplo la fijación de un índice en el *tensor* de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ produce un *vector* de tensiones de Cauchy). □

Se finaliza esta sección con las siguientes proposiciones que afectan la linealización de algunos términos básicos.

Proposición 4
Sea $\delta\mathbf{u}$ la variación del campo de desplazamientos, las linealizaciones de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}^{-1}$ en la configuración ϕ° están dadas respectivamente por

$$\mathcal{L}\mathbf{F} = \mathbf{F}^\circ + \text{grad } \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^\circ \tag{83a}$$

$$\mathcal{L}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{\circ -1} - \mathbf{F}^{\circ -1} \cdot \text{grad } \delta\mathbf{u} \tag{83b}$$

Demostración
Se usa la notación de derivada direccional de una función para obtener la variación

$$\delta\mathbf{F} = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathbf{F}(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u}) = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \frac{\partial(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} = \text{grad } \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^\circ$$

donde ϕ° son las coordenadas espaciales del punto cuyo movimiento es ϕ°. La relación inversa se obtiene de la identidad $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$. Tomando la variación, se tiene

$$\delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{0}$$

que permite obtener $\delta\mathbf{F}^{-1}$ a partir de $\delta\mathbf{F}$.

□

Proposición 5
La linealización del Jacobiano y su incremento en la configuración ϕ° están dados respectivamente por

$$\mathcal{L}J = J^\circ + J^\circ \text{div } (\delta\mathbf{u}) \tag{84a}$$

$$\mathcal{L}\dot{J} = \dot{J}^\circ + J^\circ[\text{div } (\delta\mathbf{u}) - \text{grad } \mathbf{v}^\circ\colon \text{grad}^t\, (\delta\mathbf{u}) + \text{div } (\delta\mathbf{v})\text{div } \mathbf{v}^\circ] \tag{84b}$$

donde $\delta\mathbf{v}$ es la variación del campo de velocidades $\mathbf{v}$.

Demostración
La primera de (84) puede demostrarse mediante la identidad

$$J(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u}) = \det \mathbf{F}(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u})$$

Por tanto, la variación del Jacobiano es

$$\delta J = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} J(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u}) = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left[\frac{\partial(\phi^\circ + \epsilon\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}}\right] : \mathrm{COF}(\mathbf{F}^\circ) = J^\circ \mathrm{div}\ (\delta\mathbf{u})$$

Véase la *Proposición 2* para un razonamiento semejante.

Para la varicaión del incremento del Jacobiano se tiene

$$\delta\dot{J} = \delta(J^\circ \mathrm{div}\ \mathbf{v}^\circ) = J^\circ\delta(\mathrm{div}\ \mathbf{v}^\circ) + \delta J \mathrm{div}\ \mathbf{v}^\circ$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\delta(\mathrm{div}\ \mathbf{v}^\circ) &= \delta(\mathrm{GRAD}\ \mathbf{v}^\circ : \mathbf{F}^{\circ-t}) = \delta(\mathrm{GRAD}\ \mathbf{v}^\circ) : \mathbf{F}^{\circ-t} + \mathrm{GRAD}\ \mathbf{v}^\circ : \delta\mathbf{F}^{-t} = \\ &= \mathrm{GRAD}\ \delta\mathbf{v} : \mathbf{F}^{\circ-t} - \mathrm{GRAD}\ \mathbf{v}^\circ : (\mathbf{F}^{\circ-1} \cdot \mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u})^t = \\ &= \mathrm{div}\ (\delta\mathbf{v}) - \mathrm{grad}\ \mathbf{v}^\circ : \mathrm{grad}^t\ (\delta\mathbf{u})\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

□

Corolario
La linealización de la densidad másica saturada de referencia $\rho_0 = J\rho$ en la configuración ϕ° es

$$\mathcal{L}\rho_0 = \rho_0^\circ + \rho_w J^\circ \mathrm{div}\ (\delta\mathbf{u}) \tag{85}$$

Demostración
La demostración se sigue de (5), (11) y (84a). Obsérvese que ρ_0 no es constante, puesto que, como se indicó previamente, la masa total de la mezcla suelo–agua en $\mathcal{B}$ no se conserva necesariamente en $\phi_t(\mathcal{B})$. La variación de ρ_0 refleja la cantidad de fluido que entra o escapa de la matriz de suelo debida a la variación del Jacobiano.

□

Linealización de las ecuaciones de campo

Se aplican ahora los resultados del apartado anterior a las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. Ello dará el nexo de unión entre las teorías lineal y no lineal de la consolidación. Al igual que en el apartado anterior se supondrá una formulación mixta bi–campo afectando tanto a la deformación finita ϕ° como a la presión de poros de Kirchhoff θ°. A continuación se escribe la linealización de las ecuaciones de campo congruente con las variaciones infinitesimales impuestas $\delta \mathbf{u}$ y $\delta\theta$. En las proposiciones siguientes se supone una condición de carga muerta, lo que implica que los vectores de aceleración de la gravedad $\mathbf{G}$ y $\mathbf{g}$ son funciones únicas de X (en caso contrario debe añadirse otro término a la linealización para representar sus variaciones).

Proposición 6
Sea $\mathbf{E} = \text{DIV } \tilde{\mathbf{P}} + \rho_0 \mathbf{G}$ la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. Para carga muerta, la linealización de $\mathbf{E}$ en $(\phi^\circ, \theta^\circ)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ &+ \text{DIV } (\mathbf{A}^\circ\!: \text{GRAD } \delta\mathbf{u}) + \text{DIV } (\theta^\circ \mathbf{F}^{\circ -t} \cdot \text{GRAD}^t\, \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{\circ -t}) - \\ &- \text{DIV } (\delta\theta \mathbf{F}^{\circ -t}) + \rho_w \text{DIV } (J^\circ \mathbf{F}^{\circ -t} \cdot \delta\mathbf{u})\mathbf{G}^\circ \end{aligned} \tag{86}$$

donde $\mathbf{E}^\circ = \text{DIV } \tilde{\mathbf{P}}^\circ + \rho_0^\circ \mathbf{G}^\circ$ y $\mathbf{A}^\circ = \partial \mathbf{P}/\partial \mathbf{F}$ es el primer tensor tangente elástico para la matriz sólida calculado de la configuración ϕ°.

Demostración
De nuevo

$$\mathbf{E} = \text{DIV } (\mathbf{P} - \theta \mathbf{F}^{-t}) + J\rho \mathbf{G}$$

Tomando variaciones, se tiene

$$\delta\mathbf{E} = \text{DIV } (\mathbf{A}\!: \delta\mathbf{F} - \theta\delta\mathbf{F}^{-t} - \delta\theta\mathbf{F}^{-t}) + \delta(J\rho)\mathbf{G}$$

La sustitución de (83), (84) y (85) conduce al resultado deseado.

□

Nota 5
La ecuación (86) es una linealización en la descripción material. El tensor de dos puntos $\mathbf{A}$ tiene la estructura $A_{iAjB} = \partial P_{iA}/\partial F_{jB}$ y puede reemplazarse por la expresión siguiente

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{S} \otimes \mathbf{1} \qquad \text{o} \qquad A_{iAjB} = 2F_{iC}F_{jD}D_{CADB} + S_{AB}\delta_{ij} \tag{87}$$

donde $\mathbf{D} = \partial \mathbf{S}/\partial \mathbf{C}$ (es decir, $D_{CADB} = \partial S_{CA}/\partial C_{DB}$) es el segundo tensor tangente elástico de orden cuatro. Por simetría del segundo tensor de tensiones efectivas de Piola–Kirchhoff $\mathbf{S}$ y del tensor de Cauchy–Green a la derecha $\mathbf{C}$ y por el axioma de indiferencia material, el tensor $\mathbf{D}$ posee tanto la simetría mayor como la menor.

Nota 6
Obsérvese que la variación de la transformada de Piola $\mathbf{U}$ no es igual a la transformada de Piola de la variación de $\mathbf{u}$, es decir, $\delta\mathbf{U} \equiv \delta(J\mathbf{F}^{-1} \cdot \delta\mathbf{u}) \neq J\mathbf{F}^{-1} \cdot \delta\mathbf{u}$. Por tanto, el argumento del operador DIV en el último término de (86) no puede reemplazarse por $\delta\mathrm{U}$.

La expresión correlativa a (86) en descripción espacial puede derivarse directamente de la transformación de Piola. Por ejemplo, admítase que los tensores de elasticidad tangente $\mathbf{a}$ y $\mathbf{d}$ se definen mediante una aplicación progresiva (*push–forward*) sobre cada índice mayor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$.

$$a_{iajb} = F_{aA}F_{bB}A_{iAjB} \tag{88a}$$

$$d_{ijkl} = 2F_{iA}F_{jB}F_{kC}F_{lD}D_{ABCD} \tag{88b}$$

La linealización de $\mathbf{E}$ en la descripción espacial toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\circ}\mathrm{div}\ (\mathbf{a}^{\circ}\colon \mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u}) + \mathrm{div}\ (\theta^{\circ}\mathrm{grad}^{t}\ \delta\mathbf{u}) - \\ - \mathrm{grad}\ (\delta\theta) + J^{\circ}\rho_{w}\mathrm{div}\ (\delta\mathbf{u})\mathbf{g}^{\circ}\end{aligned} \tag{89}$$

donde $\mathbf{g}^{\circ} \equiv \mathbf{G}^{\circ}$.

Una fórmula equivalente a (89) que usa el tensor de elasticidad tangente $\mathbf{d}$ en descripción espacial es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\circ} + \mathrm{div}\ [(\mathbf{d}^{\circ} + \boldsymbol{\tau}^{\circ} \otimes \mathbf{1})\colon \mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u}] + \mathrm{div}\ (\theta^{\circ}\mathrm{grad}^{t}\ \delta\mathbf{u}) - \\ - \mathrm{grad}\ (\delta\theta) + J^{\circ}\rho_{w}\mathrm{div}\ (\delta\mathbf{u})\mathbf{g}^{\circ}\end{aligned} \tag{90}$$

donde $(\boldsymbol{\tau}^{\circ} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \tau^{\circ}_{jl}\delta_{ik}$ representa la contribución de las "tensiones iniciales" a la rigidez espacial. Se puede establecer la equivalencia entre (86) y (89) observando que $\mathbf{A}\colon \mathrm{GRAD}\ \delta\mathbf{u}$ es la transformación de Piola de $J^{\circ -1}\mathbf{a}^{\circ}\colon \mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u}$ etc. y que grad $J = \mathbf{0}$ [ver (38)].

Proposición 7
Sea $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}^{-t}$ la aplicación regresiva (*pull-back*) del tensor de permeabilidad y sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\tilde{\mathbf{V}}$ las transformadas de Piola $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ respectivamente. Sea además $M = \mathrm{DIV}\ \mathbf{V} + \mathrm{DIV}\ \tilde{\mathbf{V}}$ la ecuación de conservación de volumen para una mezcla saturada de suelo y agua en que tanto el agua como las partículas sólidas sean incompresibles. La linealización de M en $(\phi^{\circ}, \theta^{\circ})$ es

$$\mathcal{L}M = M^{\circ}\mathrm{DIV}\ \delta\mathbf{V} + \mathrm{DIV}\ \delta\tilde{\mathbf{V}} \tag{91}$$

donde

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{V} &= \mathrm{DIV}(J^\circ\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\delta\mathbf{u})\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\mathbf{v}^\circ - J^\circ\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\mathrm{GRAD}\ (\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\mathbf{v}^\circ + \\
&\quad + J^\circ\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\delta\mathbf{v} && (92a)\\
-\delta\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{K}^\circ\cdot\left\{\frac{\mathrm{GRAD}\ \delta\theta}{g\rho_w} + [\mathrm{DIV}(J^\circ\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\delta\mathbf{u})\mathbf{F}^{\circ t} + J^\circ\mathrm{GRAD}^t\ (\delta\mathbf{u})]\cdot\mathbf{l}_3\right\} + \\
&\quad + \delta\mathbf{K}\cdot\left(\frac{\mathrm{GRAD}\ \theta^\circ}{g\rho_w} + J^\circ\mathbf{F}^{\circ t}\cdot\mathbf{l}_3\right) && (92b)\\
-\delta\mathbf{K} &= 2\mathbf{F}^{\circ-1}\cdot\mathrm{symm}(\mathrm{GRAD}\ \delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}^\circ\cdot\mathbf{F}^{\circ t})\cdot\mathbf{F}^{\circ-t} && (92c)
\end{aligned}$$

Demostración
La expresión para M puede obtenerse multiplicando (20) por J y usando la identidad (82) de Piola. Se obtiene la ecuación (91) mediante la variación de M. Obsérvese que $\delta(\mathrm{DIV}\ \mathbf{V}) = \mathrm{DIV}\ \delta\mathbf{V} \equiv \delta\dot{J}$ según (43) y (82). La ley de comportamiento en función de la transformada $\tilde{\mathbf{V}}$ de Piola es

$$\tilde{\mathbf{V}} = J\mathbf{F}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{K}\cdot\left(\frac{\mathrm{GRAD}\ \theta}{g\rho_w} + J\mathbf{F}^t\cdot\mathbf{l}_3\right)$$

donde $\mathbf{K}$ es el tensor obtenido de la aplicación regresiva (*pull–back*) de cada índice menor del tensor de permeabilidad espacial $\mathbf{k}$. Las variaciones $\delta\mathbf{V}$, $\delta\tilde{\mathbf{V}}$ y $\delta\mathbf{K}$ se obtienen inmediatamente según la regla de la cadena.

□

La linealización de M en la descripción espacial se puede escribir como

$$\mathcal{L}M = M^\circ + \delta\dot{J} + \mathrm{div}[\delta(J\tilde{\mathbf{v}})] - \mathrm{grad}\ (J^\circ\tilde{\mathbf{v}}^\circ) : \mathrm{grad}^t\ (\delta\mathbf{u}) \tag{93}$$

donde

$$\delta\dot{J} = J^\circ[\mathrm{div}(\delta\mathbf{v}) - \mathrm{grad}\ \mathbf{v}^\circ : \mathrm{grad}^t\ (\delta\mathbf{u}) + \mathrm{div}(\delta\mathbf{u})\mathrm{div}\ \mathbf{v}^\circ] \tag{94a}$$

$$J^\circ\tilde{\mathbf{v}}^\circ = -\mathbf{k}\cdot\left(\frac{\mathrm{grad}\ \theta^\circ}{g\rho_w} + J^\circ\mathbf{l}_3\right) \tag{94b}$$

$$\delta(J\tilde{\mathbf{v}}) = -\mathbf{k}\cdot\left[\frac{\mathrm{grad}\ (\delta\theta) - \mathrm{grad}\ \theta^\circ\cdot\mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u}}{g\rho_w} + J^\circ\mathrm{div}\ (\delta\mathbf{u})\mathbf{l}_3\right] \tag{94c}$$

Nota 7
Tanto la descripción material como espacial de $\mathcal{L}M$ contienen la variación del vector velocidad del sólido $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{u}}$ debido a la presencia del incremento del Jacobiano $\dot{J}$, lo que es de manejo matemático penoso. Esta variación puede eliminarse mediante una

semidiscretización de la ecuación de conservación del volumen antes de proceder a su linealización mediante por ejemplo diferencias finitas. Esta idea se desarrollará en la sección siguiente en el contexto de la ecuación variacional para la coacción de volumen.

La linealización de la ecuación de equilibrio toma una forma especialmente simple en condiciones de carga sin drenaje. La siguiente proposición resume los resultados cuando en lugar de la variable presión de poros θ se coloca una ley de comportamiento de la forma (76).

Proposición 8

Carga sin drenaje: sea $\mathbf{E} = \text{DIV } \tilde{\mathbf{P}} + \rho_0 \mathbf{G}$ la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, donde $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \theta \mathbf{F}^{-t}$ y $\theta = \theta_n - (\lambda_w/\varphi_0) \text{ tr } (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e \text{ tr}})$ con $\lambda_w \gg 0$. En condiciones de carga muerta y en el límite $\lambda_w \to \infty$, la linealización de $\mathbf{E}$ en ϕ° es

$$\mathcal{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \text{DIV } (\mathbf{A}^*\colon \text{GRAD } \delta \mathbf{u}) \tag{95a}$$

donde

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\circ + (\lambda_w/\varphi_0)\mathbf{F}^{\circ -t} \otimes \mathbf{F}^{\circ -t} + \theta^\circ \mathbf{F}^{\circ -t} \ominus \mathbf{F}^{\circ -1} \tag{95b}$$

con $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$ y $(\mathbf{a} \ominus \mathbf{b})_{ijkl} = a_{il} b_{jk}$ para cualquier par de tensores de orden dos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Demostración

Se demuestra (95), usando la descripción espacial de $\mathcal{L}\mathbf{E}$ dada por (90). En primer lugar se observa que

$$\text{grad}^t \, \delta \mathbf{u} = \mathbf{1} \ominus \mathbf{1}\colon \text{grad } \delta \mathbf{u}$$

donde $(\mathbf{1} \ominus \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$. Obsérvese ahora que la variación de θ es

$$\delta \theta = \delta \left(\theta_n - \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \text{tr } \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e \text{ tr}} \right) = - \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \text{tr } \delta \boldsymbol{\epsilon}^{e \text{ tr}} = - \frac{\lambda_w}{2\varphi_0} \mathbf{b}^{e \text{ tr}-1}\colon \delta \mathbf{b}^{e \text{ tr}}$$

mientras que la variación de $\mathbf{b}^{e \text{ tr}}$ es

$$\delta \mathbf{b}^{e \text{ tr}} = \delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot \mathbf{f}^t) = \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot \mathbf{f}^t + \mathbf{f} \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot \delta \mathbf{f}^t = 2\text{sim}(\text{grad } \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^{e \text{ tr}})$$

puesto que $\delta \mathbf{f} = \partial(\delta \mathbf{u})/\partial \mathbf{x}_n = \text{grad } \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}$ por la regla de la cadena. Por tanto

$$\delta \theta = - \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \mathbf{b}^{e \text{ tr}-1}\colon \text{sim}(\text{grad } \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^{e \text{ tr}}) = - \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \text{div } \delta \mathbf{u}$$

y

$$\begin{aligned} -\text{grad } (\delta \theta) &= \frac{\lambda_w}{\varphi_0} \text{grad } (\text{div } \delta \mathbf{u}) = \text{div } \left[\frac{\lambda_w}{\varphi_0} \text{ div } (\delta \mathbf{u}) \mathbf{1} \right] = \\ &= \text{div } \left[\frac{\lambda_w}{\varphi_0} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\colon \text{grad } \delta \mathbf{u} \right] \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ (compárese el orden de los índices generado por los operadores $\otimes$, $\ominus$ y $\oplus$). Por tanto la linealización de $\mathbf{E}$ en la descripción espacial toma la forma

$$\mathcal{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\circ} + \mathrm{div}\ [(\mathbf{d}_1^{\circ} + \mathbf{d}_2^{\circ})\colon \mathrm{grad}\ \delta\mathbf{u}] \tag{96a}$$

donde

$$\mathbf{d}_1^{\circ} = \mathbf{d}^{\circ}\frac{\lambda_w}{\varphi_0}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}_2^{\circ} = \boldsymbol{\tau}^{\circ}\otimes\mathbf{1} + \theta^{\circ}\mathbf{1}\ominus\mathbf{1} \tag{96b}$$

La ecuación (96) se obtiene mediante aplicaciones regresivas (*pull-backs*) en los índices segundo y cuarto de los tensores elásticos en descripción espacial $\mathbf{d}_1^{\circ}$ y $\mathbf{d}_2^{\circ}$. Una alternativa es la linealización directa de $\tilde{\mathbf{P}}$ que produce $\mathbf{A}^* = \partial\tilde{\mathbf{P}}/\partial\mathbf{F}$ de forma idéntica a (95b). Obsérvese que cuando $\lambda_w \to \infty$, se recupera la condición de incompresibilidad div $\delta\mathbf{u} = 0$ a partir de (96a). Esta condición también produce la eliminación en los términos linealizados de la variación de la densidad másica de referencia. □

Un paso clave en la linealización de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es el cálculo del tensor de elasticidad tangente de la matriz sólida. Se han introducido cuatro en este apartado: los tensores $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{d}$. Cada uno de ellos puede derivarse directamente de los otros. Se concentrará la atención en el tensor espacial $\mathbf{d}$ y se describirá un procedimiento basado en los resultados presentados en[24,25] para calcularlo.

Sea $\mathbf{S}$ el segundo tensor de tensiones efectivas de Piola–Kirchhoff obtenido mediante aplicaciones regresivas (*pull-backs*) a partir del tensor $\boldsymbol{\tau}$ de tensiones efectivas de Kirchhoff definido por la ley de comportamiento (51)

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}^{-t} = \sum_{A=1}^{3}\beta_A\mathbf{M}^{(A)}; \qquad \mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{m}^{(A)}\cdot\mathbf{F}^{-t} \tag{97}$$

Se recuerda que las β_A son los valores principales de las tensiones efectivas de Kirchhoff y que las de $\mathbf{m}^{(A)}$ son diadas formadas por yuxtaposición de las direcciones principales de los alargamientos elásticos, tal como se expresa explícitamente en (50). Usando la regla de la cadena[25], se obtiene la siguiente expresión para el tensor $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{D} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{3}\sum_{B=1}^{3}\frac{\partial\beta_A}{\partial\epsilon_B}\mathbf{M}^{(A)}\otimes\mathbf{M}^{(B)} + \sum_{A=1}^{3}\beta_A\frac{\partial\mathbf{M}^{(A)}}{\partial\mathbf{C}} \tag{98}$$

donde se usa la identidad $\partial\epsilon_B/\partial\mathbf{C} = \mathbf{M}^{(B)}/2$. Una aplicación progresiva (*push–forward*) de todos los índices mayores de $\mathbf{D}$ produce la siguiente expresión en el tensor espacial $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \sum_{A=1}^{3}\sum_{B=1}^{3}\frac{\partial\beta_A}{\partial\epsilon_B}\mathbf{m}^{(A)}\otimes\mathbf{m}^{(B)} + 2\sum_{A=1}^{3}\beta_A\mathbf{d}^{(A)} \tag{99}$$

donde $\mathbf{d}^{(A)}$ es un tensor de cuarto orden completamente definido con la forma general dada en[24] para el caso general en que $\mathbf{b}^e$ tenga autovalores distintos $(\lambda_1^e)^2$, $(\lambda_2^e)^2$ y $(\lambda_3^e)^2$.

Nota 8
Los tensores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{d}$ dados por (98) y (99) respectivamente son algorítmicamente tensores modulares obtenidos al linealizar las correspondientes tensiones algorítmicas. La primera componente contiene la derivada parcial $\partial\beta_A/\partial\epsilon_B$ que puede obtenerse de una linealización congruente del algoritmo de retorno en ejes principales y es por tanto función del modelo específico de plasticidad que se haya escogido para modelar el comportamiento de la matriz de suelo. El segundo término depende tan sólo de las no-linealizaciones geométricas y es válido para cualquier forma de la función energía almacenada. Véase[25] para detalles específicos sobre la implementación del algoritmo.

Linealización de las ecuaciones variacionales

También se pueden aplicar los resultados del apartado anterior a las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la masa en forma variacional. Debido a la sencillez de la linealización en la descripción espacial así como a la de su implementación con elementos finitos, se linealizaron las funciones integrales $G(\phi,\theta,\boldsymbol{\eta})$ y $H(\phi,\theta,\psi)$ usando la descripción espacial para los integrandos calculados sobre el mismo dominio indeformado $\mathcal{B}$. En las siguientes proposiciones se resumen los resultados.

Proposición 9
Sea $G(\phi,\theta,\boldsymbol{\eta})$ la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la forma dada por la ecuación variacional (42). Suponiendo una condición de carga muerta, la linealización de G en $(\phi^\circ,\theta^\circ)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}G = G^\circ &+ \int_{\mathcal{B}} \text{grad}\ \boldsymbol{\eta}{:}\,(\mathbf{d}^\circ + \boldsymbol{\tau}^\circ \otimes \mathbf{1}){:}\,\text{grad}\ \delta\mathbf{u} dV - \\ &- \int_{\mathcal{B}} (\delta\theta \text{div}\ \boldsymbol{\eta} - \theta^\circ \text{grad}^t\ \boldsymbol{\eta}{:}\,\text{grad}\ \delta\mathbf{u}) dV - \\ &- \int_{\mathcal{B}} \rho_w J^\circ \text{div}\ (\delta\mathbf{u})\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{g} dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot\delta\mathbf{t} dA\end{aligned} \tag{100}$$

donde $G^\circ = G(\phi^\circ,\theta^\circ,\boldsymbol{\eta})$ y $\delta\mathbf{u}$, $\delta\theta$ y $\delta\mathbf{t}$ son las variaciones del vector desplazamiento de la presión de poros en el agua de Kirchhoff y el vector tensión respectivamente.

Demostración
La variación

$$\begin{aligned}\delta\int_{\mathcal{B}} \text{grad}\ \boldsymbol{\eta}{:}\,\boldsymbol{\tau} dV = \delta\int_{\mathcal{B}} \text{GRAD}\ \boldsymbol{\eta}{:}\,\mathbf{P} dV = \delta\int_{\mathcal{B}} \text{GRAD}\ \boldsymbol{\eta}{:}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{S} dV = \\ = \int_{\mathcal{B}} \text{GRAD}\ \boldsymbol{\eta}{:}\,(\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}) dV\end{aligned}$$

produce el primer término integral del segundo miembro de (100) tras la sustitución de las identidades $\delta\mathbf{S} = \mathbf{D}{:}\,\delta\mathbf{C} = \mathbf{D}{:}\,\mathbf{F}^t \otimes \mathbf{F}^t{:}\,\text{grad}\ \delta\mathbf{u}$ y $\delta\mathbf{F} = \text{grad}\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{F}$. La variación

$$\delta\int_{\mathcal{B}} \theta \text{div}\ \boldsymbol{\eta} dV = \int_{\mathcal{B}} [\delta\theta \text{div}\ \boldsymbol{\eta} + \theta\delta(\text{div}\ \boldsymbol{\eta})] dV$$

conduce al término integral tras la sustitución de la identidad $\delta(\text{div}\ \boldsymbol{\eta}) = \text{div}\ \delta\boldsymbol{\eta} - \text{grad}^t\ \boldsymbol{\eta}\colon \text{grad}\ \delta\mathbf{u}$ a partir de la demostración de la *Proposición 5* (obsérvese que $\delta\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{0}$). El tercer sumando integral surge de la linealización de ρ_0 basada en (85) donde el último término integral surge de una linealización directa del vector tensión $\mathbf{t}$.

□

Considérese ahora la linealización de $H(\phi, \theta, \psi)$. Tal como se indicó en el apartado anterior, la presencia del término velocidad $\mathbf{v}$ hace la linealización matemáticamente compleja por lo que se elimina desde un principio con una semidiscretización de la ecuación variacional en el mismo tiempo.

Escríbase H en la forma siguiente

$$H(\phi, \theta, \psi) = \int_{\mathcal{B}} \psi \dot{J} dV - \int_{\mathcal{B}} \text{grad}\ \psi \cdot J\tilde{\mathbf{v}} dV - \int_{\mathcal{B}} \psi Q dA \tag{101a}$$

donde

$$J\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\text{grad}\ \theta}{g\rho_w} + J\mathbf{1}_3 \right) \tag{101b}$$

Considérese ahora la siguiente ecuación variacional integrada en el tiempo[4,6]

$$\begin{aligned} H_{\Delta t}(\phi, \theta, \psi) = & \int_{\mathcal{B}} \frac{\psi}{\Delta t} \left(J_{n+1} - \sum_{m=1}^{k} \alpha_m J_{n+1-m} \right) dV - \\ & - \beta_0 \int_{\mathcal{B}} [\beta(\text{grad}\ \psi \cdot J\tilde{\mathbf{v}})_{n+1} + (1-\beta)(\text{grad}\ \psi \cdot J\tilde{\mathbf{v}})_n] dV - \\ & - \beta_0 \int_{\partial\mathcal{B}} \psi[\beta Q_{n+1} + (1-\beta) Q_n] dA \end{aligned} \tag{102}$$

donde $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ y β, β_0 y las α_m son los parámetros de integración en el tiempo. La regla del trapecio se obtiene de (102) si $k = 1$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ y $\beta \in [0, 1]$. La estabilidad y precisión características de este método están bien documentadas[4,50] y son función tan sólo del parámetro de integración trapecial β. Si $\beta = 1$ y $k \geq 1$, se obtiene la familia incondicionalmente estable de métodos de diferencias regresivas en k pasos. La precisión de estos métodos[51,52] depende del orden k así como los valores de β_0 y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ que a su vez son funciones de Δt. Véase[4] para más resultados del comportamiento de estas familias de algoritmos paso a paso en problemas de consolidación.

El objetivo es linealizar (102) para un Δt *fijo*. Esta hipótesis es clave, ya que permitir la variación de Δt produciría los términos convectivos que se desea eliminar. El resultado de la linealización con Δt fijo se resume en las siguientes proposiciones.

Proposición 10
Sea $H_{\Delta t}$ la ecuación integrada en el tiempo de la conservación de volumen de la forma (102). Para un Δt fijo la linealización de $H_{\Delta t}$ en la configuración $(\phi^\circ, \theta^\circ)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}H_{\Delta t} = H^\circ_{\Delta t} &+ \int_\mathcal{B} \frac{\psi}{\Delta t} J^\circ \text{div } \delta\mathbf{u} dV + \beta\beta_0 \int_\mathcal{B} \text{grad } \psi \cdot \frac{\mathbf{k}}{g\rho_w} \cdot \text{grad } \delta\theta dV - \\ &- 2\beta\beta_0 \int_\mathcal{B} \text{grad } \psi \cdot \text{sim}\left(\frac{\mathbf{k}}{g\rho_w} \cdot \text{grad}^t \delta\mathbf{u}\right) \cdot \text{grad } \theta^\circ dV - \\ &- \beta\beta_0 \int_\mathcal{B} \text{grad } \psi \cdot [\text{grad } \delta\mathbf{u} - (\text{div } \delta\mathbf{u})\mathbf{1}] \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}_3 J^\circ dV - \\ &- \beta\beta_0 \int_{\partial\mathcal{B}} \text{grad } \psi \delta Q dA\end{aligned} \tag{103}$$

donde $H^\circ_{\Delta t} = H_{\Delta t}(\phi^\circ, \theta^\circ, \psi)$ y δQ es la variación del flujo de fluido Q.

Demostración
El primer término integral en el segundo miembro de (103) resulta de la linealización de J. Los términos segundo, tercero y cuarto provienen a su vez de la de

$$-\beta\beta_0\delta \int_\mathcal{B} \text{grad } \psi \cdot J\tilde{\mathbf{v}} dV = -\beta\beta_0 \int_\mathcal{B} [\delta(\text{grad } \psi) \cdot J\tilde{\mathbf{v}} + \text{grad } \psi \cdot \delta(J\tilde{\mathbf{v}}) dV$$

donde se ha usado la identidad $\delta(\text{grad } \psi) = -\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \delta\mathbf{u}$ y donde $\delta(J\tilde{\mathbf{v}})$ está dada por (94c). El último término resulta de la linealización de Q. Obsérvese que la condición sin drenaje

$$\delta H_{\Delta t} = \int_\mathcal{B} \psi J^\circ \text{div } \delta\mathbf{u} dV \equiv \int_\mathcal{B} \psi \delta J dV = 0$$

se obtiene de (103) al hacer el límite $\Delta t \to 0$ [ver(75)].

□

Nota 9
A veces se supone que la permeabilidad del esqueleto de suelo varía con la porosidad φ o, lo que es lo mismo, con el Jacobiano J, es decir, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(J)$. En este caso $\mathbf{k}$ deja de ser constante y a los términos de (103) debe añadirse un nuevo término asociado con la variación $\delta\mathbf{k} = (\partial\mathbf{k}/\partial J)\delta J \equiv (\partial\mathbf{k}/\partial J)J\text{div } \delta\mathbf{u}$

Se finaliza esta sección con la siguiente proposición para carga sin drenaje cuando una ley de comportamiento del tipo (76) se introduzca en la ecuación linealizada (100) en sustitución de la variable presión de poros θ.

Proposición 11
Carga sin drenaje: sea $G(\phi, \theta, \boldsymbol{\eta})$ la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la forma dada por la ecuación variacional (42) con $\theta = \theta_n - (\lambda_w/\varphi_0) \text{ tr } (\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{e \text{ tr}})$ y $\lambda_w \gg 0$. En condiciones de carga muerta y en el límite cuando

$\lambda_w \to \infty$, la linealización de G en ϕ° es

$$\mathcal{L}G = G^\circ + \int_{\mathcal{B}} \text{grad } \boldsymbol{\eta}\colon (\mathbf{d}_1^\circ + \mathbf{d}_2^\circ)\colon \text{grad } \delta\mathbf{u}dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \delta\mathbf{t}dA \tag{104}$$

donde $G^\circ = G(\phi^\circ, \theta(\phi^\circ), \boldsymbol{\eta}) \equiv G(\phi^\circ \boldsymbol{\eta}), \mathbf{d}_1^\circ = \mathbf{d}^\circ + (\lambda_w/\varphi_0)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ y $\mathbf{d}_2^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ \otimes \mathbf{1} + \theta^\circ \mathbf{1} \ominus \mathbf{1}$.

Demostración
La demostración se sigue de la *Proposición 8.*

□

Teoría lineal de consolidación

Si la linealización del apartado anterior se realiza alrededor de un estado indeformado libre de tensiones y tan sólo se consideran los términos de primer orden del desplazamiento, se obtiene la teoría de consolidación en pequeñas deformaciones. Además si se supone que el tensor elástico es una función fija de $\mathbf{x}$ y no depende de la carga impuesta, se obtiene la teoría lineal de consolidación de Biot[1,2]. En estas condiciones de simplificación la ecuación (90) se transforma en

$$\text{div } (\mathbf{c}\colon \text{grad } \mathbf{u} - \theta_e \mathbf{l}) = \mathbf{0} \tag{105}$$

donde $\mathbf{u}(x,t)$ es un campo vectorial de desplazamientos infinitesimales de $\mathcal{B}$ medido a partir de una condición autoequilibrada de tensiones *geostáticas*[29], θ_e es el incremento de presión neutra[4], y $\mathbf{c} = \mathbf{c}(x)$ es un tensor independiente del tiempo de cuarto orden de elasticidades en $\mathcal{B}$. El término "grad $\mathbf{u}$" puede reemplazarse por el tensor de deformación infinitesimal "$\boldsymbol{\epsilon}$", donde $\boldsymbol{\epsilon}$ = sim (grad $\mathbf{u}$), debida a la simetría menor de $\mathbf{c}$ respecto a sus índices tercero y cuarto.

La ecuación de conservación del volumen se simplifica de forma semejante. La ecuación (93) se convierte en

$$\text{div } \dot{\mathbf{u}} - \text{div } \left(\frac{\mathbf{k}}{g\rho_w} \cdot \text{grad } \theta_e\right) = 0 \tag{106}$$

donde $\dot{\mathbf{u}}$ es el campo de velocidades del sólido. Las ecuaciones (105) y (106) son equivalentes a las desarrolladas en[1,2] y usadas en [3–13,53,54].

Las funciones $G(\phi, \theta_e, \boldsymbol{\eta})$ y $H(\phi, \theta_e, \psi)$ se simplifican análogamente. La función G toma la forma bilineal

$$G(\phi, \theta_e, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}} (\text{grad } \boldsymbol{\eta}\colon \mathbf{c}\colon \text{grad } \mathbf{u} - \theta_e \text{div } \boldsymbol{\eta}) dV - \int_{\partial\mathcal{B}^t} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{t}dA \tag{107}$$

mientras que la función H toma la forma

$$H(\phi, \theta_e, \psi) = \int_{\mathcal{B}} \left(\psi \text{ div } \dot{\mathbf{u}} + \text{grad } \psi \cdot \frac{\mathbf{k}}{g\rho_w} \cdot \text{grad } \theta_e\right) dV - \int_{\partial\mathcal{B}^h} \psi q dA \tag{108}$$

Finalmente, se puede obtener una simplificación adicional mediante la hipótesis de deformación sin drenaje. Suponiendo que el incremento de presiones neutras θ_e sigue una ley de comportamiento del tipo [ver (76)]

$$\theta_e = -\frac{\lambda_w}{\varphi} \text{div } \mathbf{u} \tag{109}$$

la (105) se convierte en

$$\text{div } (\tilde{\mathbf{c}}: \text{grad } \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{110}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + (\lambda_w/\varphi)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ es el llamado tensor *total* de elasticidad para la mezcla suelo–agua. La ecuación variacional correspondiente a (110) es

$$G(\phi, \theta_e, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}} \text{grad } \boldsymbol{\eta}: \tilde{\mathbf{c}}: \text{grad } \mathbf{u} dV - \int_{\mathcal{B}^t} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{t} dA \tag{111}$$

donde $G = 0$ representa la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo matemático para la consolidación elastoplástica con deformación finita de medios totalmente saturados. El tratamiento algorítmico de la elastoplasticidad en deformaciones finitas para la fase sólida está basado en una descomposición multiplicativa y se acopla con el algoritmo para el fluido mediante la presión neutra de Kirchhoff. Según el leal saber y entender de los autores el tratamiento matemático de esta formulación es único y todavía no ha sido explorado, ni mucho menos publicado, en el contexto del acoplamiento entre desplazamientos sólidos y problemas de difusión. La formulación matemática es válida para cualquier modelo de plasticidad utilizado en la descripción de la ley de comportamiento del esqueleto de suelo.

Un subproducto interesante del estudio es la conclusión de que el concepto de tensiones efectiva de Terzaghi es matemáticamente congruente incluso para deformaciones finitas y que, si existe una medida de tensiones significativa que deba usarse tanto para la formulación en deformaciones finitas como para la ley de comportamiento, esa es precisamente la tensión efectiva. El mejor impacto de esta conclusión es en el campo de la ingeniería geotécnica, donde el concepto de tensión efectiva es la hipótesis universal utilizada en casi tosos los estudios. Una implicación adicional es que los modelos de plasticidad infinitesimal desarrollados en mecánica del suelo pueden usarse igualmente en los estudios de consolidación con deformaciones finitas siempre que estén basados en tensiones efectivas.

La forma incremental y la correspondiente linealización de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la masa no son triviales. En ambas se encuentran presentes términos de orden superior que son esenciales en las iteraciones [vg.: el término $\mathbf{d}^A$ en (100) y o las integrales primera, tercera y cuarta de (104)]. La exclusión de esos términos en los algoritmos de integración basados en incrementos tiene como consecuencia la pérdida de precisión de la solución. En una posterior publicación se indicarán resultados de una simulación numérica que emplea el modelo propuesto.

AGRADECIMIENTOS

La subvención de este estudio en parte proporcionada por el Contrato N° F49620-92-J-0008 de la Air Force Office of Scientific Research y por el Contrato N° MSS-9022448 de la G3S Division of National Science Foundation. También se contó con una ayuda del Ministerio de Educación y Ciencia de España que sirvió para la redacción del artículo durante la estancia en régimen de año sabático del primer firmante en Madrid.

Los autores quieren recordar la ayuda recibida del fallecido J.C. Simó de la Universidad de Stanford su discusión de algunos temas técnicos de la teoría de deformación finita. También quieren agradecer el apoyo y motivación de los profesores G. Calabresi (Universidad de Roma, La Sapienza), J.K. Mitchell (Universidad de California, Berkeley) y R.L. Schiffman (Univeridad de Colorado, Boulder).

REFERENCIAS

1. M.A. Biot, "General Theory of Three–Dimensional Consolidation", *J. Appl. Phys.*, Vol. **12**, pp. 155–164, (1941).
2. M.A. Biot, "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solids", *J. Appl. Phys.*, Vol. **26**, pp. 182–185, (1955) .
3. J.R. Booker y J.C. Small, "An Investigation of the Stability of Numerical Solutions of Biot's Equations of Consolidation, *Int. Solids & Structures*", Vol. **11**, pp. 907–971, (1975).
4. R.I. Borja, "One Step and Linear Multistep Methods for Nonlinear Consolidation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **85**, pp. 239–272, (1991).
5. R.I. Borja, "Composite Newton-PCG and Quasi–Newton Iterations for Nonlinear Consolidation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **88**, pp. 27–60, (1991).
6. R.I. Borja, "Noonlinear Consolidation: Linear Multistep Methods and Iterative Algorithms", *Proc. Seventh Int. Conf. Comput. Methods Advances Geomech.*, G. Beer, J.R. Booker y J.P. Carter (eds.), pp. 1111–1116, Balkema'91, (1991).
7. A.M. Britto y M.J. Gunn, "*Critical State Soil Mechanics via Finite Elements*", John Wiley & Sons, New York, (1987).
8. J.T. Christian, "Two and Three–Dimensional Consolidation", en "*Numerical Methods in Geotechnical Engineering*", C.S. Desai y J.T. Christian (eds.), McGraw-Hill, pp. 399-426, San Francisco, (1977).
9. J.H. Prevost, "Implicit–Explicit Schemes for Nonlinear Consolidation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **39**, pp. 225–239, (1983).
10. J.H. Prevost, "Mechanics of Continuous Porous Media", *Int. J. Engn. Sci*, Vol. **18**, pp. 787–800, (1980).
11. R.L. Schiffman, "The Stress Components of a Porous Media", *J. Geophys. Res.*, Vol. **75**, pp. 4035–4038, (1970).
12. H.J. Siriwardane y C.S. Desai, "Two Numerical Schemes for Nonlinear Consolidation", *Int. J. Numer. Meth. Engn.*,Vol. **17**, pp. 405–426, (1981).
13. J.C. Small, J.R. Booker y E.H. Davis, "Elasto–Plastic Consolidation of Soils", *Int. Solids & Structures*", Vol. **12**, pp. 431–448, (1976).
14. J.P. Carter, J.R. Booker y J.C. Small, "The Analysis of Finite Elasto–Plastic Consolidation", *Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech.*, Vol. **3**, pp. 107–129, (1979).
15. E.H. Lee, "Elastic–Plastic Deformation at Finite Strains", *J. Appl. Mech.*, pp. 1–6, (1969).

16. J. Mandel, "Thermodynamics and Plasticity", en "*Foundations of Continuum Thermodynamics*", J.J. Delgado Domingers, N.R. Nina y J.H. Whitelaw (eds.), Macmillan, pp. 283–304, London, (1974).
17. T.J.R. Hughes, "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate Independent Deviatoric Plasticity", en "*Theoretical Foundations for Large-Scale Computations of Nonlinear Material Behaviour*", S. Nemat–Nasser, R. Asaro y G. Hegemier (eds.), Martinus Nijhoff, The Netherlands, (1984).
18. A. Needleman y V. Tvegaard, "Finite Element Analysis of Localization Plasticity", en "*Finite Elements, Vol. V: Special Problems in Solid Mechanics*", J.T. Oden y G.F. Carey (eds.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1984).
19. J.H. Argyris y J. S. Doltsinis, "On the Large Strain Inelastic Analysis in Natural Formulation – Part I. Quasistatic Problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **20**, pp. 213–252, (1979).
20. R. Hill, "*The Mathematical Theory of Plasticity*", Clarendon, Oxford, (1950).
21. A. E. Green y P.M. Naghdi, "A General Theory of an Elastic–Plastic Continuum", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. **18**, pp. 251–281, (1965).
22. A. E. Green y B.C. McInnis, "Generalized Hypo–Elasticity", *Proc. Roy. Soc.*, Vol. **A57**, pp. 220–230, Edinburgh, (1967).
23. J.C. Nagtegaal y J.E. de Jong, "Some Aspects of Non–Isotropic Work–Hardening in Finite Strain Plasticity", en "*Plasticity of Metals at Finite Strains*", E.H. Lee y R.L. Mallet (eds.), *"Proc. Research Workshop"*, pp. 65–102, Stanford University, (1981).
24. J.C. Simó y R.L. Taylor, "Quasi–Incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches. Continuum Basis and Numerical Algorithms", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **85**, pp. 273–310, (1991).
25. J.C. Simó, "Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engn.*, Vol. **99**, pp. 61–112, (1992).
26. J. Christoffersen, M.M. Meharbadi y S. Nemat–Nasser, "A Micromechanical Description of Granular Material Behavior", *J. Appl. Mech.*, Vol. **48**, pp. 339–344, (1981).
27. S. Nemat–Nasser y M.M. Meharbadi, "Micromechanically Based Rate Constitutive Descriptions for Granular Materials", en "*Mechanics of Engineering Materials*", C.S. Desai y R.H. Gallagher (eds.), John Wiley & Sons, pp. 451–463, New York, (1984).
28. S. Nemat–Nasser, "Overall Stresses and Strains in Solids with Microstructure", en "*Modelling Small Deformations of Polycrystals*", J. Gittus y J. Zarka (eds.), Elsevier, New York, pp. 41–64, (1986).
29. T.W. Lambe y R.V. Whitman, "*Soil Mechanics*", John Wiley & Sons, New York, (1969).
30. L. Malvern, "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).
31. J.E. Marsden y T.J.R. Hughes, "Mathematical Foundations of Elasticity", Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
32. R.J. Atkin y R.E. Craine, "Continuum Theories of Mixtures: Basic Theory and Historical Development", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. **29**, pp. 209–244, (1976).
33. R.M. Bowen, "Theory of Mixtures", en "*Continuum Physic 3*", A.C. Eringen (ed.), Academic Press, pp. 1–27, New York, (1976).
34. A.C. Eringen y J.D. Ingram, "A Continuum Theory of Chemically Reacting Media I", *Int. J. Engn. Sci*, Vol. **3**, pp. 197–212, (1965).
35. J.D. Ingram y A.C. Eringen, "A Continuum Theory of Chemically Reacting Media II :

Constitutive Equations of Reacting Fluid Mixtures", *Int. J. Engn. Sci*, Vol. **5**, pp. 289–322, (1967).
36. A.E. Green y P.M. Naghdi, "A Dynamic Theory of Interacting Continua", *Int. J. Engn. Sci*, Vol. **3**, pp. 231–241, (1965).
37. C. Truesdell y R. Toupin, "*The Classical Field Theories*", Handbuch der Physik III(1), S. Flügge (ed.), Springer Verlag, Berlin, (1960).
38. C. Truesdell y W. Noll, "*The Nonlinear Field Theories of Mechanics*", Handbuch der Physik III(3), S. Flügge (ed.), Springer Verlag, Berlin, (1965).
39. J. Bear, "Dynamics of Fluids in Porous Media", Dover, New York, (1972).
40. H. Darcy, "Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon", Dalmont, París, (1856).
41. P.S. Huyakorn y G. Pinder, "Computational Methods in Subsurface Flow", Academic Press, New York, (1983).
42. K. Terzaghi, "Theoretical Soil Mechanics", John Wiley & Sons, New York, (1943).
43. M. Ortiz y E.P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *Int. J. Numer. Meth. Engn.*, Vol. **21**, pp. 1561–1576, (1985).
44. R.I. Borja, "Elasto–Plastic Consolidation at Finite Strain", *"Proc. Eighth Int. Conf. Comp. Methods Advances in Geomech."*, (1994).
45. J.E. Marsden, "On Product Formulas for Nonlinear Semigroups", *J. Func. Analysis*, Vol. **13**, pp. 51–72, (1973).
46. D. Ebin, "The Motion of Slightly Compressible Fluids Viewed as a Motion with Strong Constraining Force", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **35**, pp. 451–485, (1970).
47. H. Rubin y P. Ungar, "Motion under a Strong Constraining Force", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **10**, pp. 65–87, (1957).
48. R.I. Borja, "Analysis of Incremental Excavations Based on Critical State Theory", *J. Geotech. Engn.*, ASCE **116**, pp. 964–985, (1990).
49. R.I. Borja, "Free Boundary, Fluid Flow and Seepage Forces in Excavations", *J. Geotech. Engn.*, ASCE **118**, pp. 125–146, (1992).
50. T.R.J. Hughes, "Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability", en "*Computational Methods for Transient Analysis*", T.J.R. Hughes y T. Belytschko (eds.), North–Holland, pp. 67–155, Amsterdam, (1983).
51. C.W. Gear, "*Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*", Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1971).
52. P. Löstedt y L.R. Petzold, "Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations with Algebraic Constraints I: Convergence Results for Backward Differentiaton Formulas", *Math. Comp.*, Vol. **46**, (174), pp. 491–516, (1986).
53. C.W. Cryer, "A Comparison of the Three–Dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. **16**, pp. 401–412, (1963).
54. J. Mandel, "Consolidation de sols (étude mathématique), *Géotechnique*, Vol. **3**, pp. 287–299, (1953).