

Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones

Ernest Bladé i Castellet
Manuel Gómez Valentín

Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones

Ernest Bladé i Castellet
Manuel Gómez Valentín

FLUMEN Dinàmica Fluvial i Enginyeria Hidrològica

Monografía CIMNE N°-97, Junio 2006

Departament d'Enginyeria de la Construcció
Universitat Politècnica de Catalunya

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Primera edición: Junio 2006

**MODELACIÓN DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE SOBRE CAUCES NATURALES.
ANÁLISIS INTEGRADO EN UNA Y DOS DIMENSIONES**

Monografía CIMNE M97

© Los autores

ISBN: 84-95999-98-6

Depósito legal: B-35711-2006

Resumen

El conocimiento del funcionamiento hidráulico de un río durante el transcurso de una avenida es fundamental para la resolución de gran variedad de problemas de ingeniería hidráulica y dinámica fluvial, como delimitación de zonas inundables, diseño de encauzamientos y estructuras hidráulicas, estabilización de márgenes, estudios de rotura de presa, proyectos de rehabilitación de ríos, o determinación del riesgo asociado a episodios extraordinarios de lluvia. Para ello es necesario el estudio del flujo de agua en lámina libre en régimen variable y con geometrías irregulares.

En esta monografía se presenta el trabajo de desarrollo de herramientas de modelación numérica de la tesis doctoral *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado con esquemas en volúmenes finitos en una y dos dimensiones* (Bladé, 2005). La tesis se ha desarrollado dentro del grupo de investigación FLUMEN, en el programa de doctorado de Ingeniería Civil de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

El objetivo principal es la puesta a punto de una herramienta para la modelación matemática del flujo de agua en lámina libre, en régimen variable, con geometrías irregulares como son los cauces naturales (programa CARPA). Los esquemas desarrollados permiten modelar con precisión flujos de agua discontinuos o con singularidades (cambios de régimen, frentes de onda, resaltos hidráulicos), como ocurre en la realidad durante el transcurso de una avenida en gran parte de los ríos, sobretudo en los cauces torrenciales que son predominantes en nuestro entorno. Se desarrollan esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa, explícitos y basados en la técnica de los volúmenes finitos. Este tipo de esquemas *shock capturing* son los más adecuados para la simulación de flujos con singularidades. Los esquemas desarrollados son de alta resolución, en el sentido de tener segundo orden de precisión fuera de las discontinuidades mientras que en éstas no se producen oscilaciones espurias (no reales) ni más disipación de la debida (como ocurriría con esquemas de primer orden de precisión).

La geometría de los ríos condiciona las características del flujo hidráulico que se produce. Cuando existe una dirección del flujo predominante se puede utilizar una aproximación unidimensional, pero en ocasiones (confluencias de ríos, flujos alrededor de estructuras, cauces compuestos, curvas, desbordamiento de cauces) esto no es así debiéndose recurrir a una aproximación bidimensional. Esta última mucho más costosa en términos de información necesaria, complejidad de desarrollo del modelo y tiempo de cálculo. En este trabajo se desarrollan nuevas metodologías para la modelación en una y en dos dimensiones, a la vez que se realiza la integración de ambas para disponer de modelos que permitan simular grandes áreas considerando una aproximación unidimensional donde ésta sea suficiente, y en dos dimensiones donde las características geométricas o del flujo así lo aconsejen. De esta manera se mejora la eficiencia de las metodologías existentes actualmente.

Las características particulares de las ecuaciones de Saint Venant determinan que las metodologías válidas para otros sistemas de ecuaciones hiperbólicos presenten problemas que conducen a errores importantes en la solución. En una dimensión, y para geometrías irregulares, las ecuaciones presentan una variación espacial del vector de flujo debido a los cambios geométricos que debe tenerse en cuenta. Esto, junto con un correcto tratamiento del término independiente de las ecuaciones, que consigue un correcto balance con la discretización del resto de la ecuación, permite desarrollar esquemas de alta resolución en una dimensión de aplicación a ríos.

Para la aproximación bidimensional también se consigue un correcto balance del término independiente discretizado, así como el mojado y secado del dominio, y se permite la incorporación de agua de lluvia al modelo. De esta manera se dispone también de un modelo hidrológico distribuido de transformación lluvia escorrentía totalmente integrado en un modelo hidráulico. Para la discretización del dominio se pueden utilizar tanto elementos triangulares como cuadriláteros, y todo el sistema se ha implementado en GiD, una potente y amigable interfaz de preproceso y postproceso.

Gran parte de la teoría matemática en la que se basan los esquemas de alta resolución es válida tan sólo para ecuaciones diferenciales más simples que las ecuaciones de Saint Venant, por lo que se realiza una exhaustiva verificación de la metodología desarrollada. La verificación se realiza mediante la comparación con problemas con solución analítica, otros modelos numéricos, y experiencias de laboratorio. Finalmente se presentan en este trabajo una serie de aplicaciones de la herramienta desarrollada, para la resolución de problemas reales de ingeniería y dinámica fluvial.

Abstract

Understanding the hydraulic behaviour of rivers during floods is crucial for the resolution of a variety of problems of hydraulic engineering and river dynamics as flood areas mapping, embankments and hydraulic structures design, streambank stabilization, dam break studies, river rehabilitation, or risk assessment in extraordinary precipitation events. That is the reason for studying unsteady open channel flow in irregular geometries through the development of numerical simulation tools.

This monograph presents the numerical modelling tools developed in the PhD. thesis *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado con esquemas en volúmenes finitos en una y dos dimensiones* (Bladé, 2005). This thesis was developed within the Research Group FLUMEN, in the Civil Engineering Doctorate Programme of the Civil Engineering School of Barcelona.

The main objective of this work is generating mathematical modelling tools for unsteady open channel flow in irregular geometries, as natural rivers are (CARPA program). The developed numerical schemes are able to properly simulate discontinuous flows (front waves, hydraulic jumps, transcritical flows) as occurs during a real flood in most rivers, especially those in Mediterranean areas. Explicit numerical schemes, based on the finite volumes technique, for the resolution of the Saint Venant equations in conservative form, are developed. These shock capturing schemes are most suitable for the simulation of flows with discontinuities. The developed schemes are high resolution schemes: second order precision away from flow discontinuities, no spurious oscillations and no extra dissipation (as with first order schemes) around them.

Flow patterns in rivers depend on their geometry. When there exists a predominant flow direction a one dimensional approach can be used, but other times (river confluences, flow around structures, compound channels, river channel overflow) a two dimensional approach is needed. This last one is more expensive as needs more topographic information, model development is complex, and computational time is greater. New methodologies for one and two dimensional modelling are developed, but also both approaches have been integrated in order to be able to model big areas using a one dimensional approach when it is enough, and a two dimensional one when it is required by flow or geometry characteristics. In that way the efficiency of existing modelling methodologies is improved.

Due to the special characteristics of Saint Venant equations, modelling methods that work for other hyperbolic equations can lead to important errors. In one dimension and irregular geometries, the flux vector of the equations has a spatial dependency on the geometry variations which must be taken into account. That, together with a correct treatment of the equations source term, allows a correct balance with the discretised term of the rest of the equations, leading to one dimensional high resolution schemes for irregular geometries.

The correct balance of the discretised source term is also achieved in two dimensions. Also, wetting and drying of the domain and precipitation inputs are implemented. In such way, the developed model can also be seen as a hydrological distributed rainfall-runoff transformation model fully integrated in a hydraulic model. The domain discretisation can be done using triangles or quadrilaterals, and the whole system has been integrated in the user friendly GiD pre-process and post-process interface.

High resolution schemes are based in a mathematical theory which is only valid for hyperbolic equations much simpler than Saint Venant equations. For that reason an exhaustive verification of the methodology is carried out. Verification is done with comparison against problems with analytical solution, other numerical models and laboratory experiments. Finally, some real applications of the methodology to engineering and river dynamics problems are presented.

Notación

a :	velocidad del sonido
a_{ij} :	elementos de la matriz \mathbf{A}
A :	Área de la sección mojada
\tilde{A} :	sección mojada en el contorno de un volumen finito unidimensional
\mathbf{A} :	Jacobiano del vector de flujo
\mathbf{A}_i :	i -ésima matriz de un sistema hiperbólico general
\mathbf{A} :	Jacobiano del tensor de flujo en la dirección perpendicular a un contorno
b :	ancho superficial
\mathbf{b} :	fuerza por unidad de masa
\mathbf{b}_c :	fuerza de Coriolis
c :	celeridad
\tilde{c} :	celeridad en el contorno de un volumen finito
C :	número de Courant
C :	Coefficiente de Chezy
C^+, C^- :	líneas características
C_μ :	Coefficiente empírica en el modelo $k-\varepsilon$
e_{ij} :	componentes de \mathbf{E}
\mathbf{e} :	vectores propios por la derecha de \mathbf{A}
$(\tilde{\mathbf{e}}_k)_{i,j}$:	k -ésimo vector propio de \mathbf{A} en el contorno común a los elementos i y j
E :	energía
\mathbf{E} :	parte simétrica del tensor velocidad de deformación
f :	coeficiente de Coriolis
\mathbf{F}^* :	flujo numérico de \mathbf{F}
\mathbf{F} :	vector o tensor de flujo
\mathbf{F}_0 :	flujo en $x=0$
\mathbf{F}_i :	flujo evaluado en el elemento i
\mathbf{F}_L :	flujo evaluado en el estado estacionario de la izquierda en un problema de Riemann
\mathbf{F}_R :	flujo evaluado en el estado estacionario de la derecha en un problema de Riemann
\mathbf{F}_{i,w_i}^* :	flujo numérico en el lado w_i del elemento i
Fr :	número de Froude
Fr_R, Fr_L :	número de Froude a derecha e izquierda de una discontinuidad
g :	aceleración de la gravedad
h :	calado
\tilde{h} :	calado en el contorno de un volumen finito
\mathbf{H} :	término independiente o término fuente de las ecuaciones de Saint Venant
\mathbf{H}^1 :	parte del independiente de las ecuaciones de Saint Venant correspondiente a la pendiente del fondo
\mathbf{H}^2 :	parte del independiente de las ecuaciones de Saint Venant correspondiente a la pendiente motriz
\mathbf{H}_i^* :	expresión numérica de la integral del término independiente \mathbf{H} en el elemento i
h_R, h_L :	calado a derecha e izquierda de una discontinuidad
I :	intensidad de precipitación
\mathbf{I} :	matriz identidad

I_1	fuerza debida a la presión del agua en una sección
I_2	fuerza de presión del contorno en un tramo de río
J	calor
J^+, J^-	variables características o cuasi-invariantes de Riemann
k	energía cinética media por unidad de masa
L	pérdidas de precipitación
l_i	componentes de los vectores propios por la izquierda de \mathbf{A}
l_{i,w_l}	longitud del lado w_l del elemento i
m	masa
n	coeficiente de rugosidad de Manning
n_{eq}	coeficiente de rugosidad de Manning equivalente
n_x	componente x de la normal exterior a un contorno
n_y	componente y de la normal exterior a un contorno
\mathbf{n}_{i,w_l}	normal exterior al elemento i por el lado w_l
\mathbf{N}_1	vector normal a una superficie característica
n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}	componentes de y de \mathbf{N}_1
\mathbf{N}'_1	vector normal a una superficie característica cuya componente según el eje de tiempos es 1
$n'_{1x}, n'_{1y}, n'_{1z}$	componentes de y de \mathbf{N}'_1
p	presión
Q	caudal
\tilde{Q}	caudal en el contorno de un volumen finito
R^+, R^-	invariantes de Riemann generalizados
R_h	radio hidráulico
$s(t)$	posición de una discontinuidad en el tiempo t
S	entropía
S	velocidad de propagación de una discontinuidad
S_0	pendiente
$S_{0x_1}, S_{0x_2}, S_{0x_3}$	pendiente en las direcciones x_1, x_2, x_3
S_f	pendiente motriz
$S_{fx_1}, S_{fx_2}, S_{fx_3}$	pendiente motriz en las direcciones x_1, x_2, x_3
S_{ij}	superficie definida por el centro del elemento i y su lado común con el elemento j
t	tiempo
t^n	tiempo en el instante n
T	temperatura absoluta
TV	Variación total
$T_{x_i x_j}$	tensiones efectivas
u_x, u_y, u_z	componentes de la velocidad en la dirección de los ejes coordenados
u_1, u_2, u_3	componentes de la velocidad en la dirección de los ejes coordenados
u	componente de la velocidad en la dirección x
\tilde{u}	valor de u en el contorno de un elemento de volumen
\bar{u}	promedio temporal de u
u'	fluctuaciones turbulentas de u

u_L, u_R :	valor de la variable u a izquierda y derecha de una discontinuidad
\mathbf{U} :	vector de variables dependientes de las ecuaciones de Saint Venant
\mathbf{U}_i^n :	valor del vector de variables dependientes en el elemento i y el instante n
\mathbf{U}_i^C :	valor del vector de variables dependientes en el elemento i y el corrector del esquema de MacCormack
\mathbf{U}_i^P :	valor del vector de variables dependientes en el elemento i y el predictor del esquema de MacCormack
v :	componente de la velocidad en la dirección y
\bar{v} :	valor de u en el contorno de un elemento de volumen
V :	volumen finito
\mathbf{V} :	velocidad
W :	trabajo
x, y, z :	ejes coordenados
x_1, x_2, x_3 :	ejes coordenados
z_0 :	cota de fondo
$(\tilde{\alpha}_k)_{i,j}$:	fuerza de la onda k evaluada en el contorno común a los elementos i y j
$(\tilde{\beta}_k)$:	k -ésimo coeficiente de discretización del término independiente \mathbf{H}^1 en el contorno común a los elementos i y j
δ_{ij} :	delta de Kronecker
ε :	tasa de disipación de la energía cinética media por unidad de masa
φ :	valores propios por la derecha de \mathbf{A} con la corrección de Harten y Hymann
φ_k :	K -ésimo valor propio de \mathbf{A} con la corrección de entropía de Harten y Hymann
φ_1, φ_2 :	coordenadas espaciales normal y tangente a una superficie característica
Φ :	superficie característica
λ :	valores propios por la derecha de \mathbf{A}
$\tilde{\lambda}$:	valor de λ en el contorno de un volumen finito
$(\tilde{\lambda}_k)_{i,j}$:	k -ésimo valor propio de \mathbf{A} en el contorno común a los elementos i y j
μ :	viscosidad dinámica
ψ :	función de limitación
Ψ :	escalar pasivo
ρ :	densidad
σ :	tensor de tensiones
τ_0 :	tensiones contra el fondo
$\tau_{0x_1}, \tau_{0x_2}, \tau_{0x_3}$:	componentes de las tensiones contra el fondo en las direcciones x_1, x_2, x_3
τ_s :	tensiones contra la superficie libre
$\tau_{sx_1}, \tau_{sx_2}, \tau_{sx_3}$:	componentes de las tensiones contra el fondo en las direcciones x_1, x_2, x_3
$\boldsymbol{\tau}$:	tensor de tensiones viscosas
ν :	viscosidad dinámica
ν :	$\lambda \Delta t / \Delta x$
ν_t :	viscosidad turbulenta
ω :	velocidad angular de rotación de la tierra
ω :	variable de Escoffier

El formato **negrita** indica vector, matriz o tensor

Índice

ÍNDICE	9
1. OBJETIVOS, DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO Y RESUMEN DE RESULTADOS	13
1.1. <i>Objetivos</i>	13
1.2. <i>Descripción del trabajo</i>	15
1.3. <i>Resumen de resultados</i>	17
2. MODELACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE AGUA EN LÁMINA LIBRE. EVOLUCIÓN Y ANTECEDENTES	19
2.1. <i>Esquemas unidimensionales</i>	21
2.1.1. Régimen permanente.....	21
2.1.2. Régimen variable.....	21
2.1.2.1 Esquemas unidimensionales clásicos.....	21
2.1.2.2 Esquemas unidimensionales de alta resolución	23
2.2. <i>Esquemas bidimensionales</i>	25
2.2.1. Esquemas bidimensionales clásicos	25
2.2.2. Esquemas bidimensionales de alta resolución.....	27
2.3. <i>Modelos comerciales</i>	29
3. FLUJO VARIABLE EN LÁMINA LIBRE.....	31
3.1. <i>Ecuaciones de Saint Venant bidimensionales</i>	32
3.1.1. Ecuaciones del flujo bidimensional en lámina libre o ecuaciones de Saint Venant	32
3.1.2. Términos de las ecuaciones de Saint Venant	33
3.1.2.1 Aceleración local	33
3.1.2.2 Aceleración convectiva.....	33
3.1.2.3 Pendiente de la superficie libre	33
3.1.2.4 Tensiones en el fondo	33
3.1.2.5 Tensiones tangenciales en la superficie libre	34
3.1.2.6 Fuerzas por unidad de masa.....	34
3.1.2.7 Tensiones efectivas	34
3.1.2.8 Turbulencia en el flujo en lámina libre	35
3.1.3. Simplificación de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones	36
3.2. <i>Ecuaciones de Saint Venant unidimensionales</i>	38
3.3. <i>Análisis de las ecuaciones de Saint Venant</i>	40
3.3.1.1 Caso unidimensional.....	40
3.3.1.2 Caso bidimensional.....	40
3.3.2. Teoría de las características.....	41
3.3.2.1 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces prismáticos rectangulares.....	43
3.3.2.2 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces cualesquiera	45
3.3.2.3 Características para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales.....	45
Dominio de dependencia y zona de influencia.....	48
Condiciones de compatibilidad en las superficies características	48
3.4. <i>Soluciones discontinuas y propagación de ondas</i>	50
3.4.1. Campos característicos.....	51
3.4.2. Onda simple e invariantes de Riemann generalizados	51
3.4.3. Las condiciones de Rankine-Hugoniot en una dimensión.....	54
3.4.4. Propagación de ondas y soluciones discontinuas para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales	55
3.4.5. Condiciones de Rankine-Hugoniot en dos dimensiones	56
3.4.6. El problema de Riemann.	57
3.4.6.1 El problema de Riemann para sistemas hiperbólicos unidimensionales a coeficientes constantes 58	
3.4.6.2 Relaciones integrales en el problema de Riemann.....	60
3.4.6.3 El problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales.....	61
3.4.6.4 El problema de la rotura de presa en una dimensión.	62
4. CONSIDERACIONES SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS	65
4.1. <i>Formulación integral de las leyes de conservación y discretización en volúmenes finitos</i>	65

4.2.	<i>Solución débil</i>	69
4.3.	<i>Esquemas explícitos y esquemas implícitos</i>	70
4.4.	<i>Esquemas centrales y esquemas upwind</i>	72
4.5.	<i>Algunas propiedades de los esquemas numéricos</i>	74
4.5.1.	Orden de diferenciación.....	74
4.5.2.	Convergencia, consistencia y estabilidad.....	75
4.5.3.	Esquemas conservativos.....	75
4.5.4.	Unicidad y condición de entropía.....	76
4.5.5.	Monotonicidad.....	77
4.5.6.	Oscilaciones espurias, dispersión y disipación.....	79
4.5.7.	Variación Total Decreciente y compatibilidad de datos.....	80
5.	ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT UNIDIMENSIONALES.....	83
5.1.	<i>Esquema conservativo de primer orden: Método de Godunov en una dimensión</i>	84
5.1.1.	Approximate Riemann Solver de Roe en una dimensión.....	85
5.1.1.1	Término independiente en el esquema Godunov+Roe 1D.....	88
5.1.2.	Dependencia espacial del vector de flujo en geometrías irregulares.....	90
5.2.	<i>Esquemas de segundo orden en una dimensión</i>	93
5.2.1.	Esquema WAF en una dimensión.....	93
5.3.	<i>Esquemas de alta resolución en una dimensión (Métodos de segundo orden y variación total decreciente)</i>	95
5.3.1.	Esquema WAF TVD en una dimensión.....	95
5.3.1.1	Término independiente en el esquema WAF TVD 1D.....	100
5.4.	<i>Condiciones de contorno en una dimensión</i>	101
5.5.	<i>Preservación del régimen permanente</i>	104
6.	ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT EN DOS DIMENSIONES.....	107
6.1.	<i>Esquema conservativo de primer orden: Método de Godunov en dos dimensiones</i>	107
6.1.1.	Approximate Riemann Solver de Roe.....	108
6.1.2.	Término independiente en el esquema Godunov +Roe 2D.....	109
6.2.	<i>Esquemas de segundo orden en dos dimensiones</i>	112
6.2.1.	McCormack en dos dimensiones.....	112
6.3.	<i>Esquemas de alta resolución en dos dimensiones</i>	114
6.3.1.	WAF TVD en dos dimensiones.....	114
6.3.1.1	Término independiente en el esquema WAF TVD 2D.....	114
6.4.	<i>Condiciones de contorno en dos dimensiones</i>	116
7.	DESCRIPCIÓN DEL MODELO CARPA.....	121
7.1.	<i>Estructura del modelo</i>	121
7.2.	<i>Módulo bidimensional</i>	122
7.2.1.	Mojado y secado.....	123
7.2.2.	Modelo hidrológico.....	124
7.3.	<i>Módulo unidimensional</i>	126
7.3.1.	Mojado y secado.....	126
7.3.2.	Cauces compuestos.....	127
7.4.	<i>Ensamblaje módulos 1D y 2D</i>	129
7.4.1.	Cambio de dominio en el sentido del flujo.....	129
7.4.2.	Desbordamiento lateral del río.....	131
7.4.2.1	Desbordamiento lateral del río en el dominio unidimensional.....	132
7.4.2.2	Desbordamiento lateral del río en el dominio bidimensional.....	133
7.5.	<i>Preproceso y postproceso</i>	134
7.5.1.	Importación de geometría a partir de modelos digitales del terreno.....	134
7.5.2.	Elaboración de mallas de cálculo y asignación de propiedades y condiciones de contorno.....	136
7.5.3.	Visualización de resultados.....	137
8.	VERIFICACIÓN.....	139
8.1.	<i>Introducción</i>	139
8.2.	<i>Régimen permanente. Una dimensión</i>	140
8.2.1.	Canal rectangular con ancho y cota de solera variable.....	140
8.2.2.	Sobreelevación de solera suave.....	141
8.2.3.	Canal no prismático con solución analítica.....	144
8.2.3.1	Régimen lento.....	144
8.2.3.2	Régimen rápido.....	145
8.2.3.3	Régimen transcrito (lento a rápido).....	146

8.2.3.4	Resalto hidráulico	147
8.2.4.	Canal trapecial no prismático	148
8.2.5.	Niveles de agua en el río Llobregat.....	150
8.3.	<i>Régimen permanente. Dos dimensiones</i>	153
8.3.1.	Ondas cruzadas.....	153
8.4.	<i>Conservación del volumen en avance sobre fondo seco</i>	158
8.4.1.	Canal con dos niveles	158
8.4.2.	Concentración de agua en una cubeta	159
8.4.3.	Canal con sobreelevación de solera.....	159
8.4.4.	Área con pendientes convergentes	160
8.5.	<i>Conexión entre dominios 1D y 2D</i>	161
8.5.1.	Conexión en el sentido del flujo.....	161
8.5.2.	Conexión por desbordamiento lateral.....	165
8.6.	<i>Rotura de presa</i>	169
8.6.1.	Rotura de presa ideal con el esquema 1D.....	169
8.6.2.	Rotura ideal con el esquema 2D.....	170
8.6.3.	Rotura de presa asimétrica	171
8.7.	<i>Resalto móvil en un canal de pendiente fuerte</i>	173
8.8.	<i>Verificación experimental</i>	176
8.8.1.	Distribución del flujo en un cruce de calles	176
8.8.1.1	Distribución de caudales	176
8.8.1.2	Campos de calados y velocidades.....	177
8.8.2.	Modelo reducido del río Besòs.....	182
8.8.3.	Modelo reducido del río Francolí	188
9.	APLICACIONES.....	191
9.1.	<i>Canal de slalom de Ponts en el río Segre</i>	191
9.1.1.	Introducción	191
9.1.2.	Resultados	193
9.2.	<i>Rotura de balsa de riego en Montoliu</i>	195
9.3.	<i>Confluencia de los ríos Fluvià y Llierca</i>	197
9.3.1.	Introducción	197
9.3.2.	Resultados en todo el tramo de estudio.....	198
9.3.3.	Resultados en el entorno de los puentes	201
9.3.4.	Modificación geométrica de la pila derecha del puente antiguo.	202
9.4.	<i>Ramflood. Sistema de ayuda a la toma de decisiones para determinación y gestión del riesgo de inundación</i>	204
9.4.1.	Attica. Propagación de avenida en zona urbana.....	204
9.4.2.	Tramo final del río Llobregat entre Martorell y el mar	209
9.5.	<i>Estructura de separación de caudales en un cauce torrencial</i>	219
	REFERENCIAS	223

1. Objetivos, descripción del trabajo y resumen de resultados

1.1. Objetivos

El conocimiento del funcionamiento hidráulico de un río durante el transcurso de una avenida es fundamental para la resolución de gran variedad de problemas de ingeniería y dinámica fluvial: delimitación de zonas inundables, diseño de encauzamientos, obras de protección frente a avenidas, proyectos de recuperación medioambiental de cauces, diseño de embalses o balsas de laminación, estabilización de las márgenes de un río, optimización hidráulica de obras singulares en ríos (puentes, desvíos, confluencias), determinación del riesgo de daños humanos y materiales en episodios extraordinarios de lluvia o sucesos de rotura de balsa o presa, diseño de obras de drenaje, etc.

Para ello es necesario el estudio del flujo de agua en lámina libre en régimen no permanente. Para geometrías complicadas, como son las de los ríos, esto solamente puede hacerse mediante modelos físicos a escala reducida o mediante la modelación numérica. Por ello es deseable disponer de herramientas precisas para la modelación numérica de la hidrodinámica en cauces naturales, altamente irregulares, algo de lo que hasta el momento no se disponía.

En el campo de la modelación numérica del flujo en lámina libre existe una gran variedad de modelos comerciales, modelos no comerciales, y esquemas numéricos, consecuencia de años de investigación para conseguir un esquema numérico con posibilidad de aplicación a casos reales, que a su vez sea fiable y robusto. El trabajo que se presenta se basa en la investigación de la tesis doctoral de Bladé (2005) y es un paso más en este camino. Se presentan desarrollo de esquemas numéricos unidimensionales y bidimensionales para la modelación del flujo de agua en lámina libre en ríos y sus llanuras de inundación, que permitan considerar lo más fielmente posible las geometrías irregulares reales, a la vez que se ha trabajado para resolver algunos aspectos pendientes en esquemas de trabajos anteriores, concretamente la posibilidad de estudiar geometrías reales fuertemente irregulares con esquemas capaces de simular correctamente cambios de régimen sin necesidad de modificar para ello el propio esquema numérico. Por esta razón se optó por trabajar con esquemas en volúmenes finitos.

Los esquemas en volúmenes finitos son muy adecuados para sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, hiperbólicos y no lineales, como son las ecuaciones de Saint Venant (ecuaciones del flujo en lámina libre y régimen variable), por su capacidad de modelación de las singularidades (frentes de onda, resaltos hidráulicos). Sin embargo, hay una serie de problemas en el tratamiento del término independiente (pendiente del fondo, fricción) tanto en una como en dos dimensiones y, en una dimensión, en como incorporar en los esquemas la posibilidad de tratar geometrías irregulares (cauces no prismáticos y cambios bruscos de sección a lo largo del río). Las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales tienen la particularidad que el vector de flujo presenta variaciones espaciales por variación de la geometría y no sólo de las variables dependientes. Uno de los objetivos conseguidos ha sido el correcto tratamiento de dichas variaciones, así como una discretización del término independiente de acuerdo con ellas. Sin ello, los esquemas numéricos podrían no converger a soluciones estacionarias, o hacerlo a soluciones incorrectas, como ocurre con algunos de ellos. Es claro que si el esquema no es capaz de modelar correctamente el régimen permanente, las soluciones que se obtengan en régimen variable tampoco tendrán la precisión que sería deseable.

En este trabajo se desarrollan esquemas numéricos para obtener soluciones fieles a las leyes de conservación. Finalmente, los esquemas desarrollados se utilizan para resolver una serie de problema ingenieriles reales y poner de manifiesto su aplicabilidad. Los esquemas desarrollados son de *alta resolución*, entendiendo como tal la capacidad de obtener de forma precisa tanto soluciones suaves como discontinuas (cambios de régimen,

14 Objetivos, descripción del trabajo y resumen de resultados

frentes de onda), manteniendo segundo orden de precisión en las zonas de solución suave, y evitando que se produzca la disipación (suavización de la solución) típica de los esquemas de primer orden de precisión en las singularidades.

Otro objetivo, resultante de la búsqueda de esquemas útiles y eficientes en la práctica, ha sido la integración de los esquemas en una y dos dimensiones, de manera que en el estudio de la propagación de una misma avenida se pueda dividir el tramo de estudio y utilizar una discretización unidimensional o bidimensional en cada zona según se crea conveniente. La aproximación unidimensional es menos costosa en necesidad de información topográfica y coste computacional, pero requiere que el flujo que se pretende modelar sea efectivamente básicamente unidimensional. Donde eso no sea así, (confluencias de ríos, curvas, inundaciones de llanuras con líneas de corriente en direcciones diferentes al eje del río, distinta rugosidad en distintas partes de una misma sección transversal del río, etc.), se podrá utilizar una aproximación en dos dimensiones. El cálculo se realiza así en todo el dominio (uni y bidimensional) a la vez, sin necesidad de imponer condiciones de contorno en las divisorias entre una y otra aproximación. De esta manera se logra una mayor eficiencia de la modelación, permitiendo abordar problemas en dominios de grandes dimensiones con una precisión que de otro modo no se podría conseguir. Las conexiones entre las zonas de cálculo en una y en dos dimensiones pueden ser según el eje del río, o según la dirección transversal al mismo (desbordamiento lateral del cauce hacia las llanuras de inundación).

Es de destacar que la teoría matemática en la que se basan los esquemas de alta resolución se desarrolló para ecuaciones más simples (siempre sin término independiente, y a menudo escalares o con coeficientes constantes), extrapolando luego los resultados a las ecuaciones de Saint Venant. Por ello es necesario realizar una completa verificación de los esquemas propuestos, tanto en una como en dos dimensiones. La verificación, y en algún caso calibración, se hace mediante la comparación con problemas con solución analítica, resultados de otros esquemas numéricos y experiencias de laboratorio, tanto en régimen permanente como en régimen variable y para flujos continuos o con singularidades (cambios de régimen, frentes de onda).

Se pretende que la metodología propuesta sea una herramienta útil para la resolución de problemas concretos de ingeniería y dinámica fluvial y no sólo una contribución teórica al desarrollo de un tipo concreto de esquemas numéricos. Por ello se incorporan distintas posibilidades de consideración de las condiciones de contorno, condiciones iniciales en régimen permanente en flujo gradualmente variado, avance sobre fondo seco y secado del dominio, rugosidad variable en el espacio y en función de las características del flujo, posibilidad de trabajar con mallas irregulares no estructuradas formadas por cuadriláteros o triángulos, cauces compuestos (cauce central y llanuras) en la aproximación unidimensional, y distintas tipologías de conexión entre dominios unidimensionales y bidimensionales. La comprobación final de la utilidad de la metodología se hará con la aplicación de los modelos desarrollados para la resolución de una serie de problemas reales: diseño de estructuras hidráulicas, delimitación de zonas inundables por grandes avenidas o roturas de presa, estudio del funcionamiento hidráulico de la confluencia de dos ríos y estudio de niveles de agua y velocidades en inundaciones de zonas urbanas y rurales para determinación del riesgo asociado.

Finalmente, un objetivo clave ha sido la integración de los esquemas numéricos de cálculo en la potente interface de pre y postproceso GiD, desarrollada por el CIMNE, para acabar teniendo una herramienta de uso práctico amigable posible, con posibilidades de incorporación de información topográfica a partir de modelos digitales del terreno y de rugosidades a partir de bases de datos externas, facilidad a la hora de generar mallas de cálculo y asignación de condiciones iniciales y de contorno, así como visualización y tratamiento de resultados de forma gráfica. Se decidió también incorporar en la modelación bidimensional la posibilidad de considerar la lluvia como aportación de agua al modelo, para obtener así un modelo hidrológico distribuido de transformación lluvia-escorrentía basado en las ecuaciones completas del flujo en lámina libre, con capacidad para modelar la topografía de forma detallada, e integrado totalmente en el modelo hidráulico.

1.2. Descripción del trabajo

El trabajo empieza con un repaso bibliográfico y de la evolución histórica de la modelación numérica del flujo de agua en lámina libre, y se describen los modelos existentes, comerciales y de investigación, utilizados para la resolución de problemáticas afines a los objetivos de esta tesis. En primer lugar se hace una revisión de los modelos unidimensionales, empezando por esquemas en régimen permanente, para seguir con flujo variable, haciendo especial hincapié en aquellos esquemas que son además de alta resolución. La revisión bibliográfica de los modelos bidimensionales sigue el mismo esquema, y finalmente se hace un repaso a los modelos comerciales existentes, destacando sus limitaciones a pesar de su atractiva apariencia.

En el Capítulo 3 se hace un análisis de las ecuaciones de Saint Venant (ecuaciones del flujo variable de agua en lámina libre), tanto en una como en dos dimensiones. Se deducen las ecuaciones a partir de las leyes físicas de conservación fundamentales y se analizan sus propiedades, haciendo énfasis en la teoría de las características (bicaracterísticas en dos dimensiones), teoría que es particular de los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicos y no lineales, lo que permite resaltar algunas propiedades de las mismas ecuaciones y de sus soluciones que son de gran ayuda posteriormente para el desarrollo de los esquemas numéricos. En el mismo capítulo se presenta a continuación como se propaga una onda o perturbación, así como los distintos tipos de onda posibles, para posteriormente definir el problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant, la descomposición en base a ondas simples de su solución, y acabar viendo la estructura de la solución de una rotura de presa en una dimensión sobre lecho plano.

El Capítulo 4 es un capítulo descriptivo, donde se presentan algunas propiedades que deben cumplir los esquemas numéricos en volúmenes finitos, como los desarrollados en este trabajo, para que el resultado final sea un buen esquema numérico (reproduzca fielmente el fenómeno real que se modela) de alta resolución. Se demuestra la conveniencia de los esquemas en volúmenes finitos, basados en la forma conservativa de las ecuaciones, para poder modelar correctamente cambios de régimen y frentes de onda. Se introducen los conceptos de esquema *upwind* así como como los conceptos de monotonicidad y variación total decreciente (TVD) entre otros, conceptos necesarios para desarrollar mecanismos que eviten las inestabilidades que se producen con los esquemas de segundo orden de precisión en puntos próximos a discontinuidades o zonas con grandes gradientes.

En el Capítulo 5 se entra de lleno en el desarrollo de los esquemas numéricos en una dimensión, explícitos y basados en la técnica de los volúmenes finitos. La estructura del capítulo, igual que la del *Capítulo 5*, consiste en desarrollar en primer lugar un esquema de primer orden de precisión (método de Godunov), centrándose en su aplicabilidad a geometrías irregulares de cauces naturales. Para ello es fundamental la discretización que se realiza del vector de flujo de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión, que, a diferencia de otros sistemas de ecuaciones, presenta una variabilidad espacial debida precisamente a la irregularidad de la geometría. A continuación se desarrollan esquemas de segundo orden, que se pueden escribir como los esquemas de primer orden ya vistos más unos términos de extensión a segundo orden. Los esquemas de alta resolución se obtienen luego mediante la limitación de los términos de extensión de segundo orden mencionados. Todo ello se hace extrapolando a las ecuaciones de Saint Venant algunas propiedades matemáticas que se pueden demostrar sólo para ecuaciones hiperbólicas más simples. Se propone una discretización del término independiente de acuerdo con el resto de la ecuación. Con ello se consiguen, como se muestra en el capítulo, esquemas unidimensionales que convergen en régimen permanente a soluciones estacionarias correctas (régimen permanente gradualmente variado).

El siguiente capítulo tiene exactamente la misma estructura que el anterior, pero para los esquemas en dos dimensiones: desarrollo del esquema de primer orden, extensión a segundo orden, y esquemas de alta resolución. Para cada uno de ellos se presenta el tratamiento del término independiente implementado. Curiosamente, las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones presentan una formulación más sencilla que en una dimensión (no existe variación del flujo por variación de la geometría) por lo que el balance del término independiente con el vector de flujo se simplifica.

En el Capítulo 7 se presenta al programa CARPA (Cálculo en Alta Resolución de Propagación de Avenidas) que se ha construido a partir de los esquemas numéricos presentados en los capítulos anteriores. Se detallan las capacidades del modelo en cuanto a esquemas numéricos finalmente implementados, funciones de limitación utilizadas para el desarrollo de esquemas de alta resolución, posibilidades de discretización del dominio, implementación del mojado para avance sobre fondo seco y secado de elementos, condiciones de contorno, tratamiento de cauces compuestos con la aproximación unidimensional, y descripción del modelo hidrológico de

16 Objetivos, descripción del trabajo y resumen de resultados

transformación lluvia-caudal. En este mismo capítulo se detalla como se ha hecho la integración de los modelos en una y dos dimensiones, y como se han tratado los contornos comunes a ambos dominios. Finalmente, se muestra la implementación en la interface de pre y postproceso GiD, las capacidades de la misma para importación de geometrías, desarrollo de mallas de cálculo, asignación de condiciones de contorno e iniciales, y visualización de resultados.

En el Capítulo 8 se presentan los trabajos de verificación realizados. La verificación se realiza mediante la comparación con problemas con solución analítica, otros esquemas numéricos y comparación con resultados experimentales de laboratorio. Esto se hace tanto en régimen permanente como en régimen variable, para los esquemas en una y dos dimensiones.

Finalmente, en el Capítulo 9, se presentan una serie de aplicaciones del modelo. Todas las aplicaciones corresponden a problemas reales de ingeniería y dinámica fluvial, en los cuales se ha utilizado el programa CARPA. El modelo se aplica al diseño de distintas estructuras hidráulicas, determinación del área inundable por la rotura de presas, estudio del funcionamiento hidráulico de ríos, y determinación del riesgo asociado a episodios extraordinarios tanto en zona rural como urbana.

1.3. Resumen de resultados

El resultado del trabajo que se presenta es una herramienta de cálculo numérico del flujo de agua en lámina libre y régimen variable: el programa CARPA. CARPA está pensado principalmente para la modelación de propagación de avenidas en ríos, aunque también se puede aplicar, como se ha hecho en este trabajo, en otros ámbitos como diseño de estructuras hidráulicas o estudios hidrológicos de transformación lluvia-escorrentía. De manera más concreta, los principales resultados son:

1. Se ha optado por trabajar con esquemas explícitos basados en la técnica de los volúmenes finitos para la modelación del régimen variable en lámina libre, tanto en una como en dos dimensiones. Estos esquemas, que tienen claras ventajas sobre las diferencias finitas y elementos finitos, sobretodo a la hora de desarrollar esquemas *shock-capturing*, que son esquemas capaces de simular correctamente flujos discontinuos (frentes de onda, resaltos hidráulicos) sin necesidad de tratamientos específicos de las discontinuidades. Sin embargo, hasta el momento las principales aplicaciones de dichos esquemas habían sido para geometrías muy sencillas (mayoritariamente fondo plano o canales prismáticos) pero no para las geometrías irregulares de cauces reales. Con los desarrollos que se presentan, juntamente con los avances en velocidad de cálculo de los ordenadores, este tipo de esquemas han podido ser adaptados para la modelación de propagación de avenidas con geometrías reales y zonas de estudio de grandes dimensiones.
2. A la hora de realizar la modelación numérica del flujo de agua en cauces naturales, se debe optar bien por una aproximación unidimensional (1D) bien por una bidimensional (2D), según sea la naturaleza del fenómeno que se pretende modelar o la información disponible. La modelación unidimensional es mucho menos costosa tanto en tiempo de cálculo como de información (secciones transversales separadas una cierta distancia entre ellas) y en muchos tramos de río suficientemente precisa. Sin embargo, hay casos en que en ciertas áreas (confluencias, inundación de llanuras, variaciones bruscas de geometría, etc.) el flujo real tiene un fuerte carácter bidimensional, por lo que debería modelarse de esta manera. El flujo en estas zonas marcadamente bidimensionales suele venir condicionado por el flujo en los tramos de río unidimensionales y viceversa, por lo que no se puede desacoplar el cálculo y utilizar un tipo de modelo en unas zonas y otro en otras. Si se opta por una modelación unidimensional en todo el dominio, las zonas 2D no serán modeladas con suficiente precisión (y las imprecisiones pueden afectar a la misma zona 1D), mientras que un cálculo enteramente bidimensional puede ser prohibitivo en tiempo de cálculo, muy caro para disponer de la información necesaria para la discretización 2D de toda la zona, y costoso a la hora de generar las mallas de cálculo y asignar sus propiedades. En este trabajo se han integrado los esquemas unidimensionales y bidimensionales en un único modelo, aprovechando las propiedades de los esquemas explícitos que los hacen especialmente adecuados para dicha integración. Se propone una metodología para el tratamiento de los contornos comunes a ambas aproximaciones, que consigue la integración de forma sencilla, y que permite conectar dominios unidimensionales y bidimensionales ya sea según la dirección del eje del río, o bien transversalmente por desbordamiento del cauce. La modelación conjunta permite tener mucha más precisión que una modelación únicamente unidimensional, con menos coste de información y computacional que si se modelara todo el dominio en dos dimensiones.
3. Los esquemas utilizados (explícitos, en volúmenes finitos, basados en el método de Godunov mediante la utilización de Riemann Solvers) fueron inicialmente desarrollados para aplicaciones a campos distintos de la hidráulica (destaca su aplicación a problemas de dinámica de gases). La similitud de las ecuaciones (en forma leyes físicas de conservación) propició posteriormente su utilización para la modelación del flujo de agua en lámina libre (ecuaciones de Saint Venant). En una dimensión, estas ecuaciones escritas de forma conservativa (como es conveniente hacerlo para el desarrollo de este tipo de esquemas numéricos) presentan una particularidad que las diferencia de otras formalmente muy similares, que es que el vector de flujo puede tener variaciones espaciales no sólo debido a variaciones en las variables dependientes (área de la sección mojada, caudal) sino también a variaciones de la geometría del contorno o cauce. Esta variación espacial del vector de flujo por variaciones de geometría, no considerada en ningún caso hasta muy recientemente, ha sido uno de los aspectos fundamentales en el desarrollo del esquema numérico unidimensional, para conseguir un correcto balance entre el tratamiento numérico del vector de flujo y el término independiente de las ecuaciones de Saint Venant, a diferencia de otros esquemas existentes.
4. Otro aspecto recientemente objeto de gran número de estudios, y absolutamente obviado hace tan sólo diez años, es el correcto tratamiento del término independiente de las ecuaciones de Saint Venant, concretamente la parte del término independiente correspondiente a la pendiente de fondo, que debe

18 Objetivos, descripción del trabajo y resumen de resultados

hacerse de acuerdo con el resto de la ecuación. En caso contrario los esquemas numéricos no serán capaces de modelar correctamente ni siquiera situaciones estacionarias como agua parada o régimen permanente. Sólo recientemente se han presentado trabajos que consiguen un correcto balance entre la discretización del vector de flujo y la del término independiente, pero en ellos se suele analizar sólo el caso de agua parada. Para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, un balance que consiga modelar correctamente una situación de agua parada en general no tiene porque simular correctamente un régimen permanente. Incluso aunque el esquema se establezca a una situación estacionaria, ésta puede no ser la correcta. En el esquema unidimensional, gracias al tratamiento del vector de flujo comentado en el punto anterior, junto con un tratamiento *upwind* del término independiente, y una correcta aproximación de las variables dependientes en los contornos de cada volumen finito, se consigue un esquema en régimen variable que, con condiciones de contorno constantes, converge a la solución correcta del régimen permanente gradualmente variado.

5. Se ha implementado un algoritmo para la simulación del secado y mojado del dominio, que permite eliminar del cálculo los volúmenes finitos secos, e incorporarlos si se mojan, y que conserva exactamente el volumen de agua incluso en presencia de fuertes irregularidades geométricas. Esto ocurre tanto en la modelación en una como en dos dimensiones y es fundamental para la mejora de la eficiencia del modelo.
6. El esquema numérico WAF TVD (*Weight Averaged Flux Total Variation Diminishing*), que es una extensión del método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe, con las consideraciones implementadas en este trabajo, es un esquema de alta resolución. El esquema es capaz de modelar las zonas con solución suave con segundo orden de precisión, mientras que en las discontinuidades o zonas con fuertes gradientes (resaltos hidráulicos, frentes de onda) no produce oscilaciones espurias, como sí ocurre con esquemas de segundo orden, a la vez que se evita la disipación típica de los esquemas de primer orden. El esquema es aplicable a geometrías reales, fuertemente irregulares. La discretización de la geometría en volúmenes finitos puede realizarse con mallas de cálculo irregulares, estructuradas o no estructuradas, formadas por triángulos, cuadriláteros o combinaciones de ambos, lo que da una gran flexibilidad al modelo y una gran capacidad de reproducción de geometrías reales.
7. Para el tratamiento de las condiciones de contorno, tanto en una como en dos dimensiones, se ha recurrido a la teoría de las características (o bicaracterísticas en dos dimensiones). La implementación de estas condiciones de contorno se ha hecho de manera que el propio modelo detecta el tipo de flujo existente (entrante o saliente, subcrítico o supercrítico) y el número y tipo de condiciones que se requieren en los contornos.
8. El modelo CARPA desarrollados han sido implementados en la interfaz de preproceso y postproceso GiD, que permite generar mallas de cálculo bidimensional y secciones transversales para el cálculo unidimensional a partir de modelos digitales del terreno, asignar condiciones de contorno e iniciales, asignar manualmente la rugosidad o importarla de bases de datos de usos del suelo, ejecutar los cálculos desde la misma interfaz y visualizar los resultados. Todo ello de forma amigable y eficaz.
9. Se ha construido un modelo hidrológico de transformación lluvia-escorrentía basado en el esquema bidimensional. De esta manera se dispone de un modelo hidrológico distribuido, basado en las ecuaciones completas bidimensionales del flujo en lámina libre, completamente integrado en un modelo hidráulico de propagación de avenidas, y con todas las herramientas de preproceso (generación de mallas de cálculo a partir de modelos digitales del terreno, implementación de condiciones iniciales y de contorno, incluida la lluvia, asignación de parámetros de definición de las funciones de pérdidas) y postproceso (visualización de resultados) implementadas.
10. La verificación realizada en el Capítulo 8. pone de manifiesto el grado de precisión de los esquemas numéricos desarrollados, tanto en una como en dos dimensiones. La verificación es fundamental en cualquier modelo, pero especialmente en este caso donde en el desarrollo se utiliza una teoría matemática demostrada sólo para ecuaciones hiperbólicas más simples, extrapolando luego los resultados a las ecuaciones de Saint Venant.
11. El modelo CARPA desarrollado en este trabajo tiene una utilidad práctica que se ha puesto en evidencia con la resolución de problemas reales de dinámica fluvial. Se ha aplicado para el diseño y definición de estructuras hidráulicas específicas, para estudios de rotura de presa y delimitación de la inundación producida, para el estudio del flujo hidráulico en ríos en situación de avenida y para la determinación del riesgo asociado tanto en zonas urbanas como en áreas rurales de grandes dimensiones.

2. Modelación numérica del flujo de agua en lámina libre. Evolución y antecedentes

La modelación matemática del flujo en lámina libre ha evolucionado paralelamente a la capacidad de los ordenadores, al desarrollo del cálculo numérico en general y al desarrollo de la modelación numérica en áreas de conocimiento próximas. Así, por ejemplo, el estudio de la mecánica de gases ha contribuido en la puesta a punto de técnicas de discretización y esquemas numéricos específicos que luego han podido ser readaptados a problemas concretos como la resolución del flujo de agua en lámina libre.

Para el estudio de los efectos de la propagación de avenidas en ríos, y en concreto para la obtención de valores de velocidad y niveles de agua, se han usado en el pasado, y todavía se usan mayoritariamente en la actualidad, modelos unidimensionales en régimen permanente gradualmente variado y fondo fijo. Estos pueden ser una herramienta suficiente para estudios donde la evolución temporal no sea un factor a tener en cuenta y el flujo sea eminentemente unidimensional. Este tipo de modelos se basan en esquemas numéricos relativamente simples pero eficaces, pueden considerar cambios de régimen, cauces con geometrías complejas y con llanuras de inundación, y singularidades tales como azudes, puentes, pasos bajo vía, etc.

En el caso que el proceso a estudiar sea claramente no permanente se debe recurrir a las ecuaciones unidimensionales del régimen gradualmente variable o ecuaciones de Saint Venant unidimensionales. Para intentar resolver estas ecuaciones se han utilizado en el pasado gran cantidad de esquemas numéricos distintos, algunos de ellos con las ecuaciones completas y muchos otros con distintas simplificaciones consistentes en despreñar los términos con menor contribución, dando lugar a los métodos conocidos como métodos hidrológicos, onda cinemática y onda difusiva. La razón para no utilizar las ecuaciones completas, que es poder reducir el tiempo de cálculo, tiene menos sentido actualmente que hace unos años. En este capítulo se mencionan los distintos esquemas utilizados tradicionalmente para la resolución del movimiento no permanente gradualmente variable, así como sus limitaciones, y se da una visión general de las necesidades que han llevado al desarrollo de esquemas numéricos más complejos. También se citan algunos trabajos en otras materias que han servido para desarrollar herramientas que se utilizan en capítulos posteriores, así como los llamados modelos cuasi-bidimensionales que resuelven las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión y usan técnicas simplificadas para tener en cuenta la inundación de las llanuras adyacentes al cauce.

La necesidad de estudiar fenómenos más complejos donde la hipótesis de unidimensionalidad se aleja demasiado de la realidad, y la observación que en la naturaleza se encuentran muchas situaciones donde el flujo parece ser efectivamente bidimensional, es decir, predominan las dimensiones horizontales sobre la vertical, condujo al desarrollo de los esquemas bidimensionales. Para ello se pueden hacer distintas aproximaciones según se trate de estudiar un problema fluvial o de ingeniería marítima, según cuales sean las principales fuerzas determinantes del movimiento del agua, y según qué variables interese conocer.

Si se hace un repaso de los modelos comerciales de uso más generalizado se observa que la mayoría de ellos poseen potentes herramientas de pre y post proceso, pero módulos de cálculo con esquemas que suelen estar alejados de las últimas tendencias que se pueden encontrar en las publicaciones técnicas. A pesar de la progresión de las técnicas informáticas que han impulsado la evolución de los modelos numéricos en el campo de la hidráulica, a través de las distintas generaciones que se comentan a continuación, los algoritmos de los modelos más comúnmente utilizados para el estudio de problemas reales están cada vez más alejados de los últimos esquemas desarrollados en las Universidades y centros de investigación.

Hace unos años (finales de los 80, principios de los noventa) había un desequilibrio, en el sentido de ser modelos muy avanzados para la época en los esquemas numéricos, pero muy poco amigables y engorrosos de utilizar. Actualmente el desequilibrio se está produciendo en sentido contrario: en el mercado existe una considerable variedad de modelos comerciales, con una facilidad creciente de introducción de datos y potentes

representaciones de los resultados, pero cuyos módulos de cálculo han evolucionado poco en los últimos años y no incorporan los últimos avances en sus esquemas numéricos.

La facilidad de uso de estos modelos y sus capacidades a la hora de representar los resultados deberían ir acompañadas de una evolución paralela en sus esquemas de resolución de las ecuaciones. Si no, se puede correr el riesgo de tomar como ciertos unos resultados poco correspondientes con la realidad, o en todo caso, mejorables. Los grandes avances en la capacidad y velocidad de los ordenadores parece que haya servido sobretodo para mejorar la presentación y facilidad de uso. Los modelos van a ser cada vez más utilizados por personas u organismos poco expertos en hidráulica, y sus resultados van a servir cada vez más para tomar decisiones importantes. Su evolución debería ser, por lo tanto, también hacia generalizar el uso de los últimos esquemas de alta resolución, capaces de representar correctamente problemas complejos como soluciones discontinuas y topografías complicadas, y hacia la construcción de modelos inteligentes en el sentido de gestión de información y toma de decisiones, pero también en el sentido de utilización del mejor código o esquema numérico (unidimensional, bidimensional, de alta resolución, etc.) para cada problema determinado.

2.1. Esquemas unidimensionales

2.1.1. Régimen permanente

Para el estudio de los niveles y velocidades de agua en ríos, la aproximación que sin duda se ha utilizado más es la de flujo unidimensional y régimen permanente gradualmente variado. Por sencillez de programación y de discretización del dominio, y a veces por falta de información en las condiciones de contorno en régimen no permanente (hidrogramas), ésta es la metodología que más se utiliza incluso hoy. Las hipótesis fundamentales para este tipo de aproximación son movimiento unidimensional, régimen permanente y fondo fijo. La ecuación fundamental es la conservación de la energía entre dos secciones de río, aunque también se utiliza la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para fenómenos locales, como pueden ser cambios de régimen, y otras ecuaciones más o menos empíricas para otros efectos locales como puentes, azudes, etc. En general estos esquemas de cálculo de curvas de remanso están del lado de la seguridad cuando el objetivo es conocer los niveles máximos en avenida, ya que la lámina de agua que se obtiene con ellos suele estar por encima de la envolvente de calados máximos que se obtendrían con un modelo en régimen variable y un hidrograma cuyo caudal punta fuera el caudal utilizado en el cálculo en régimen permanente.

Este tipo de modelación también puede ser útil para obtener la condición inicial de un modelo unidimensional no permanente de forma rápida y con gran precisión, tal como se hace en este trabajo. Las hipótesis básicas de régimen permanente y de unidimensionalidad son, sin embargo, una limitación importante a la hora de representar fenómenos reales. Métodos para la resolución numérica de este tipo de flujo se pueden encontrar en libros generales de hidráulica de lámina libre, (Henderson, 1966), (Chaudhry, 1993), siendo el más utilizado entre ellos el conocido *método paso a paso*.

2.1.2. Régimen variable

El régimen variable se suele subdividir en régimen gradualmente variable, cuando las variaciones en calado y caudal se producen en tiempos prolongados y distancias grandes (como la propagación de una avenida en un gran río en régimen lento), y en régimen rápidamente variado cuando estas variaciones tienen lugar en tiempos cortos y distancias reducidas (resalto hidráulico en un río de montaña, frente de onda producido por una rotura de presa, etc.).

Las ecuaciones que describen el régimen variable en lámina libre en una dimensión son las ecuaciones de Saint Venant, escritas por primera vez por Barré de Saint Venant en 1871, y que sirven para describir tanto el régimen gradualmente variable, como el rápidamente variable. Estas ecuaciones no se pueden resolver para geometrías reales con métodos analíticos, mientras que el estudio de los fenómenos que describen mediante modelos físicos resulta enormemente complejo y costoso. Por todo ello, y gracias al desarrollo de la informática en las últimas décadas, los esfuerzos han ido encaminados hacia la resolución mediante modelos numéricos.

2.1.2.1 Esquemas unidimensionales clásicos

Un repaso de los esquemas numéricos clásicos (por contraposición a los esquemas de alta resolución desarrollados más recientemente y que se introducen en el próximo apartado) de resolución de las ecuaciones completas de Saint Venant unidimensionales en lámina libre, se puede encontrar en Gómez (1988) y Chaudhry (1993). Todos ellos se podrían clasificar en tres grandes grupos, que son el método de las características, los métodos en diferencias finitas y los métodos en elementos finitos.

Merecen un comentario aparte los métodos que utilizan las ecuaciones de Saint Venant simplificadas, entendiéndose como tales aquellos que prescinden de alguno de los términos de la ecuación del movimiento. Estos métodos se pueden consultar en Abbott (1979) y son básicamente los métodos hidrológicos, que desprecian completamente la ecuación del movimiento (entre los cuales destaca el método de Muskingum), el método de la onda cinemática, que sólo considera el término de fricción y de la pendiente de la solera en la ecuación del movimiento, el método de la onda difusiva que incluye además los términos de presión, y el método de la onda dinámica cuasi-permanente, que tan sólo desprecia el término de la aceleración local. Estos métodos tenían sentido cuando la capacidad y velocidad de los ordenadores era limitada, pero por lo general lo han ido

perdiendo a lo largo del tiempo, tan solo los métodos de Muskingum y la onda cinemática siguen utilizándose ampliamente en estudios hidrológicos.

De entre los métodos que utilizan las ecuaciones completas de Saint Venant, o métodos de onda dinámica, el método de las características (Gómez, 1988), (Chaudhry, 1993), tiene la ventaja de tener un gran significado físico, ya que aprovecha las propiedades físicas de transmisión de la información en el espacio y el tiempo. Fue de los primeros en utilizarse en los años 50. Existen distintas variantes del mismo como son las características rectas explícitas, características rectas implícitas, y las características curvas, pero todos ellos necesitan incrementos de tiempo de cálculo muy pequeños y discretizaciones espaciales también reducidas. Al igual que el resto de métodos clásicos presenta inconvenientes a la hora de representar flujo rápidamente variable para el cual pueden aparecer discontinuidades en la solución, aunque puede utilizarse tanto para régimen lento como para régimen rápido. El método de las características, puede servir para canales prismáticos, pero su aplicación para canales no prismáticos y de geometría irregular es de una enorme complejidad y resultados poco fiables, por lo que no son adecuados, ni han sido utilizados, para cauces fluviales.

Los métodos en diferencias finitas pueden clasificarse en diferencias finitas explícitas y diferencias finitas implícitas dependiendo de si el proceso de encontrar la solución a lo largo del tiempo lo hacen punto por punto en la malla de discretización espacial del dominio, o bien resolviendo conjuntamente todos los puntos de la malla en cada instante. Asimismo, pueden tener distintos órdenes de aproximación según sea el término de error debido al truncamiento a la hora de expresar las derivadas, y distintas posibilidades de discretización en cuanto a localización de las variables de cálculo en la malla. En este apartado no se entra en detalle en cada uno de los muchos esquemas clásicos en diferencias finitas existentes, tan solo se mencionan algunos de los más utilizados, el resto aparecen detallados en (Mahmood y Yevjevich, 1975), (Abbott, 1979), (Cunge, 1980), (Gómez, 1988), (Chaudhry, 1993).

Los métodos en diferencias finitas explícitos más utilizados han sido el esquema difusivo (llamado también esquema de Lax-Friedrichs o simplemente esquema de Lax), esquema Leap-Frog, esquema de McCormack, y esquema Lambda. Entre ellos el esquema de McCormack ha sido el más difundido; es un esquema de segundo orden de precisión en dos pasos que permite, en principio, un tratamiento sencillo de los términos fuente. Además el esquema de McCormack se ha utilizado como esquema de partida para la construcción de esquemas de alta resolución (Alcrudo, 1992), (García-Navarro y Alcrudo, 1992a), (Franco, 1996). Los esquemas explícitos presentan el inconveniente de requerir incrementos de tiempo muy pequeños en el proceso de cálculo para cumplir la condición de estabilidad de Courant (Capítulo 4.) y, por lo tanto, son más caros computacionalmente hablando respecto los métodos implícitos, aunque esta desventaja se atenúa cuando el flujo es rápidamente variable.

Entre los métodos en diferencias finitas implícitas destaca el esquema de Preissmann, también llamado esquema de los cuatro puntos, extensamente utilizado en ríos desde su formulación en los años 60 (Abbott, 1979), (Cunge, 1980), (Chaudhry, 1993), (Bladé, Gómez, Dolz, 1994). Es un esquema que proporciona resultados extraordinariamente precisos en régimen lento, con una gran velocidad de cálculo y que permite utilizar grandes incrementos de espacio y de tiempo. Otros esquemas en diferencias finitas implícitas son el esquema de Beam and Warming (Chaudhry, 1993) y el esquema de Vasiliev (Gómez, 1988), (Chaudhry, 1993). Los esquemas implícitos se han utilizado también para flujo rápidamente variable, aunque entonces el incremento de tiempo debe reducirse hasta valores similares a los de los esquemas explícitos para representar las discontinuidades.

El método de los elementos finitos también se ha utilizado para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales (Katopodes 1984a, 1984b) (Gómez, 1988), (Hicks, 1992), (Yang, 1993). Este método, desarrollado y aplicado principalmente para problemas estructurales, da óptimos resultados para ecuaciones elípticas o parabólicas, mientras que las ecuaciones de Saint Venant forman un sistema hiperbólico. Necesita un elevado consumo de tiempo de cálculo (para problemas no lineales se deben utilizar las variantes más complejas del método) y la integración temporal se debe hacer igualmente en diferencias finitas. Todo ello, junto con la sencillez de los contornos en una dimensión, hace que para el caso unidimensional este método no aporta ventajas considerables respecto de las diferencias finitas y sí más complejidad (Cunge, 1980), (Gómez, 1988), (Franco, 1996).

A la hora de representar fenómenos reales de propagación de avenidas en ríos, frecuentemente ocurre que se encuentran discontinuidades en la solución en forma de resaltos hidráulicos o frentes de onda, es decir, el flujo ya no es gradualmente variable sino rápidamente variable. Las mismas ecuaciones de Saint Venant pueden servir para representar el flujo rápidamente variable, si se escriben en forma conservativa, pero la aplicación sin más de

los métodos mencionados puede dar problemas de estabilidad y oscilaciones no reales de la solución. En este caso se han empleado dos tipos de aproximaciones distintas (Abbott, 1975), (Cunge, 1980):

1. Métodos de aislamiento del frente de onda (o *Shock Fitting methods*), consistentes en aislar la discontinuidad y tratarla como un contorno, empleando las ecuaciones de Rankine-Hugoniot (Capítulo 3. , apartados 2.5.4 y 2.5.6) para relacionar la solución a ambos lados de este contorno. Para poder aplicar estos métodos se debe conocer a priori la localización de la discontinuidad, lo que no suele suceder, por lo que a la práctica son inviables para problemas generales.
2. Métodos directos (*Through methods* o *Shock Capturing methods*). Este tipo de métodos son capaces de localizar, simular y propagar las soluciones discontinuas sin necesidad de ninguna técnica especial.

Por su lado, los métodos directos pueden dividirse en aquellos que se basan en la forma integral de las ecuaciones de Saint Venant y funcionan tanto para flujo gradualmente variable como para flujo rápidamente variable, y aquellos que consisten en introducir un término artificial en las ecuaciones que aumenta la difusión, de manera que la discontinuidad se suaviza (Cunge, 1980). En estos últimos el frente de onda se reparte entre los puntos cercanos de la malla afectando una zona más extensa que en la realidad y quitándole, por tanto, rigor a la solución

Los métodos directos sin necesidad de viscosidad artificial son claramente los deseables. Los esquemas clásicos en diferencias finitas y elementos finitos mencionados se han utilizado para desarrollar métodos directos, principalmente añadiendo términos de viscosidad artificial para estabilizar la solución (Chaudhry, 1993). Sin ella, los métodos de segundo orden producen oscilaciones espurias en el entorno de las discontinuidades, que pueden llegar a dar problemas de estabilidad del cálculo y discontinuidades no reales (fruto del proceso de cálculo) (Alcrudo, 1992). Por otro lado, los métodos de primer orden son poco precisos en las zonas de solución suave. La viscosidad artificial puede ser una manera de conseguir un esquema estable frente a una solución discontinua, pero representa un parámetro más a calibrar y, en el fondo, está cambiando las características del flujo y por tanto afecta la bondad de la solución.

2.1.2.2 Esquemas unidimensionales de alta resolución

Los problemas expuestos en el último párrafo del apartado anterior, y que también son ciertos para el caso bidimensional, son los que se intentan resolver con los esquemas de alta resolución. Como se verá, este tipo de esquemas se desarrollaron en un principio para la resolución de problemas de dinámica de gases compresibles, especialmente para el problema de Riemann, y se han utilizado luego para otros problemas como puede ser la resolución de las ecuaciones de Saint Venant.

Las bases de los esquemas de alta resolución fueron establecidas por Harten (1982), (1984), Osher y Solomon (1982), Shu y Osher (1986), y Sweby (1984) a partir principalmente de las ideas de Godunov (1959), quien desarrolló un esquema conservativo para sistemas hiperbólicos no lineales de leyes de conservación. La teoría matemática desarrollada por los autores mencionados está plenamente fundamentada, sin embargo, tan solo para una ecuación de conservación escalar y homogénea. Aun así, la necesidad de obtener soluciones de calidad para las ecuaciones de Euler de dinámica de gases compresibles provocó un esfuerzo considerable hacia la obtención de esquemas de alta resolución para ellas, y en concreto para la resolución del problema de Riemann, por parte de Van Leer (1977a, 1979), Roe (1981) y el mismo Harten con Hymann (1983). Este grupo de investigadores desarrolló una serie de esquemas numéricos de primer orden para resolver de manera aproximada el problema de Riemann en una dimensión. A partir de ellos se desarrollaron métodos para construir la solución de una ecuación hiperbólica como si se tratase de una serie de problemas de Riemann elementales. Este tipo de métodos requiere pues conocer la solución del problema de Riemann, pero conocerla exactamente muchas veces es costoso computacionalmente o no es posible, de manera que se utilizan soluciones aproximadas del mismo. Los métodos para resolver de forma aproximada el problema de Riemann se conocen como *Riemann Solvers*. Los principales *Riemann Solvers* están detalladamente expuestos en Toro (1997) y son: el *Riemann Solver* de Roe (Roe, 1981), el *Riemann Solver* de Harten-Lax-Van Leer (HLL) (Harten, Lax, Van Leer, 1983), el *Riemann Solver* de Osher (Osher y Solomon, 1982), y la técnica conocida como Flux Vector Splitting (Steger y Warming, 1981), (Van Leer, 1982). Estos esquemas son de primer orden de precisión y por lo tanto disipativos. Por otro lado los esquemas de segundo orden tienen un carácter dispersivo que produce oscilaciones espurias en la solución cerca de las zonas con gradientes elevados. Por ello los mismos autores trabajaron para conseguir esquemas válidos tanto para las zonas suaves como para las discontinuas, que se conocen como esquemas de alta resolución y juegan con una función de limitación del flujo numérico de manera que su orden de aproximación varía dependiendo de la suavidad de la solución. A partir de la definición que hizo Harten (Harten y Hymann, 1983), se conocen como esquemas de alta resolución aquellos que cumplen:

1. La solución numérica es al menos de segundo orden de precisión en las regiones suaves de la solución.
2. Producen soluciones numéricas libres de oscilaciones espurias.
3. Las discontinuidades suavizadas se concentran en una zona estrecha de tan solo uno o dos incrementos de espacio de la malla.

Para la construcción de este tipo de esquemas es fundamental el concepto de Variación Total Decreciente (TVD, a partir de *Total Variation Diminishing*) que se trata en el Capítulo 4. .

El gran parecido entre las ecuaciones de Euler y las ecuaciones de Saint Venant para el flujo de agua en lámina libre propició que los métodos de alta resolución desarrollados para las primeras se adaptaran para la resolución de las segundas, tanto en una como en dos dimensiones. Glaister (1988) fue el primero en desarrollar el método de Godunov para las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión, utilizando el *Riemann Solver* de Roe y un esquema en diferencias finitas *upwind*, o contracorriente, de segundo orden, válido para canales prismáticos rectangulares. García-Navarro y Alcrudo (1992), también utilizaron el *Riemann Solver* de Roe para obtener una extensión del esquema de McCormack con Variación Total Decreciente, con aplicaciones a canales con sección transversal cualquiera pero prismáticos. El mismo esquema es utilizado más adelante por Franco (1996).

Alcrudo (1992) presenta una serie de esquemas de alta resolución para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales en canal rectangular a partir del *Riemann Solver* de Roe, tanto explícitos (esquema de Roe-Sweby, esquema central de Yee-Roe-Davis, esquema de McCormack TVD y los métodos MUSCL o de extrapolación de variables) como implícitos (esquema EILNC). El mismo esquema de Roe-Sweby se presenta por Alcrudo y García-Navarro (1992a).

Yang, Chang y Hsu (1993) presentan dos esquemas de alta resolución en diferencias finitas de segundo y tercer orden respectivamente, para canal prismático rectangular, basados en los trabajos de Harten y Osher (1987), llamados esquemas ENO (*essentially non-oscillatory*). En el mismo trabajo se presentan dos esquemas de alta resolución desarrollados con la técnica de los elementos finitos, uno tipo ENO, y otro con Variación Total Decreciente (TVD).

Jha, Akiyama y Ura (1995) utilizan también los esquemas de Lax-Wendroff TVD y MUSCL, que utilizan el *Riemann Solver* de Roe, y otro tipo ENO al que se refieren como *Modified Flux Approach*, para la resolución del problema de rotura de presa en canales con sección cualquiera. Los mismos autores (Jha, Akiyama y Ura, 1996) desarrollan una versión TVD del esquema clásico de Beam and Warming, también con el *Riemann Solver* de Roe, para flujo unidimensional en lámina libre. Aral, Zhang y Jin (1998) proponen un nuevo esquema de alta resolución al que llaman *Relaxation Scheme*, esquema en diferencias finitas explícitas, TVD pero que no utiliza ningún *Riemann Solver*, para la simulación de propagación de avenidas en redes de canales trapezoidales.

La mayor parte de las aplicaciones de esquemas de alta resolución para flujo en lámina libre en una dimensión se han hecho para canal rectangular, aunque en algunos casos se utilizan las ecuaciones de Saint Venant para cauce de geometría irregular. Ello es debido a que para geometrías irregulares el papel del término independiente de las ecuaciones de Saint Venant y su tratamiento discreto es fundamental para representar correctamente el flujo, pero su inclusión en esquemas numéricos conservativos (los basados en el método de Godunov y todos los esquemas de alta resolución lo son) es complejo. Destacan los trabajos orientados al correcto tratamiento del término independiente para esquemas conservativos de primer orden de precisión de Vázquez-Cendón (Vázquez-Cendón, 1999a) y (Vázquez-Cendón, 1999b) para canales no prismáticos con sección rectangular, seguidos de los de Villanueva (1999) con aplicaciones para canales de sección irregular. Más adelante, Hudson (1999) y Hubbard y García-Navarro (2000) realizan un tratamiento del término independiente con un balance correcto con el vector de flujo con esquemas de alta resolución con aplicaciones para canales rectangulares. Por su lado, Capart (2003) presenta un esquema y aplicación con un balance aceptable para si la superficie del agua es sensiblemente horizontal. Finalmente, Burguete y García-Navarro (2001, 2002, 2004) presentan una mejora del esquema de Lax-Friedrichs o *esquema de Lax-Friedrichs optimizado*, verificando su buen comportamiento en canales no prismáticos de sección rectangular, canales con sección trapezoidal constante y aplicación a ríos.

El caso de régimen permanente es un caso particular del régimen variable, y por tanto cualquier esquema numérico para la resolución del régimen variable, con unas condiciones de contorno constantes, debería ser capaz de reproducir correctamente el régimen permanente. Esto, sin embargo, no es evidente con esquemas explícitos en volúmenes finitos como los utilizados en este trabajo.

2.2. Esquemas bidimensionales

Para describir muchos fenómenos naturales como puede ser la inundación de una gran llanura, la confluencia de dos cauces, el cruce de dos corrientes de agua, el flujo en un cauce ancho e irregular, etc., la aproximación unidimensional deja de ser adecuada y por ello se desarrollaron primero los esquemas cuasi-bidimensionales, y luego los esquemas bidimensionales propiamente dichos.

Los esquemas cuasi-bidimensionales fueron los primeros intentos de modelar la inundación de una zona llana a partir del desbordamiento de cauces principales. En ellos se aplican las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales en un cauce principal, mientras que la llanura de inundación se representa mediante una serie de células de almacenaje. El primero de ellos fue el modelo del delta del río Mekong (Cunge, 1975); en este modelo se consideraban únicamente células de almacenaje conectadas entre ellas por ecuaciones de vertedero, al igual que en el modelo del delta del río Chao Phraya, en Bangkok (Vongvisessomjai y Tingsanchali, 1985). Pender (1992) utiliza esta misma aproximación cuasi-bidimensional e incorporó un mecanismo de reducción automática del incremento de tiempo para eliminar inestabilidades en el caso de una sola célula, que luego se generalizó para un número cualquiera de células (Bladé, Gómez, Dolz, 1994).

La modelación cuasi-bidimensional era la única que se podía pretender en un principio, debido a la poca capacidad y baja velocidad de los ordenadores antiguos. Hoy es posible utilizar esquemas numéricos más complejos. Para algunos problemas de inundaciones por desbordamiento de cauces, y especialmente si se dispone de poca información topográfica, los esquemas cuasi-bidimensionales pueden representar todavía una aproximación práctica y de bajo coste, comparado con los esquemas verdaderamente bidimensionales que se discuten a continuación.

Al igual que en el caso unidimensional, para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones se ha utilizado el método de las características, métodos en diferencias finitas, y métodos en elementos finitos, pero en el caso bidimensional además se ha utilizado la técnica de discretización en volúmenes finitos. Todas las aproximaciones pueden servir para obtener métodos de alta resolución, pero la técnica de los volúmenes finitos es especialmente adecuada para ello.

2.2.1. Esquemas bidimensionales clásicos

Como en el caso unidimensional, son esquemas clásicos aquellos que no sean de alta resolución, entendiendo como tales los que cumplen las tres condiciones expuestas en el apartado 1.2.2.2. Los esquemas clásicos se han utilizado con buenos resultados para flujo gradualmente variable, pero no sirven en general para rápidamente variable.

El método de las características en dos dimensiones se utilizó por Katopodes y Strelkoff (1978) para la simulación bidimensional de rotura de presas y por Aleán (1997) para la modelación de un sistema de lagunas en México. Este método comporta grandes dificultades de implementación, especialmente en geometrías reales, necesita incrementos de tiempo muy pequeños y, en el caso de flujo rápidamente variable precisa una aproximación del tipo de aislamiento del frente de onda (*shock fitting*) con todas sus complicaciones, de manera que no tiene ninguna ventaja respecto de otras aproximaciones. Por ello ha quedado tan solo como una herramienta para la incorporación de las condiciones de contorno.

Existen gran variedad de métodos en diferencias finitas utilizados con buenos resultados para la modelación del flujo gradualmente variable en dos dimensiones. Incluso algunos se aplicaron para flujo rápidamente variable con resultados aceptables antes del desarrollo de los esquemas de alta resolución (Chaudhry, 1993). Los esquemas clásicos en diferencias finitas se pueden dividir en aquellos que utilizan diferencias finitas explícitas y los que utilizan diferencias finitas implícitas. Dentro de los últimos tienen una relevancia especial los métodos de direcciones alternadas (ADI, de *Alternate Direction Implicit*).

Entre los esquemas en diferencias finitas explícitas destaca el esquema de McCormack, propuesto en 1969 por el autor del cual tomó el nombre y extensamente utilizado en mecánica de fluidos. Es un esquema en dos pasos (predictor–corrector) explícito, de segundo orden de precisión, compacto, que sirve para flujo gradualmente y rápidamente variable (añadiéndole un término de viscosidad artificial), que de forma sencilla se puede utilizar en dos dimensiones, incorporando los términos fuente y condiciones de contorno, y extenderlo a un esquema de alta

resolución. El esquema de McCormack fue utilizado para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales por Jiménez y Chaudhry (1987) para la resolución de flujos supercríticos y cambios de régimen; por Zhang y Cundy (1989) para flujo superficial (*overland flow*) en laderas, donde probaron su capacidad de representar soluciones discontinuas; Fennema y Chaudhry (1990) y Chaudhry (1993) también lo aplicaron para flujo rápidamente y gradualmente variable a través de un estrechamiento; Valiani (1992) lo utilizó para la simulación de rotura de presas con fondo móvil y Shettar y Murthy (1996) para el estudio numérico de bifurcaciones junto con un modelo de turbulencia.

Otros esquemas en diferencias finitas explícitas utilizados son el esquema de primer orden de Lax (Jiménez y Chaudhry, 1987) de un solo paso, y el esquema de Gabutti (Fennema y Chaudhry, 1990) de tres pasos, que incorpora información de cómo se transmite una onda a partir de la teoría de las características.

Como se ha comentado, dentro de los métodos en diferencias finitas implícitas tienen un papel especial los llamados métodos ADI (*Alternating Direction Implicit*) o de direcciones alternadas. Este tipo de métodos fueron los primeros en utilizarse para las ecuaciones del flujo en lámina libre en dos dimensiones. En ellos, el avance en un incremento de tiempo se divide en dos pasos, para cada uno de los cuales se resuelven las ecuaciones en una sola de las dos direcciones del espacio. El primer esquema de este tipo se desarrolló, para régimen gradualmente variable, por Lendertsee (1967) y fue la referencia para muchos que le siguieron. Lendertsee, en este esquema, despreció los términos convectivos en la ecuación del movimiento. En cada medio incremento de tiempo las ecuaciones se discretizan de manera que dos de ellas quedan implícitas y la tercera explícita, y se obtienen los valores de variables distintas en puntos distintos de la malla de cálculo (lo que se conoce por *non staggered grid*).

Abbott (1972), utiliza un esquema parecido también con una versión simplificada de las ecuaciones del movimiento, mientras que Vreugdenhil y Wijnbenga (1982) utilizan las ecuaciones completas en dos dimensiones con un coeficiente de viscosidad turbulenta constante y un esquema muy parecido al de Lendertsee. Este modelo fue utilizado para la simulación del flujo en el río Maas, en Holanda. Menéndez (1985, 1990) modifica los esquemas anteriores de manera que en cada medio incremento de tiempo las tres ecuaciones se resuelven por un método implícito, mejora la estabilidad de los esquemas anteriores y lo aplica para el estudio de la influencia de una nueva presa en el río Paraná. Ponce y Yabusaki (1991) por un lado, y Tingsanchali y Chiranont (1991) por otro, utilizan el esquema de Lendertsee para investigar la influencia de los distintos términos de las ecuaciones de Saint Venant y afirman que para poder modelar recirculaciones se deben considerar de alguna forma las tensiones efectivas (que son el resultado de la integración en la profundidad de las tensiones viscosas, tensiones de Reynolds y términos convectivos tridimensionales)

Otros trabajos donde se utilizan esquemas ADI son los de Fennema y Chaudhry (1989), Scarati (1993), Szykiewicz (1993), Trento (1994) y Montefusco y Valiani (1994) y Molls y Chaudhry (1995). Estos últimos proponen un esquema ADI utilizando lo que llaman coordenadas computacionales generalizadas y un coeficiente de viscosidad turbulenta constante, a partir de la versión ADI del esquema Beam and Warming que se aplica para varias situaciones que incluyen un resalto hidráulico en canal recto, una contracción con cambio de régimen, el flujo alrededor de un espigón, una curva y una rotura de presa. En todas ellas la comparación con resultados experimentales parece ser satisfactoria.

Los esquemas ADI también se han utilizado para la modelación del flujo en ingeniería marítima, como es el caso de Monsó (1986), que utiliza el esquema de Abbott (1972) para el modelado del flujo en zonas costeras. En concreto resuelve las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales para *ondas largas*, término que en ingeniería marítima se utiliza para aquellas ondas cuya longitud es muy superior a su altura. Bijvelds, Kranenburg y Stelling (1999) utilizan a su vez un esquema ADI para la modelación tridimensional del flujo alrededor de un muelle en un río, al igual que hacen Neary, Storpoulos y Odgaard (1999) para modelar el flujo en una incorporación lateral de un canal.

Aparte de los esquemas ADI mencionados, entre los métodos en diferencias finitas implícitas destaca el esquema de Beam and Warming, utilizado por Fennema y Chaudhry (1989) y Chaudhry (1993) para la rotura parcial de una presa. Por otro lado, Tayfur (1993) compara los métodos de la onda cinemática, onda difusiva y ecuaciones completas para el estudio de flujo superficial mediante un esquema en diferencias finitas implícitas centradas. Casulli (1999) presenta un esquema original, semi-implícito en el sentido de tratar implícitamente algunos términos de las ecuaciones (los términos de las fuerzas gravitatorias) y explícitamente otros, de manera que la condición de estabilidad de Courant no viene condicionada por la celeridad, sino tan solo por la velocidad del flujo, y se puede trabajar con incrementos de tiempo grandes obteniéndose un esquema altamente eficaz especialmente con velocidades pequeñas y grandes profundidades. El mismo esquema sirve para modelar flujos

mediante un modelo hidrostático o un modelo no hidrostático, y mediante una aproximación en una, dos o tres dimensiones, aunque siempre con la limitación de no poder considerar cambios de régimen.

El método de los elementos finitos no ha sido demasiado popular a la hora de resolver las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones por las mismas razones citadas en el caso unidimensional: complejidad y coste computacional. Con respecto a éste último, Vreugdenhil (1994) lo compara con distintos métodos de diferencias finitas llegando a la conclusión que, para una malla de unos mil nodos, el método requiere aproximadamente 200 veces más operaciones en cada incremento de tiempo que uno en diferencias finitas (la diferencia aumenta hasta 1800 veces más para diez mil nodos). Los elementos finitos tienen ventajas, frente a las diferencias finitas clásicas, para considerar mallas irregulares adaptadas a los contornos y con distintas densidades en distintas partes del dominio. Sin embargo, esta ventaja también la posee la técnica de los volúmenes finitos, utilizada por la mayoría de esquemas de alta resolución (apartado siguiente) y mucho más sencilla. Naaim y Brugnot (1994) comparan el método de los elementos finitos con un esquema de alta resolución en volúmenes finitos para una rotura de presa: ambos consiguen una precisión parecida en los resultados, pero el primero necesita 233 veces más tiempo de CPU.

Un referente en cuanto a modelación del flujo en lámina libre en dos dimensiones utilizando la técnica de los elementos finitos es el trabajo desarrollado por Katopodes (1984), que introduce una variante del esquema de Galerkin utilizando una función de ponderación discontinua, de manera que consigue representar frentes de onda y resaltos hidráulicos, aunque el mismo autor acabará finalmente por reconocer las ventajas de la técnica de los esquemas explícitos en volúmenes finitos (Katopodes, 1999). También Urban y Zielke (1985) emplean el método de los elementos finitos, concretamente el método de Bubnow-Galerkin, para modelar flujos bidimensionales permanentes en régimen lento, mientras que Leclerc (1990) utiliza también elementos finitos para estudiar el flujo en el estuario del río Manicouagan (Canadá). Otros autores que utilizan el método de los elementos finitos son Ambrosi y Salieri (1994), donde se estudia el flujo en el delta del río Po en régimen permanente, D'Alpaos y Delfina (1994) en el río Brenta (Italia) y Di Giammarco y Todini (1994), que utiliza un esquema de elementos finitos con volúmenes de control para la modelación del flujo superficial. También algunos de los modelos comerciales más utilizados (RMA-2, HIVEL, FESWMS, y TELEMAT) utilizan elementos finitos.

El método de los elementos finitos también se ha utilizado para problemas de ingeniería marítima, como es el caso del modelo *ANASTASE* (García, 1990). Éste es un modelo de los llamados *casi 3D*, donde la variación vertical de las variables se descompone en un número finito de perfiles o funciones base. Otro modelo, que resuelve algunos problemas de conservación de la masa del anterior mediante el uso de variables adimensionales, es el modelo ECADIS (Espino, 1994).

2.2.2. Esquemas bidimensionales de alta resolución

Los esquemas numéricos clásicos en dos dimensiones sufren los mismos problemas que para una dimensión en cuanto aparecen discontinuidades en la solución (resaltos hidráulicos, frentes de onda, etc.), por lo que en los últimos años se ha realizado un considerable esfuerzo para conseguir esquemas bidimensionales de alta resolución. Para ello, la técnica de los volúmenes finitos se ha mostrado muy útil. Desarrollada para la resolución de problemas en dinámica de gases, y mayoritariamente utilizada en este campo (los modelos comerciales más populares en este campo, como PHOENICS, FLUENT, FLOW3D y STAR-CD utilizan volúmenes finitos), toma las ventajas tanto de las diferencias finitas como de los elementos finitos. Partiendo de la forma integral de las ecuaciones en forma conservativa, las discontinuidades se representan sin ninguna técnica especial a la vez que se conserva la masa y la cantidad de movimiento (Tan, 1992), (Zhao, Shen, Lai y Tabios III, 1996).

Los primeros trabajos en esta línea fueron los realizados por Alcrudo y García Navarro, que presentan la extensión a dos dimensiones del esquema MUSCL (Alcrudo, 1992), (Alcrudo y García-Navarro, 1992b, 1993), y del esquema de McCormack TVD (Alcrudo, 1992), (Alcrudo y García-Navarro, 1994). Más adelante, Elliot y Chaudhry (1993) presentan un esquema para la resolución de problemas de rotura de presa en canales rectangulares curvos que consiste en una extensión del método de las características.

Tchamen y Kahawita (1994) presentan la comparación de varios *Riemann Solvers* para la resolución del problema de rotura de presa sobre lecho seco. Paquier (1994) desarrolla un esquema de alta resolución basándose directamente en el problema de Riemann y lo aplica a la presa del río Angly (Francia) y a la presa del Lawn Lake en Colorado mientras que Bechteler, Nujic y Otto (1994) desarrollan un esquema tipo ENO basándose en el esquema MUSCL para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones y lo aplican al área

inundable del Polder-Altenheim, en Alemania, al lado del Rin. Más adelante, Nujic (1995) presenta dos esquemas de alta resolución basados en el esquema de Lax-Friedrichs, obteniendo versiones simplificadas de los métodos ENO y del esquema MUSCL, pero con el inconveniente de introducir un parámetro de calibración que tiene un efecto parecido a una viscosidad artificial.

Francarollo y Toro (1995) utilizan el esquema WAF (*Weight Averaged Flux*), esquema conservativo, de segundo orden de precisión, que se puede ver como una generalización a sistemas no lineales de los esquemas de Lax-Wendroff o del Beam and Warming, junto con el *Riemann Solver* de Harten-Lax-Van Leer (o HLL). El esquema lo utilizan para un estudio numérico-experimental de problemas de rotura de presa. Franco (1996) realiza una comparación numérico-experimental del problema de rotura de presa utilizando el esquema de McCormack TVD, pero aplicado a una discretización en diferencias finitas.

Zhao, Shen, Lai y Tabios III (1996) presentan tres esquemas que, aunque no son realmente de alta resolución por ser de primer orden de precisión, utilizan *Riemann Solvers* para la resolución de flujo rápidamente variables basados en tres *Riemann Solvers* distintos: Flux Vector Splitting *Riemann Solver* de Roe y *Riemann Solver* de Osher. Los tres esquemas los aplican para la rotura parcial de una presa y el resalto hidráulico oblicuo. Los mismos autores junto con Tan (Zhao, Shen, Lai, Tabios III, Tan, 1994) utilizan este último esquema de Osher para el estudio del río Kissimmee en Florida. También Faeh (1996) desarrolla un modelo basado en el *Riemann Solver* de Roe para estudiar la erosión provocada por la rotura de presas.

Unami, Kawachi, Munir Babar y Itagati (1999), combinan elementos finitos con volúmenes finitos, los primeros para la ecuación de continuidad y los segundos para la del movimiento, junto con una integración temporal por el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El esquema lo utilizan para modelar el flujo en un aliviadero, y aunque no es estrictamente de alta resolución, los autores afirman que la combinación de los dos tipos de discretización permite eliminar las oscilaciones espúreas, aunque para ello añaden un término de dispersión artificial.

Al igual que en el problema unidimensional, en geometrías irregulares un buen tratamiento del término independiente de las ecuaciones de Saint Venant es fundamental. Como en una dimensión, fue también Vázquez-Cendon (Vázquez-Cendon, 1999c) la primera en proponer una discretización upwind del término independiente para esquemas bidimensionales de primer orden de precisión, seguida por Brufau (Brufau, 2000) con aplicaciones a geometrías reales. Posteriormente, los trabajos de Hubbard y García-Navarro (2000) realizan las primeras extensiones para esquemas de alta resolución con ejemplos para geometrías irregulares.

2.3. Modelos comerciales

Una primera familia de modelos comerciales, que representa sin duda los más extensamente utilizados por su sencillez y amplia difusión, son aquellos que permiten estudiar cauces fluviales mediante la aproximación unidimensional y régimen gradualmente variado. Entre ellos destacan los modelos del Hydraulic Engineering Center (HEC) del U.S. Army Corps of Engineers, modelos *HEC-2* y *HEC-RAS*, junto con el modelo *WSPRO* del U.S. Federal Highway Administration. Estos modelos han ido evolucionando con el tiempo y aumentando sus capacidades, de manera que permiten representar ríos con cambios de régimen, secciones compuestas irregulares, puentes, pasos bajo vías, uniones, etc. A su vez, poseen cómodas interfaces gráficas para representar la geometría y ver los resultados, comparando distintas hipótesis de funcionamiento, y realizar informes. Su limitación evidente es la de sus hipótesis principales: régimen permanente y unidimensional. Este tipo de modelos unidimensionales en régimen permanente, aunque representan una simplificación importante del fenómeno de propagación de una avenida, en muchos casos pueden ser una aproximación suficientemente adecuada para predecir niveles de agua y por ello son ampliamente utilizados en ingeniería. Otro modelo unidimensional para régimen permanente, de uso más restringido, es el *ISIS Steady* de HR Wallingford. Éste resuelve el mismo problema pero utilizando las ecuaciones completas de Saint Venant y un esquema típico para régimen no permanente (se puede escoger entre el esquema de los cuatro puntos de Preissmann u otro que se conoce como *Pseudo-Timestepping Method*) y condiciones de contorno constantes.

El segundo paso en los modelos comerciales, que representa un salto cualitativo importante en cuanto a complejidad de sus esquemas numéricos, son aquellos que mantienen la hipótesis de unidimensionalidad pero resuelven las ecuaciones de Saint Venant, es decir, permiten modelar cauces fluviales en régimen no permanente. De entre ellos destaca el MIKE 11 en propagación de avenidas, que tiene una serie de módulos que permiten distintas aproximaciones al fenómeno (régimen permanente, onda cinemática, onda difusiva y ecuaciones completas) y capacidad de modelar secciones compuestas y llanuras de inundación mediante células de almacenaje, así como azudes, pasos bajo vías y otras estructuras. Junto al módulo hidrodinámico se pueden utilizar otros módulos para el estudio de transporte de sedimentos y de calidad de aguas. MIKE 11 permite realizar la entrada de datos a partir de programas que utilizan Sistemas de Información Geográfica (GIS) y exportar los resultados hacia ellos. Por su lado, el modelo SOBEK, de Delft Hydraulics, para ríos canales y estuarios, bastante menos extendido, también permite la aproximación en régimen permanente o régimen variable y dispone de módulos adicionales para el estudio de calidad de aguas, intrusiones salinas, transporte de sedimentos y cambios morfológicos en ríos y estuarios. Finalmente, otro modelo unidimensional en régimen variable destacable es el DAMBRK, de BOSS International, orientado al estudio de la formación y propagación de ondas de rotura de presas, con capacidades para modelar desbordamientos. HR Wallingford dispone del modelo unidimensional ISIS Flow, basado en el esquema de los cuatro puntos de Preissmann, pero que permite también utilizar los métodos hidrológicos de Muskingum y VPMC (*Variable Point Muskingum-Cunge*). Finalmente recientemente, el US Army corps of Engineers Hydrologic Engineering Centre ha incorporado el modelo UNET, para flujo unidimensional, que utiliza un esquema en diferencias finitas implícitas de los cuatro puntos, en el conocido paquete HEC-RAS. Como este tipo de modelos se basan en resolver las ecuaciones de Saint Venant, lo que en algunos casos, como es la formación de discontinuidades, puede ser complejo, su uso debe hacerse con cuidado, ya que aunque el modelo dé una solución, el usuario debe asegurarse hasta que punto ésta es acorde con la realidad.

En cuanto a los modelos bidimensionales destaca, por su amplia difusión, el *BOSS SMS* de BOSS International Inc., que incorpora distintos módulos de cálculo como son el *RMA-2* y el *HIVEL2D*, desarrollados por el Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory del U.S. Army Corps of Engineers, el *FESWMS* del U.S. Federal Highway Administration, el *SED-2D* para transporte de sedimentos y el *RMA-4* para transporte de contaminantes. En definitiva el SMS es una interface de pre y post proceso para los distintos módulos de cálculo, con capacidad de generación de mallas de elementos finitos a partir de datos suministrados por el usuario o de información topográfica digitalizada. Tanto el *RMA-2* como el *FESWMS* son módulos hidrodinámicos con esquemas de elementos finitos que permiten el cálculo tanto en régimen lento como en rápido gracias a la inclusión de coeficientes de viscosidad turbulenta que pueden cambiar automáticamente para hacer estable el esquema. El *FESWMS* fue inicialmente desarrollado para el flujo alrededor de estructuras artificiales y estaciones de aforo, por lo que permite incorporar más fácilmente azudes, pasos bajo vías y pilas de puente. El *HIVEL2D* por otro lado es específico para flujos que contienen regímenes subcríticos y supercríticos a la vez, obteniéndose soluciones estables para flujos con discontinuidades como resaltos hidráulicos.

Electricité de France (EDF), a su vez, desarrolló un modelo bidimensional parecido, el modelo *TELEMAC* (Hervouet y Janin, 1994), (Bates, 1995), distribuido también por HR Wallinfgord, que utiliza un código de elementos finitos y viscosidad turbulenta constante, con capacidades de modelación hidrodinámica, dispersión de contaminantes, transporte de sedimentos y calidad de aguas. El Danish Hydraulics Institute ofrece el modelo MIKE21, con un módulo hidrodinámico que utiliza un esquema numérico del tipo ADI para resolver las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (y limitado por consiguiente a la modelación de flujo en régimen lento), que puede considerar, a parte de la pendiente del fondo y las fuerzas de fricción, el efecto de fuerzas como el viento, la fuerza de Coriolis, corrientes inducidas por el oleaje y la evapotranspiración. A parte del módulo básico hidrodinámico consta también de módulos para transporte de arena, material sólido cohesivo, transporte de contaminantes, calidad de aguas, eutrofización y polución por materiales pesados. Recientemente el DHI ha integrado en uno los dos modelos MIKE 11 y MIKE 21, dando paso al modelo MIKE FLOOD, de manera que en un único modelo puede haber zonas con aproximación unidimensional y otras en dos dimensiones. Sin embargo, los esquemas numéricos siguen siendo los del MIKE 11 y MIKE 21.

Otro modelo en diferencias finitas para la modelación del flujo hidrodinámico no permanente es el *SOBEK*, de Delft Hydraulics, que se basa en un esquema en diferencias finitas basado en una malla rectangular, permite modelar flujo subcrítico y supercrítico y tener en cuenta estructuras especiales como diques, viaductos, pasos bajo vía, azudes, etc.

Como se ha apuntado en la introducción de este capítulo, estos modelos comerciales, unidimensionales o bidimensionales, son muy amigables de utilizar pero sus esquemas numéricos distan de ser punteros. Poseen unas entradas de datos y salida de resultados gráficos espectaculares, y están contruidos de manera que prácticamente siempre se obtiene una solución. Se presentan como modelos capaces de resolver prácticamente cualquier tipo de problema de hidráulica fluvial: problemas de hidrodinámica, transporte de contaminantes, transporte sólido de materiales sueltos y cohesivos, problemas de calidad de aguas, inclusión de cualquier tipo de estructuras, eutrofización, etc. Sin embargo la mayoría de estos fenómenos son todavía muy desconocidos incluso en casos sencillos, por lo que estos modelos comerciales utilizan ecuaciones aproximadas o extrapolan el uso de esquemas numéricos simples a casos generales. Todos ellos utilizan una serie de hipótesis y simplificaciones importantes de las cuales no se suele informar al usuario. En el estado actual del conocimiento, los resultados obtenidos con cualquier modelo que pretenda ser general y capaz de resolver por sí sólo un gran abanico de problemas distintos, deben ser utilizados con precaución.

Para finalizar debemos mencionar algunos modelos comerciales en tres dimensiones que han aparecido recientemente. En primer lugar el modelo *MIKE 3* del Danish Hydraulics Institute, desarrollado para la simulación de la hidrodinámica, calidad de aguas y transporte de sedimentos (cohesivos y no cohesivos) en ríos, estuarios, bahías, zonas costeras y mares. MIKE 3 resuelve las ecuaciones de Reynolds con un esquema en diferencias finitas y permite utilizar distintas formulaciones para la consideración de la turbulencia como un coeficiente de viscosidad turbulenta de Boussinesq constante, un modelo de submalla de Smagorinsky, un modelo k , un modelo $k - \varepsilon$, y un modelo mixto Samgorinsky/ $k - \varepsilon$. El *RMA-10*, desarrollado por el Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory del U.S. Army Corps of Engineers para ser utilizado en superordenadores tipo CRAY, se basa en un código de elementos finitos tridimensionales, extensión del RMA-2, y puede modelar flujo permanente y no permanente, transporte de salinidad y de sedimentos. RMA-10 supone que el flujo se puede considerar como hidrostático, despreciando la aceleración vertical, y contempla la interacción del sedimento transportado con el fondo (evolución morfológica). Finalmente, el modelo Delft3D, de Delft Hydraulics, que se ofrece para el estudio de la hidrodinámica, calidad de agua, transporte de contaminantes y cambios morfológicos en ríos, lagos y embalses, estuarios, puertos, bahías, zonas costeras y mares cerrados, permite una aproximación tanto bidimensional como tridimensional y distintas opciones para considerar la turbulencia basándose también en el concepto de viscosidad turbulenta de Boussinesq. Finalmente sólo mencionar que algunos modelos desarrollados inicialmente para mecánica de gases, como es el caso de FLOW3D, debido a la similitud de las ecuaciones a resolver, se están utilizando actualmente para calcular flujos de agua en lámina libre. Respecto estos modelos comerciales tridimensionales, sirve el mismo comentario hecho para los modelos unidimensionales y bidimensionales sobre la precaución con que se deben contemplar los resultados obtenidos y la necesidad de un análisis crítico de los resultados.

3. Flujo variable en lámina libre

Para la modelación de la propagación de avenidas en ríos se deben resolver las ecuaciones del flujo variable del agua en lámina libre o ecuaciones de Saint Venant. Estas ecuaciones se deducen las ecuaciones a partir de las leyes físicas de conservación que rigen el flujo de un fluido en general. Particularizando a un fluido incompresible e isótropo, como es el agua, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento instantáneo y de ellas se deducen, considerando variables medias en el tiempo, las ecuaciones de Reynolds. Su resolución exigiría una discretización tridimensional del dominio de estudio y el esquema numérico sería complejo pero sobretodo muy costoso computacionalmente.

La mayoría de las veces el flujo de agua en cauces naturales presenta unas características que permiten simplificar estas ecuaciones más generales y obtener resultados suficientemente precisos con menos coste. De las ecuaciones de Reynolds, integrando en la profundidad para eliminar en ellas la dimensión vertical, se obtienen las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, válidas cuando el flujo que se quiere representar tiene también este carácter bidimensional, con velocidades verticales pequeñas, pendientes del fondo del cauce suaves, y en general, las dimensiones horizontales predominantes sobre la vertical.

La siguiente simplificación es el paso a las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, ecuaciones clásicas en hidráulica que muchas veces son suficientes para representar correctamente el movimiento no permanente en lámina libre en cauces, naturales o artificiales, debido a la marcada unidimensionalidad de éstos. El objetivo final es la resolución conjunta en una y dos dimensiones, utilizando la simplificación que consiga un mejor compromiso entre precisión y economía en cada zona de nuestro dominio.

Las ecuaciones de Saint Venant forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, hiperbólico y cuasi-lineal. El estudio de este tipo de sistemas y sus soluciones, concretando para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales y bidimensionales, constituye la última parte de este capítulo.

La teoría de las características permite obtener formas más sencillas de expresar los sistemas de ecuaciones, formas que quizás no sirvan directamente para la obtención de la solución, pero serán una gran ayuda a la hora de formular las condiciones de contorno necesarias en los esquemas numéricos y, sobretodo, para poner de manifiesto propiedades de los sistemas hiperbólicos y sus soluciones que permitirán obtener esquemas numéricos más eficientes. Desde un punto de vista matemático, las superficies características se pueden ver como aquellas superficies sobre las cuales el problema de valores iniciales no está bien definido: de esta manera su significado físico se hace patente enseguida como superficies de transmisión de información privilegiadas.

Las ecuaciones de Saint Venant pueden presentar soluciones discontinuas. En un cauce natural con flujo bidimensional, o incluso en el caso unidimensional, es probable que en alguna zona aparezca una discontinuidad en la solución (cambio de régimen, frente de onda). Aunque no es el objetivo final la modelación detallada y precisa de estas discontinuidades, sí se pretende que el esquema numérico las pueda representar y no supongan un obstáculo a la obtención de la solución en el resto del dominio.

Las soluciones discontinuas de sistemas de ecuaciones diferenciales cuasi-lineales constituyen fenómenos físicos ondulatorios y tradicionalmente han constituido un objetivo prioritario en mecánica de gases. Para ello es muy útil la solución del problema de Riemann, que consiste en ver qué ondas aparecen y cómo se propagan a partir de dos estados constantes que entran en contacto de repente. El problema de Riemann está únicamente bien definido en el caso unidimensional, pero las propiedades que se obtienen de su estudio y los métodos de resolución aproximada desarrollados por varios autores (conocidos como *approximate Riemann solvers*) son la clave para la resolución del problema bidimensional. Con la discretización en volúmenes finitos del dominio bidimensional, se puede considerar que en cada contorno de cada volumen finito existe precisamente un problema de Riemann unidimensional.

3.1. Ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

3.1.1. Ecuaciones del flujo bidimensional en lámina libre o ecuaciones de Saint Venant

Las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales se obtienen a partir de las leyes físicas de conservación de la masa y la cantidad de movimiento, junto con la primera y segunda leyes de la termodinámica. De ellas, para un fluido newtoniano e isótropo se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes, que particularizadas para describir las variables promediadas en un pequeño incremento de tiempo se concretan en las ecuaciones de Reynolds (Bladé 2005).

En gran parte de los flujos en lámina libre, y especialmente en problemas de propagación de avenidas en ríos, que son el objeto del presente trabajo, el valor de las variables cambia poco en una misma vertical. Esta consideración permite pensar en una simplificación de las ecuaciones de Reynolds a dos dimensiones mediante un promedio vertical de las ecuaciones tridimensionales. Para poder hacer esta simplificación se consideran las hipótesis siguientes:

1. Profundidad de la capa de agua pequeña con relación a las otras dimensiones del problema.
2. Distribución hidrostática de presiones en la vertical
3. Pendiente de solera reducida.

Estas tres hipótesis están estrechamente ligadas. Para que se cumpla la hipótesis de distribución hidrostática de presiones es necesario que la curvatura de las líneas de corriente sea pequeña. El cumplimiento de estas hipótesis implica además que las componentes de la velocidad y aceleración en el eje z son despreciables frente a las componentes en los otros ejes, y también que éstas últimas tienen una marcada uniformidad vertical.

Con esta integración de las ecuaciones de Reynolds en la profundidad, se obtienen las ecuaciones bidimensionales del flujo en lámina libre o *ecuaciones de Saint Venant bidimensionales*:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(hu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hu_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(hu_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(hu_1u_2) = -gh \frac{\partial}{\partial x_1}(h+z_0) - \frac{\tau_{0x_1} + \tau_{sx_1}}{\rho} + fhu_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1}(hT_{x_1x_1}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2}(hT_{x_1x_2}) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(hu_1u_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(hu_2^2) = -gh \frac{\partial}{\partial x_2}(h+z_0) - \frac{\tau_{0x_2} + \tau_{sx_2}}{\rho} + fhu_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1}(hT_{x_1x_2}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2}(hT_{x_2x_2}) \quad (3.3)$$

donde u_1, u_2 son las componentes de la velocidad (media en el sentido de Reynolds) integrada en la profundidad según x_1 y x_2 , τ_0 y τ_s son los tensores de tensiones (de segundo orden) contra el fondo y la superficie libre respectivamente, f el coeficiente de Coriolis para tener en cuenta la rotación de la tierra. z o x_3 es el eje de coordenadas vertical y h es la profundidad de la lámina de agua, mientras que $T_{x_i x_j}$ responden a la expresión:

$$T_{x_i x_j} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left(\rho v \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] - \rho \overline{u'_i u'_j} - \rho (\bar{u}_i - u_i)(\bar{u}_j - u_j) \right) dz \quad (3.4)$$

En esta última expresión u'_i, u'_j son las fluctuaciones turbulentas de Reynolds de u_i, u_j , mientras que donde \bar{u}_i, \bar{u}_j son las variable promediadas según:

$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u dt \quad (3.5)$$

es decir:

$$u = \bar{u} + u' \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) son las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en su expresión más completa en *forma conservativa*. Introduciendo la ecuación de continuidad en las ecuaciones del movimiento, se pueden escribir estas mismas ecuaciones en *forma no conservativa* como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hu_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + g \frac{\partial h}{\partial x_1} = -g \frac{\partial z_0}{\partial x_1} - \frac{\tau_{0x_1} + \tau_{sx_1}}{\rho h} + fu_2 + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1} (hT_{x_1x_1}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2} (hT_{x_1x_2}) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + g \frac{\partial h}{\partial x_2} = -g \frac{\partial z_0}{\partial x_2} - \frac{\tau_{0x_2} + \tau_{sx_2}}{\rho h} + fu_1 + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1} (hT_{x_1x_2}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2} (hT_{x_2x_2}) \quad (3.9)$$

3.1.2. Términos de las ecuaciones de Saint Venant

3.1.2.1 Aceleración local

Los términos de aceleración local $\partial u_1/\partial t$ y $\partial u_2/\partial t$ representan la variación de la velocidad con el tiempo en un punto fijo. Son los responsables del carácter no permanente del flujo.

3.1.2.2 Aceleración convectiva

Son los términos, $u_1 \partial u_1/\partial x_1$, $u_1 \partial u_2/\partial x_1$, $u_2 \partial u_1/\partial x_2$ y $u_2 \partial u_2/\partial x_2$ que representan el efecto del transporte con el flujo del gradiente de la velocidad. Son los responsables de la formación de vórtices, y su efecto es más importante cuanto mayor sea el número de Reynolds (relación entre fuerzas viscosas y fuerzas de inercia), como se desprende de un análisis adimensional de las ecuaciones. En presencia de altas velocidades o pequeña viscosidad, y desde el punto de vista matemático, son los responsables de la no-linealidad del sistema de ecuaciones.

La suma de la aceleración local y la convectiva es la derivada material, que representa la aceleración total de las partículas del fluido.

3.1.2.3 Pendiente de la superficie libre

Es el término $\partial/\partial x_i (h + z_0)$, que multiplicado por la aceleración de la gravedad g , representa la acción de las fuerzas gravitatorias, y se ha obtenido integrando en la vertical el término $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$ de las ecuaciones de

Reynolds utilizando la hipótesis de presión hidrostática.

Este término se puede descomponer en la suma de la pendiente del fondo ($S_{ox_1} = -\partial z_0/\partial x_1$, $S_{ox_2} = -\partial z_0/\partial x_2$) y el gradiente del calado, donde la primera es conocida ya que depende sólo de la geometría del problema. La pendiente del fondo es la principal responsable de la no homogeneidad de las ecuaciones, y su presencia aumenta la complejidad de los esquemas numéricos de resolución de forma considerable.

3.1.2.4 Tensiones en el fondo

Los términos debidos a la fricción contra el fondo $\tau_0/\rho h$ tienen un efecto no lineal de retardo del flujo. Aproximando el radio hidráulico por el calado se tiene $\tau_0 = \rho g h S_f$ (Chaudhry 1993), donde S_f es la pendiente

motriz. Para ésta, una expresión comúnmente utilizada es la fórmula de Manning. Con ella, para el caso de flujo bidimensional, la pendiente motriz se puede calcular como:

$$S_{f_1} = \frac{u_1 \sqrt{u_1^2 + u_2^2} n^2}{h^{4/3}} \quad ; \quad S_{f_2} = \frac{u_2 \sqrt{u_1^2 + u_2^2} n^2}{h^{4/3}} \quad (3.10)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

Cuando no se considera ningún modelo de turbulencia, lo cual es muy común en modelación de flujo en canales y cauces naturales como veremos más adelante, la disipación de energía debida a las tensiones efectivas se puede suponer que se incluye en la pendiente motriz, es decir, mediante la fórmula de Manning no se pretende aproximar solamente el efecto de las tensiones en el fondo, sino también el efecto de todo el término de tensiones efectivas.

3.1.2.5 Tensiones tangenciales en la superficie libre

La presencia de tensiones tangenciales en la superficie libre τ_s puede ser importante en grandes superficies con vientos fuertes. Existen distintas fórmulas propuestas para estimar este término, que tiene importancia principalmente para estudios oceanográficos, a partir de la velocidad del viento (Cunge, 1980), (Tan, 1992).

3.1.2.6 Fuerzas por unidad de masa

Las fuerzas por unidad de masa que actúan sobre el fluido son, en general, la fuerza de gravedad y la fuerza geostrofica o de Coriolis.

La primera, que en las ecuaciones de Navier-Stokes se representaba con el término del gradiente de presiones, queda, al realizar la integración en la vertical, como la pendiente de la superficie libre de la cual ya se ha hablado (apartado 3.1.2.3).

La segunda se puede escribir como:

$$\mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} fu_2 \\ -fu_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{b}_c es el vector de fuerza de Coriolis y $f = 2\omega \sin \lambda$ es el coeficiente de Coriolis, con ω la velocidad angular de rotación de la tierra y λ la latitud, dando lugar a los términos correspondientes de las ecuaciones.

3.1.2.7 Tensiones efectivas

La expresión (3.4) de las tensiones efectivas muestra que éstas constan de tres contribuciones. El primer sumando es el término de *tensiones viscosas* (o tensiones viscosas laminares), el único de los tres que representa unas tensiones reales, debido a la viscosidad del fluido.

El segundo término de las tensiones efectivas son *las tensiones turbulentas*, fruto del promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener las ecuaciones de Reynolds en variables promediadas. Para flujos turbulentos desarrollados las tensiones viscosas laminares son mucho más pequeñas que las turbulentas y sólo tienen importancia en una pequeña capa próxima a los contornos (Nezu, 1993), por lo que, o bien se suelen despreciar o bien se consideran conjuntamente con las segundas mediante un modelo de turbulencia. El intento de modelar correctamente las tensiones turbulentas ha dado origen a toda la teoría de turbulencia y a distintos modelos de turbulencia. Para flujo gradualmente variable la importancia de este término con respecto a las tensiones del fondo suele considerarse despreciable (apartado 3.1.2.8).

Finalmente el tercer término o término de *tensiones convectivas* resulta de la integración sobre la profundidad de los términos convectivos tridimensionales. Este término, también llamado término de *dispersión* (Nezu, 1993) o de *advección diferencial* (Vreughdenhil, 1994), se anularía si realmente la distribución de velocidades fuera uniforme en la vertical, y es más relevante cuanto más nos alejamos de la hipótesis de presión hidrostática. Es un término únicamente fruto del promedio en la vertical, por lo que no tiene nada que ver con los fenómenos turbulentos. Pese a que ha habido algunos intentos de modelar este término, ello no tiene demasiado sentido ya

que solamente es importante cuando nos alejamos de las hipótesis de deducción de las ecuaciones, es decir, cuando éstas dejan de ser válidas. En el caso de no poder desprestigiar las tensiones convectivas, habría que considerar flujo tridimensional con sus correspondientes ecuaciones (Nezu, 1993).

3.1.2.8 Turbulencia en el flujo en lámina libre

La turbulencia, o fluctuaciones de las partículas alrededor de una trayectoria media, se puede describir físicamente como una serie de movimientos en forma de vórtice o torbellino que cubren un amplio rango de tamaños con su correspondiente espectro de frecuencias de fluctuación. La distribución de los vórtices es altamente aleatoria y no permanente en el tiempo. Los vórtices más grandes, asociados con frecuencias de fluctuación más bajas, vienen provocados por las condiciones de contorno del flujo y su tamaño puede ser del mismo orden de magnitud que las ondas del flujo medio. Los vórtices más pequeños, asociados con altas frecuencias de fluctuación, son producidos por las fuerzas viscosas. El espectro de tamaños de vórtice aumenta con el número de Reynolds. Rodi (1980) y Nezu (1993) hacen una descripción detallada de los fenómenos turbulentos.

Los vórtices más grandes contribuyen al transporte de la cantidad de movimiento. Al ser del mismo orden de magnitud que el flujo medio, los vórtices interfieren con éste sustrayéndole energía cinética. A su vez estos vórtices más grandes nutren a los más pequeños de manera que la energía cinética se va transmitiendo hacia vórtices cada vez más pequeños y finalmente es disipada por las fuerzas viscosas. Vemos pues, que aunque la disipación de energía tiene lugar en los vórtices más pequeños, la energía cinética que pasa del movimiento medio al movimiento turbulento, y por tanto la energía que finalmente es disipada en los procesos turbulentos, viene condicionada por las características del movimiento medio y de los vórtices de mayor tamaño.

Los vórtices mayores, de la misma manera que el movimiento medio, vienen condicionados por las condiciones de contorno del problema. En las hipótesis de aguas poco profundas, el movimiento horizontal predomina sobre el vertical, y esto es cierto tanto para el movimiento medio como para las fluctuaciones turbulentas de mayores tamaños. Esta sensibilidad a una dirección se va perdiendo a medida que consideramos vórtices más pequeños hasta el punto que, si el flujo es turbulento desarrollado, el movimiento de los vórtices a escala más pequeña es isótropo.

Matemáticamente, los modelos de turbulencia consisten en aproximar de alguna manera el término correspondiente a las tensiones de Reynolds relacionándolo con las variables medias, de modo que los modelos de turbulencia no describen los detalles de las fluctuaciones turbulentas, sino el efecto de dichas fluctuaciones sobre las variables medias. La mayoría de modelos de turbulencia se han desarrollado para flujos en tres dimensiones, aunque se encuentran varios ejemplos de aplicación a las ecuaciones promediadas en la profundidad.

La mayoría de modelos para la resolución de las ecuaciones del flujo en lámina libre o bien no incluyen ningún modelo de turbulencia, de manera que el efecto de la turbulencia se tiene en cuenta solamente en el término de fricción contra el fondo. Para el cálculo hidrodinámico en cursos de agua naturales, pretender modelar correctamente la turbulencia mediante un coeficiente de viscosidad turbulenta constante no tiene demasiado sentido (Rodi, 1980), (Nezu, 1993). En muchas aplicaciones los términos de las tensiones turbulentas suelen ser despreciables comparados con otros términos y el único efecto notable de la turbulencia es a través de las tensiones en el fondo; aquí la inclusión de un modelo de turbulencia no tendría prácticamente ninguna influencia. Incluso en el caso en que los términos turbulentos fueran importantes, una correcta modelación de la turbulencia exigiría una discretización muy fina. En las aplicaciones a ríos, lo más probable es que la discretización para tener tiempos de cálculos aceptables sea demasiado burda para poder modelar bien la turbulencia. Menéndez (1985) afirma que las tensiones efectivas tienen importancia para flujos en que la curvatura de las líneas de corriente sea comparable a la profundidad, mientras Cetina y Rajar (1994) llegan a la conclusión que un modelo refinado de turbulencia no aporta ninguna mejora a la modelación de un flujo rápidamente variable en un ensanchamiento brusco, mediante la comparación de un modelo físico con dos modelos numéricos: uno sin considerar los términos turbulentos y otro incorporando un modelo $k - \varepsilon$.

Algunas veces, y especialmente para esquemas numéricos de elementos finitos, se utiliza un coeficiente de viscosidad turbulenta constante para añadir cierta difusión al esquema numérico con la finalidad de hacerlo más estable, tal como se dice explícitamente en Bates, Anderson y Hervouet (1995), Leclerc (1990), y los manuales de RMA-2 y HIVEL2D, perdiéndose todo el significado físico de dicho coeficiente. El caso más extremo es el de algunos modelos comerciales (RMA-2 y HIVEL2D) que ajustan automáticamente el coeficiente para obtener esquemas estables, o que recomiendan al usuario utilizar un coeficiente suficientemente grande para estabilizar

el esquema, pero a la vez lo más pequeño posible para que la solución no se aleje demasiado de la realidad. En el caso de considerar un coeficiente de viscosidad turbulenta constante en definitiva se está añadiendo un parámetro más que podría servir para calibrar el modelo.

Por todo lo dicho, como describen Rodi (1980) y Berezowsky (1993) y se ilustra mediante la comparación con resultados experimentales en los trabajos de Cetina y Rajar (1994), Molls y Chaudhry (1995) y Bonillo, Vázquez, Suárez y Puertas (1998) para estudios en cursos de agua naturales de una cierta dimensión espacial, donde la turbulencia se debe básicamente a la fricción y el movimiento es principalmente horizontal (hipótesis de aguas poco profundas), el uso de modelos de turbulencia no parece necesario ni se puede asegurar que éstos den buenos resultados con discretizaciones normales; incluso se discute desde un punto de vista teórico la propiedad de representar la turbulencia mediante un modelo bidimensional (Hervouet y Janin, 1994). Para el cálculo hidrodinámico el error cometido al considerar válidas las hipótesis de flujo bidimensional es del mismo orden que el error cometido al no considerar ningún modelo de turbulencia, por lo que hacerlo no aportaría mejoras sensibles a la solución mientras que sí podría añadir complejidad, restar eficiencia al esquema numérico, y añadir confusión al tener más parámetros que ajustar sin un criterio claro para hacerlo. Cualquier modelo de turbulencia contiene parámetros que deben ajustarse mediante un estudio experimental, de manera que ningún modelo de turbulencia se debería aceptar sin una buena verificación experimental.

Por otro lado, aunque el flujo medio sea eminentemente bidimensional, los fenómenos turbulentos pueden tener componentes verticales importantes que nunca se pueden modelar bien con las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales. Un modelo de turbulencia completo en el cálculo del flujo del agua en lámina libre sí que puede tener sentido en flujos turbulentos tridimensionales y para cierto tipo de flujos (cambios de régimen, variaciones bruscas en dirección y módulo de la velocidad, etc.), utilizando entonces las ecuaciones de Reynolds tridimensionales.

A pesar de lo dicho, para problemas termodinámicos donde interesa conocer distribuciones de temperatura (interviene la ecuación de la energía), o bien para problemas de dispersión de contaminantes (en los cuales se utiliza una ecuación de conservación para la concentración), aparece un flujo turbulento de calor o concentración que sí es importante frente a los otros términos de la ecuación, y debe ser modelado correctamente. Por ello, en estudios termodinámicos o de dispersión de contaminantes, es conveniente utilizar un modelo de turbulencia completo (Mohammadi y Pironneau, 1994), (Bonillo, Vázquez, Suárez y Puertas, 1998).

3.1.3. Simplificación de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones

Si no se considera la fuerza de Coriolis, que para cauces de ríos no suele ser significativa, ni las tensiones efectivas, que tienen poca importancia con respecto a los otros términos, ni las tensiones producidas por el viento en la superficie libre, se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.14)$$

donde se ha utilizado la notación x e y para las direcciones x_1 y x_2 , así como u y v para u_1 y u_2 .

No se ha considerado aquí ningún modelo de turbulencia, por lo que la disipación de los términos de tensiones efectivas solamente se puede tener en cuenta, de manera muy aproximada, en el término de la pendiente motriz, juntamente con las tensiones de fondo.

Utilizando notación vectorial, se pueden escribir estas ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones en forma conservativa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables de flujo, \mathbf{F} es *el tensor de flujo* y \mathbf{H} es el término independiente o término fuente, que responden a las expresiones:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} & huv \\ huv & hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}; \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.15) consta de tres términos. Como se desprende del planteamiento que se ha hecho de las ecuaciones a partir de las leyes de conservación, el primer término representa la variación temporal local de las variables hidráulicas: masa y cantidad de movimiento; el segundo término representa la variación espacial de los flujos de dichas cantidades; el tercer término (término independiente) representa la ganancia o pérdida de masa y cantidad de movimiento por unidad de tiempo en un volumen diferencial que se mueve con el fluido. Evidentemente la variación de masa debe de ser nula, por lo que la primera componente del vector de variables independientes es cero.

La contribución exterior a la cantidad de movimiento, con las hipótesis realizadas, tiene dos razones: la variación de energía potencial (reflejada en la pendiente del fondo) y las fuerzas de fricción con el contorno (reflejada en la pendiente motriz).

Introduciendo la ecuación de continuidad en las ecuaciones del movimiento, o directamente a partir de las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9), se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant en forma no conservativa como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{ox} - S_{fx}) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{oy} - S_{fy}) \quad (3.19)$$

Las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa presentan grandes ventajas a la hora de plantear esquemas de resolución que permitan obtener soluciones con discontinuidades, como se comenta en el capítulo siguiente, aparte de que son la expresión más directa de las leyes de conservación que gobiernan el fenómeno físico.

3.2. Ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

Muchos problemas de hidráulica general, y hidráulica fluvial en concreto, tienen un carácter marcadamente unidimensional. Otras veces la unidimensionalidad no es tan clara pero el hecho de tratarlo como un problema bidimensional no es posible por distintas razones, como por ejemplo, de obtención de información necesaria.

Por otro lado el estudio de las ecuaciones unidimensionales puede ser útil al ser éstas más sencillas que las bidimensionales, pudiéndose obtener conclusiones más fácilmente y luego extenderlas a las ecuaciones bidimensionales.

Para obtener las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales se pueden seguir dos caminos: a) a partir de las ecuaciones bidimensionales suprimir las dependencias de la dimensión y , lo que equivaldría a hacer un promedio en la anchura; esto sólo es factible para cauces rectangulares, y b) deducir directamente las ecuaciones utilizando las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento.

El segundo camino se puede aplicar a cauces de sección arbitraria, incluso no prismáticos mientras se pueda considerar cierta la hipótesis de unidimensionalidad, es más ilustrativo sobre el significado de los distintos términos de las ecuaciones, y se puede consultar en distintas fuentes (Cunge, 1980), (Gómez, 1988), (Alcrudo, 1992), (Chaudhry, 1993), (Franco, 1996).

Las ecuaciones de Saint Venant para canal no prismático que resultan son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (3.20)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

utilizando como variables el área de la sección mojada A y el caudal circulante Q . I_1 es la fuerza debida a la presión del agua en una sección, que puede escribirse como el momento geométrico, o momento de primer orden de la sección respecto de la superficie libre:

$$I_1 = \int_0^h (h - \eta) b(x, \eta) d\eta \quad (3.22)$$

donde b es el ancho superficial y h el calado. I_2 es la contribución de las fuerzas de presión del contorno definida como:

$$I_2 = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial b(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (3.23)$$

En canales prismáticos, aunque tengan una sección cualquiera, el término I_2 es idénticamente igual a cero, mientras que en canales no prismáticos es distinto de cero.

Para canales rectangulares, donde el área es el ancho multiplicado por el calado, las ecuaciones se pueden simplificar utilizando como variables hidráulicas el calado y el caudal, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (3.24)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Esta versión, donde u representa la velocidad, es la simplificación directa de las ecuaciones bidimensionales (3.15), (3.16) a una dimensión.

Si en las ecuaciones unidimensionales para cauces no prismáticos incorporamos la ecuación de continuidad en la del movimiento, podemos obtener otra forma de las mismas ecuaciones, la forma no conservativa, como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \quad (3.27)$$

Para la deducción de estas ecuaciones en forma no conservativa a partir de las ecuaciones (3.20)(3.21) se ha utilizado que la derivada de I_1 respecto de la dirección x se puede escribir, utilizando la regla de Leibnitz de derivación bajo el signo integral, como:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.28)$$

3.3. Análisis de las ecuaciones de Saint Venant

3.3.1.1 Caso unidimensional

En el caso de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para canal no prismático escritas en forma conservativa (3.20), (3.21), la matriz jacobiana \mathbf{A} del vector de flujo \mathbf{F} :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.29)$$

responde a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{b} - \frac{Q^2}{A^2} & 2 \frac{Q}{A} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

En la deducción de la expresión de \mathbf{A} se ha utilizado que la derivada del término de fuerzas de presión en una sección I_1 respecto del área es:

$$\frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_0^h (h-\eta)b(x,\eta)d\eta = \frac{A(h)}{b(h)} \quad (3.31)$$

Los valores propios de la matriz \mathbf{A} se obtienen resolviendo la siguiente ecuación para λ , llamada *ecuación característica* o *polinomio característico*:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.32)$$

donde $\det()$ indica el determinante e \mathbf{I} la matriz identidad. Con ello se obtienen los valores propios y vectores propios:

$$\lambda_{1,2} = u \pm c \quad ; \quad \mathbf{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

En los cuales c es la celeridad y u la velocidad:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad ; \quad u = \frac{Q}{A} \quad (3.34)$$

En nuestro caso los valores propios son siempre reales y distintos, y los vectores propios independientes, por lo que el sistema de ecuaciones es hiperbólico.

3.3.1.2 Caso bidimensional

En el caso de tener dos direcciones espaciales x e y , para sistema de ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{H} \quad (3.35)$$

el sistema es hiperbólico en un dominio de (x, y, t) si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Todos los valores propios de una matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ son reales, donde α_1 y α_2 son números reales que cumplen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ (es decir, las componentes de un vector unitario en el plano $x-y$).
2. Para la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ existe un sistema completo de vectores propios ortogonales.

Si los valores propios son todos distintos, la segunda condición se cumple automáticamente y se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico.

Podemos escribir las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en forma conservativa (3.15), (3.16) en la forma (3.35) con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Entonces los valores propios de la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ se obtienen de resolver la ecuación característica para λ :

$$\det(\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.37)$$

de donde se obtiene:

$$\lambda_{1,3} = \alpha_1 u + \alpha_2 v \pm \sqrt{gh} \quad ; \quad \lambda_2 = \alpha_1 u + \alpha_2 v \quad (3.38)$$

y los vectores propios:

$$\mathbf{e}_{1,3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \pm \sqrt{gh} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Los valores α_1 y α_2 se pueden entender como las componentes de un cierto vector de dirección $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ en el plano $x-y$, con $\alpha_1 = \cos \theta$ y $\alpha_2 = \sin \theta$, donde θ es el ángulo que forma dicha dirección con el eje x . Esta consideración tendrá importancia en el siguiente apartado a la hora de definir las superficies características y ver su significado físico.

Para las ecuaciones de Saint Venant, para toda matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ se cumple siempre que los tres valores propios son distintos y por lo tanto el sistema es estrictamente hiperbólico.

3.3.2. Teoría de las características

Los sistemas de ecuaciones hiperbólicos tienen un comportamiento especial, asociado con la velocidad con que la información se propaga a través del dominio de estudio (celeridad o velocidad de onda), que se pone de manifiesto con la teoría de las características. Un estudio exhaustivo de la teoría de las características para sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicos se encuentra en Courant y Hilbert (1962) y también en (Jeffrey, 1976) para el caso concreto de sistemas de ecuaciones cuasi-lineales. Aquí nos centraremos en su aplicación a las ecuaciones de Saint Venant, en una y dos dimensiones, y concretamente en aquellos aspectos que nos revelan propiedades de dichas ecuaciones que luego serán útiles en la elaboración de esquemas numéricos para su resolución.

En general las características son un conjunto de direcciones privilegiadas, líneas en el espacio x,t en el caso 1D y superficies en el espacio x,y,t en el caso 2D, en las cuales el sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica de manera considerable. En el primer caso el sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales original se puede sustituir, en las líneas características, por otro sistema de dos ecuaciones diferenciales pero ahora en

derivadas totales. En el caso 2D, lo que se consigue en las superficies características es reducir el sistema original a otro sistema de ecuaciones con una variable independiente menos.

Ambos casos se pueden ver como casos particulares de sistemas hiperbólicos multidimensionales (Jeffrey, 1976), donde las características (líneas en el caso 1D y superficies en el 2D) serían entonces un conjunto de hipersuperficies que conducen a un sistema de coordenadas natural en el cual se pueden reescribir las ecuaciones originales de una forma más sencilla. En concreto, las características serían hipersuperficies a través de las cuales una solución continua puede presentar discontinuidades en sus derivadas respecto la dirección normal a ellas, lo que veremos que es lo mismo que decir que las características actúan como elementos de transporte de este tipo de discontinuidades, que llamaremos *discontinuidades débiles* (apartado 3.4.)

Toda la teoría de las características sirve para poner de manifiesto una serie de propiedades analíticas que deben cumplir las soluciones de sistemas hiperbólicos, tanto continuas como discontinuas, y que serán fundamentales a la hora de desarrollar esquemas numéricos. Quizá el ejemplo más conocido sería el caso de los *invariantes o cuasi-invariantes de Riemann*, que son unas magnitudes que se mantienen constantes sobre las características en el caso de que el término independiente en las ecuaciones originales fuera nulo, y cuyo estudio facilita enormemente la interpretación física del sistema de ecuaciones.

Las características son líneas en (x, t) en el caso 1D, superficies en (x, y, t) en el caso 2D y en el caso más general de un sistema multidimensional serían hipersuperficies en (\mathbf{x}, t) . En este apartado, por ser el caso 2D el caso más general que se abordará en este trabajo y por simplicidad a la hora de representarlas gráficamente, se hablará siempre de superficies características.

Una manera de presentar matemáticamente las superficies características podría ser como aquellas superficies en (x, y, t) que no servirían como condiciones iniciales para la obtención de la. Es decir, si conocemos el valor que toma la solución de en una superficie característica de (x, y, t) , no se puede conocer el valor que toma dicha solución en puntos próximos a dicha superficie, mientras que en general si que se puede para otras superficies cualquiera. Esta idea es equivalente a decir que conociendo los valores de la solución $U(x, y, t)$ sobre una superficie característica no se puede calcular el valor de la derivada de U respecto la dirección normal a dicha superficie. Conociendo dicha derivada y los valores de U sobre la superficie se podrían conocer U en puntos de (x, y, t) próximos a la superficie característica.

A partir de esta idea, se pueden plantear qué relaciones matemáticas deben cumplirse para que una superficie sea característica. Si se considera una superficie cualquiera Φ en el espacio (x, y, t) sobre la cual se conoce $U(x, y, t)$ se puede obtener la derivada de U respecto la dirección normal a partir de los propios valores de U y de sus derivadas sobre la superficie Φ . Se puede ver (Jeffrey 1976) que la derivada de U normal a Φ estará indeterminada siempre y cuando se cumpla la condición

$$Q(P, \alpha, \lambda) = \det(\alpha_1 A_1(P) + \alpha_2 A_2(P) - \lambda I) = 0 \quad (3.40)$$

en cuyo caso la superficie Φ será una superficie característica. De manera que las superficies características se pueden obtener imponiendo que se cumpla esta última ecuación. Para cada vector unitario (α_1, α_2) en el plano x - y se obtiene de esta forma un polinomio característico de grado n tal que sus raíces λ determinan unos vectores $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$, que son precisamente los vectores de (x, y, t) normales a las superficies características.

Otra posible interpretación física de una superficie característica $\Phi(t, x, y) = 0$ es entenderla como las distintas posiciones que va tomando una curva determinada sobre el plano x - y que se mueve al transcurrir el tiempo t . Esta curva a veces se menciona en la bibliografía como *curva característica*, y no es más que la intersección de la superficie característica con planos $t = \text{constante}$. Estas curvas características son distintas de las *líneas características* a las que estamos acostumbrados en el caso 1D y que definiremos en el apartado 3.3.2.1, que son las superficies características particularizadas para una dimensión.

Se ha dicho que el vector $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ es normal a una superficie característica, de manera que si se considera ahora un corte por un plano vertical (paralelo al eje t) que contenga dicho vector, la superficie característica cortará este plano según una línea en la dirección de $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, 1)$ (Figura 3.1).

Se aprecia pues que en un intervalo de tiempo igual a la unidad, una curva característica se desplazará sobre el plano físico $x-y$ una distancia λ en la dirección normal a ella. Los valores propios λ representan entonces la velocidad con que se movería la curva característica respecto el plano físico $x-y$ en cada instante, es decir, la velocidad de propagación de la información sobre $x-y$.

Por otro lado, una superficie característica tiene asociado siempre un valor propio λ_i , cero del polinomio característico $Q(P, \alpha, \lambda)$ la dirección normal a una característica debe ser proporcional al vector propio e_i asociado a dicha característica.

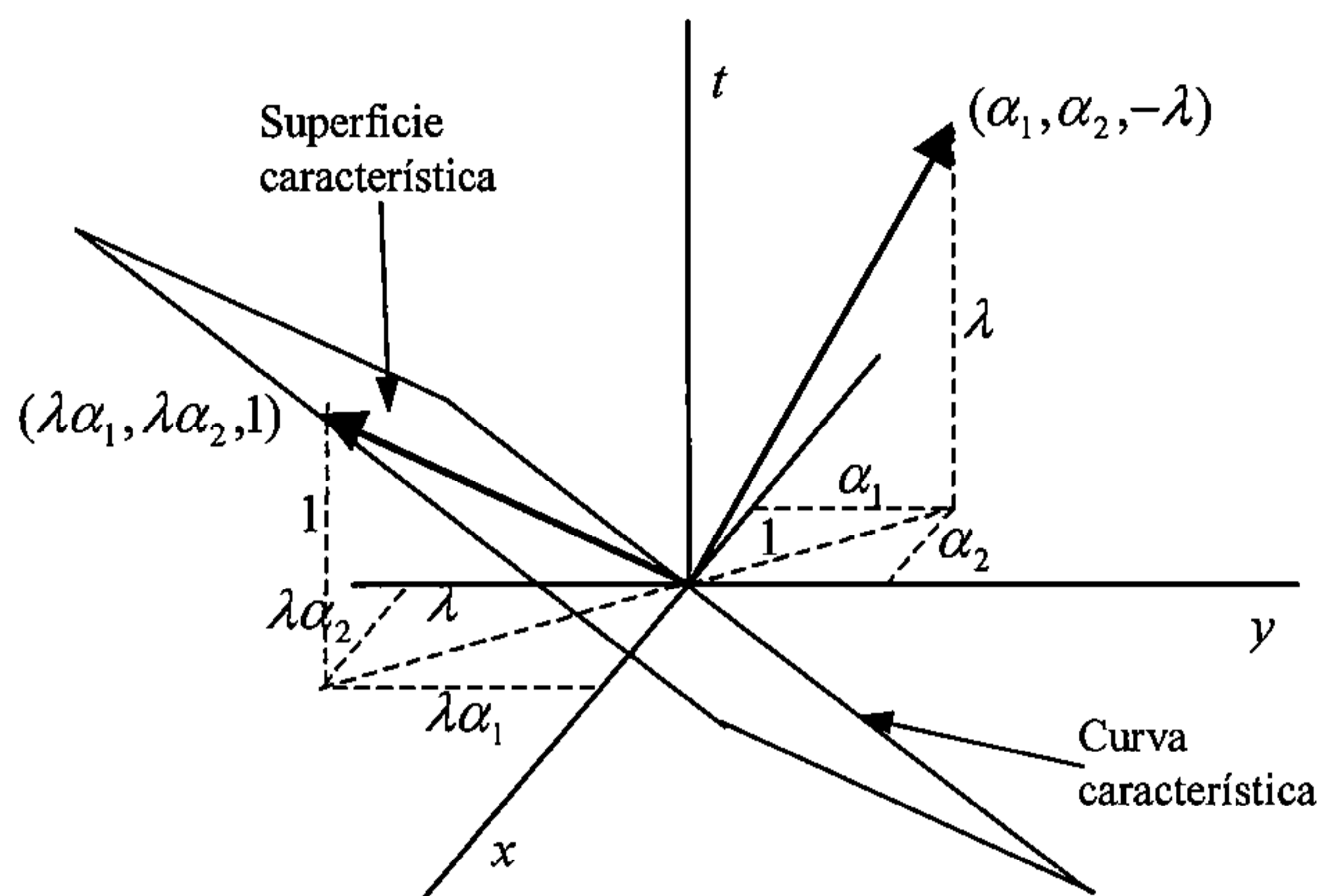


Figura 3.1. Vector normal a una superficie característica y significado físico de λ .

3.3.2.1 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces prismáticos rectangulares

La matriz jacobiana del vector de flujo de las ecuaciones de Saint Venant para cauces prismáticos rectangulares es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

donde en este caso la celeridad c responde a la expresión:

$$c = \sqrt{gh} \quad (3.42)$$

Con el proceso planteado en el apartado anterior para la obtención de las superficies características (líneas en este caso), al haber una sola dimensión espacial el vector unitario α que interviene en la definición del polinomio característico se reduce a un vector unitario en la dirección x , es decir, $\alpha_1 = 1$, con lo que el polinomio característico no depende en este caso de α , y sus raíces vienen dadas por (3.33) y las superficies características se pueden describir de forma diferencial con la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\mathbf{U}, x, t) \quad (3.43)$$

que utilizando el resultado (3.33) nos conduce a las ecuaciones de las dos líneas características:

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (3.44)$$

La primera de ellas es la dirección característica *positiva* o C^+ y la segunda la dirección característica *negativa* o C^- . De (3.43) y (3.44) podemos ver que la derivada direccional a lo largo de una línea característica se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.45)$$

Con esta consideración se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant para canal rectangular prismático en forma característica como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (3.46)$$

La interpretación física de las ecuaciones (3.46) se encuentra ampliamente documentada en la bibliografía (Henderson, 1966), (Gómez, 1988), (Martín, 1989). Las variables

$$J^+ = u + 2c \quad ; \quad J^- = u - 2c \quad (3.47)$$

se conocen por el nombre de *variables características* o *cuasi-invariantes de Riemann* y en el caso particular que el término independiente H fuera nulo, se conocen simplemente por *invariantes de Riemann*. El significado de la parte izquierda de la igualdad (3.46) es precisamente la variación de los invariantes de Riemann J^+ y J^- a lo largo de las respectivas líneas características C^+ y C^- , la cual es cero si el sistema es homogéneo y toma el valor del término independiente en el caso que éste exista.

Las ecuaciones de Saint Venant sobre las líneas características, se pueden escribir pues, en derivadas totales, como:

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2c) = g(S_0 - S_f) \quad (3.48)$$

La forma característica de las ecuaciones de Saint Venant (3.46) ha originado el método clásico de resolución de estas ecuaciones conocido como *método de las características*, con todas sus variantes dependiendo de si es explícito o implícito y de la manera como se aproxima el valor de las variables en puntos donde su valor exacto es desconocido. También el estudio de las líneas características permite conocer el dominio de dependencia y la zona de influencia de un punto del canal en un instante, el número de condiciones de contorno que se deben dar en cada instante en el extremo aguas arriba y aguas abajo del canal dependiendo del tipo de flujo, y también cómo se propagan ciertas ondas sencillas en un canal a lo largo del tiempo.

Las ecuaciones de Saint Venant se pueden entender como una ecuación de onda, donde la matriz A contiene la información de la velocidad de propagación de la onda y cuyas direcciones principales (líneas características en nuestro caso) se pueden obtener a partir de sus valores propios. Los valores propios de A , que son la suma de la velocidad del agua en el canal u y la celeridad de la onda de gravedad c , corresponden a la velocidad de propagación de dicha onda respecto un sistema de coordenadas fijo. El término de la celeridad c , que depende solamente de las características geométricas de la sección mojada, nos indica la capacidad que tiene el agua de transmitir información de dicha sección del canal a otra inmediatamente contigua.

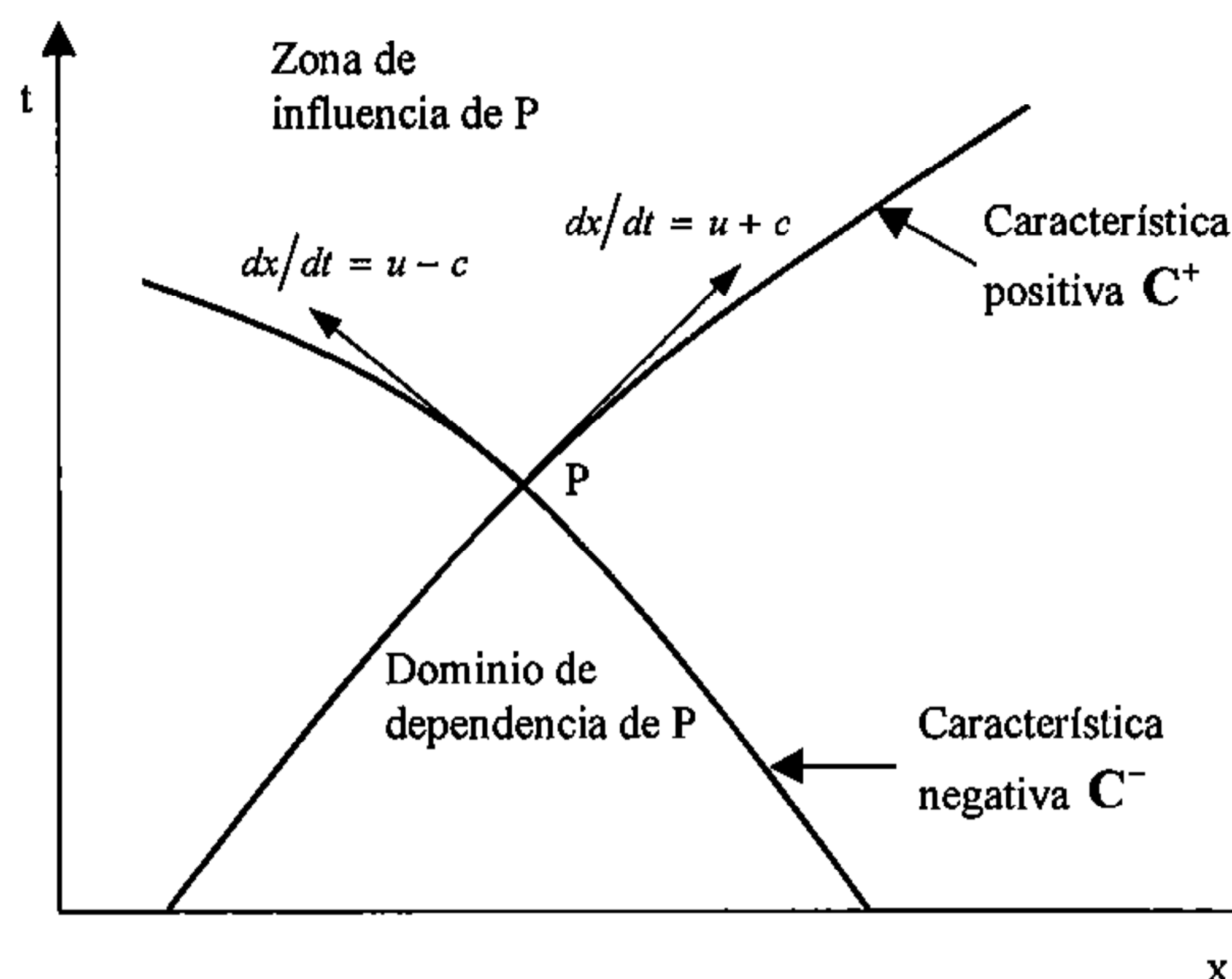


Figura 3.2. Líneas características unidimensionales en el espacio $x-t$

3.3.2.2 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces cualesquiera

En este caso (Gómez, 1984) es necesario antes definir una variable auxiliar ω , llamada *variable de Escoffier*, que es en el fondo una medida del nivel de agua en un punto del cauce:

$$\omega = \int_0^A c \frac{dA}{A} = \int_0^y \sqrt{\frac{gA}{b}} \frac{bdy}{A} = \int_0^y \sqrt{\frac{gb}{A}} dy \quad (3.49)$$

de manera que, utilizando la regla de Leibnitz, se puede escribir su diferencial como:

$$d\omega = \sqrt{\frac{gb}{A}} dy \quad (3.50)$$

y se obtienen las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauce cualquiera en forma característica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm \omega) + (u \pm c) \frac{\partial(u \pm \omega)}{\partial x} = g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right) \quad (3.51)$$

o, en derivadas totales:

$$\frac{d}{dt}(u \pm \omega) = g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right) \quad (3.52)$$

Su significado físico es el mismo que para las ecuaciones (3.46), pero ahora los cuasi-invariantes de Riemann están formados por la suma de la velocidad y la variable de Escoffier, y en el término independiente aparece una contribución más debido a la posible variación de la sección a lo largo del cauce.

3.3.2.3 Características para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

Mediante la aplicación de la teoría de las características al caso bidimensional, se pueden obtener expresiones simplificadas de las ecuaciones de Saint Venant, pero sobretodo, obtener información sobre la estructura de la solución y de cómo se transmite la información de una zona a otra del dominio.

En este caso se obtienen dos familias de superficies características distintas. Sobre cada una de ellas se pueden deducir una condición de compatibilidad, al estilo de lo que se ha hecho en el caso 1-D, y obtener un sistema equivalente con una variable independiente menos.

Primera familia de superficies características

En este caso las superficies características corresponden a superficies cuyos vectores normales N_1 forman un conoide cuyo eje responde a la ecuación:

$$\begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ t = t \end{cases} \quad (3.53)$$

Mientras la ecuación del cono en paramétricas se puede escribir como:

$$\begin{cases} x = (u \pm c \cos \theta)t \\ y = (v \pm c \sin \theta)t \\ t = t \end{cases} \quad (3.54)$$

El significado físico del conoide se puede entender como la trayectoria de una perturbación que empieza en su vértice y se propaga. Cada una de sus secciones circulares por un plano $t = \text{constante}$ representa la trayectoria alcanzada por la perturbación en cada instante. Las generatrices del conoide característico, que están formadas por los puntos de tangencia con las superficies características, se conocen por el nombre de *bicaracterísticas*.

Para cada valor del ángulo θ se obtiene la ecuación de una de las rectas generatrices del cono, que son las bicaracterísticas. Si se corta el cono por un plano $t = \text{constante}$ se obtiene una circunferencia con centro en el punto (ut, vt) y radio ct . La proyección sobre el plano $t = \text{constante}$ del vector normal a una superficie característica es un vector de componentes $(\cos \theta, \sin \theta)$ mientras que el vector tangente al cono en el plano $t = \text{constante}$, que está sobre la correspondiente superficie característica, es $(-\sin \theta, \cos \theta)$. Estas consideraciones son relevantes para las condiciones de contorno del esquema numérico en la resolución de las ecuaciones bidimensionales.

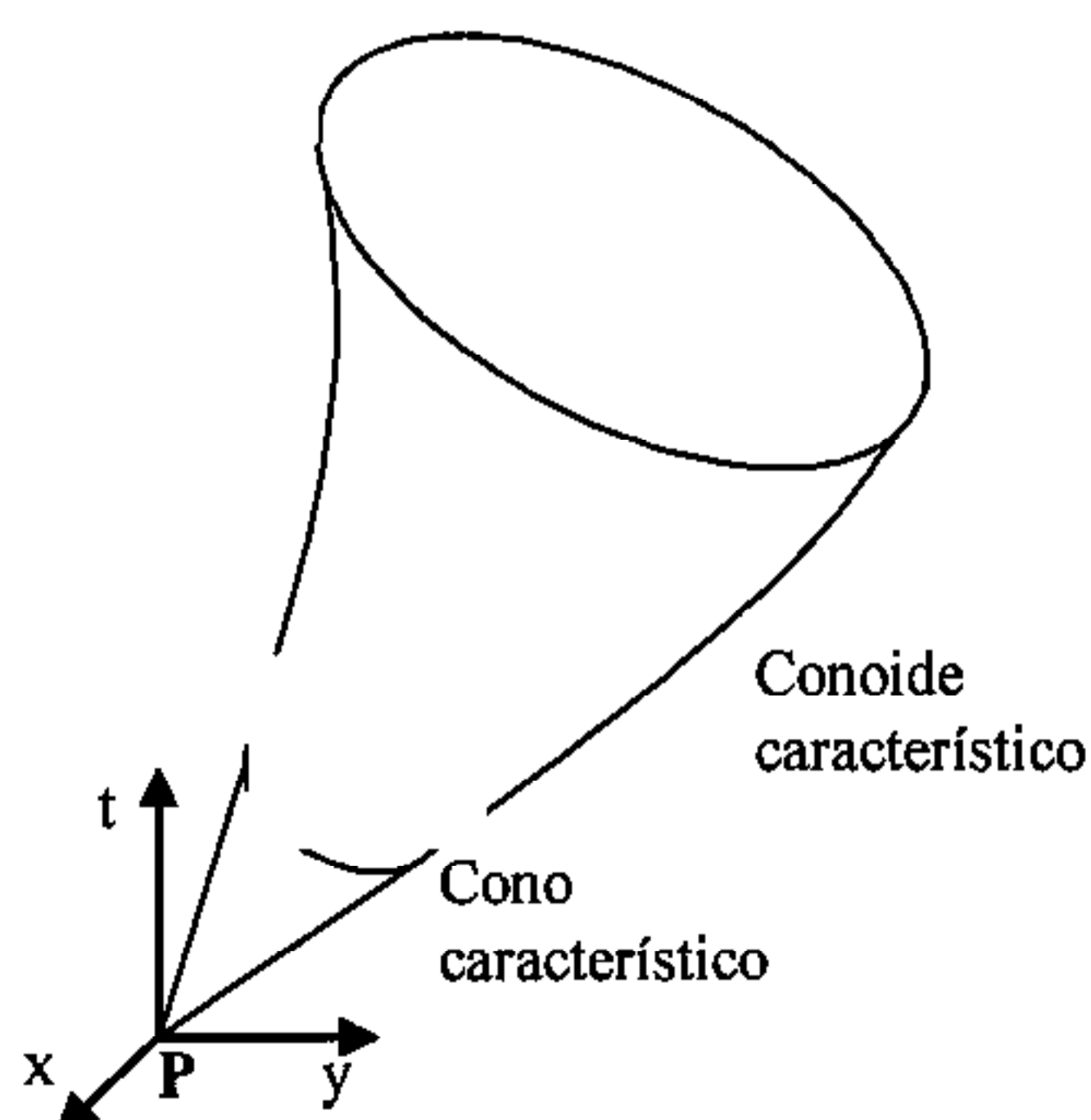


Figura 3.3. Cono y conoide característicos

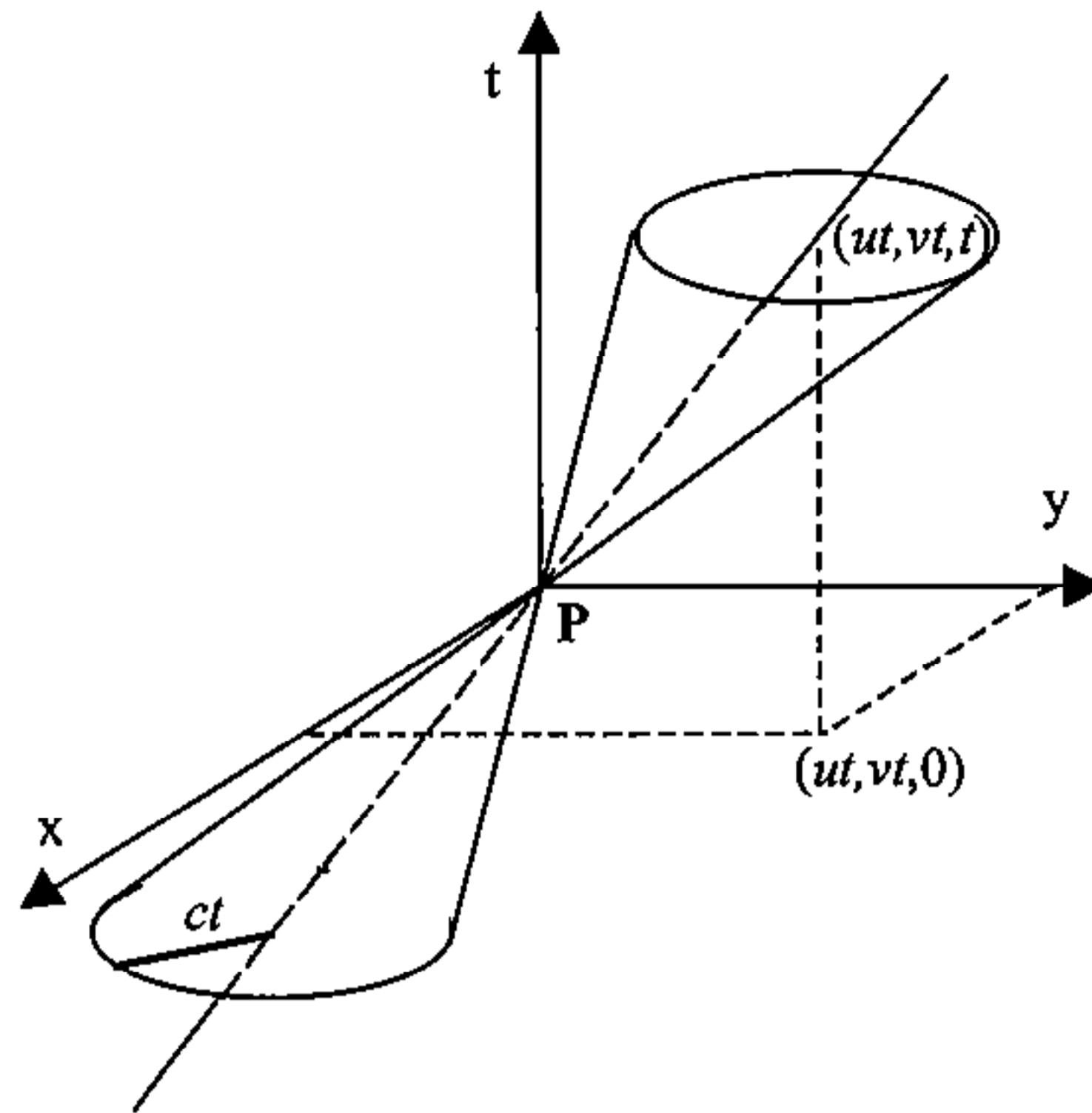


Figura 3.4. Cono característico

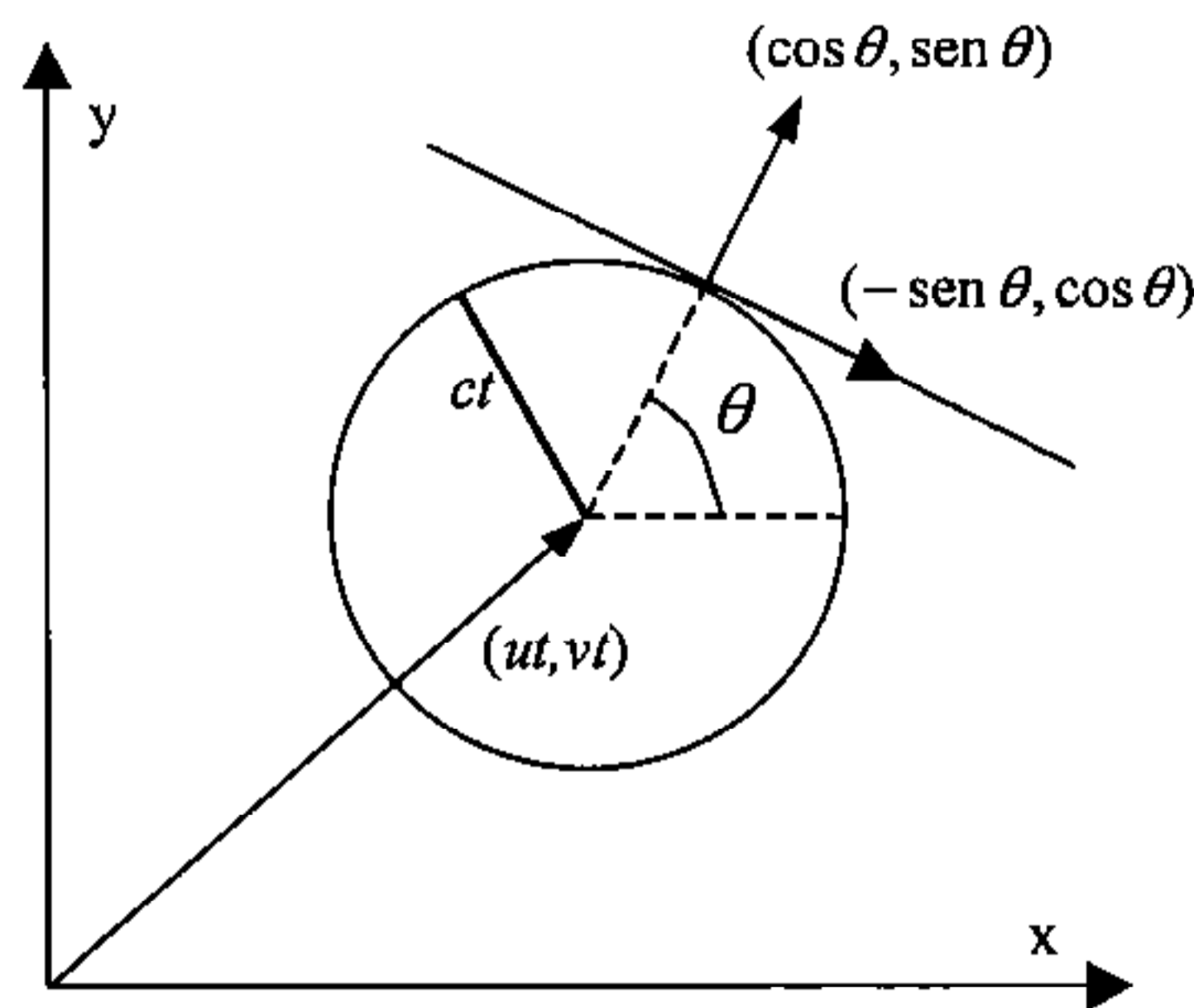


Figura 3.5. Corte del cono característico por un plano $t = \text{constante}$

Segunda familia de superficies características

Ahora la expresión del plano tangente a una superficie característica es:

$$-(u \cos \theta + v \sin \theta)t + x \cos \theta + y \sin \theta = 0 \tag{3.55}$$

Los planos tangentes a las superficies características de la segunda familia (o aproximaciones locales a estas superficies) pasan por el punto P y se llaman *superficies de corriente*. Todas las superficies de corriente forman un haz de planos que intersectan según una recta que coincide con eje del cono característico de la primera familia de superficies características. La envolvente de todas las superficies características de la segunda familia será pues esta misma recta que se conoce por el nombre de *cuasi-trayectoria* y corresponde al cono característico de la primera familia. La proyección de la cuasi-trayectoria sobre el plano x, y es una recta con la dirección dada por el vector velocidad (u, v) , que es la *trayectoria*.

En la Figura 3.6 se representa una superficie de corriente, su dirección normal N'_2 y la cuasi-trayectoria. En la Figura 3.7 se representa su proyección sobre un plano $t = \text{constante}$.

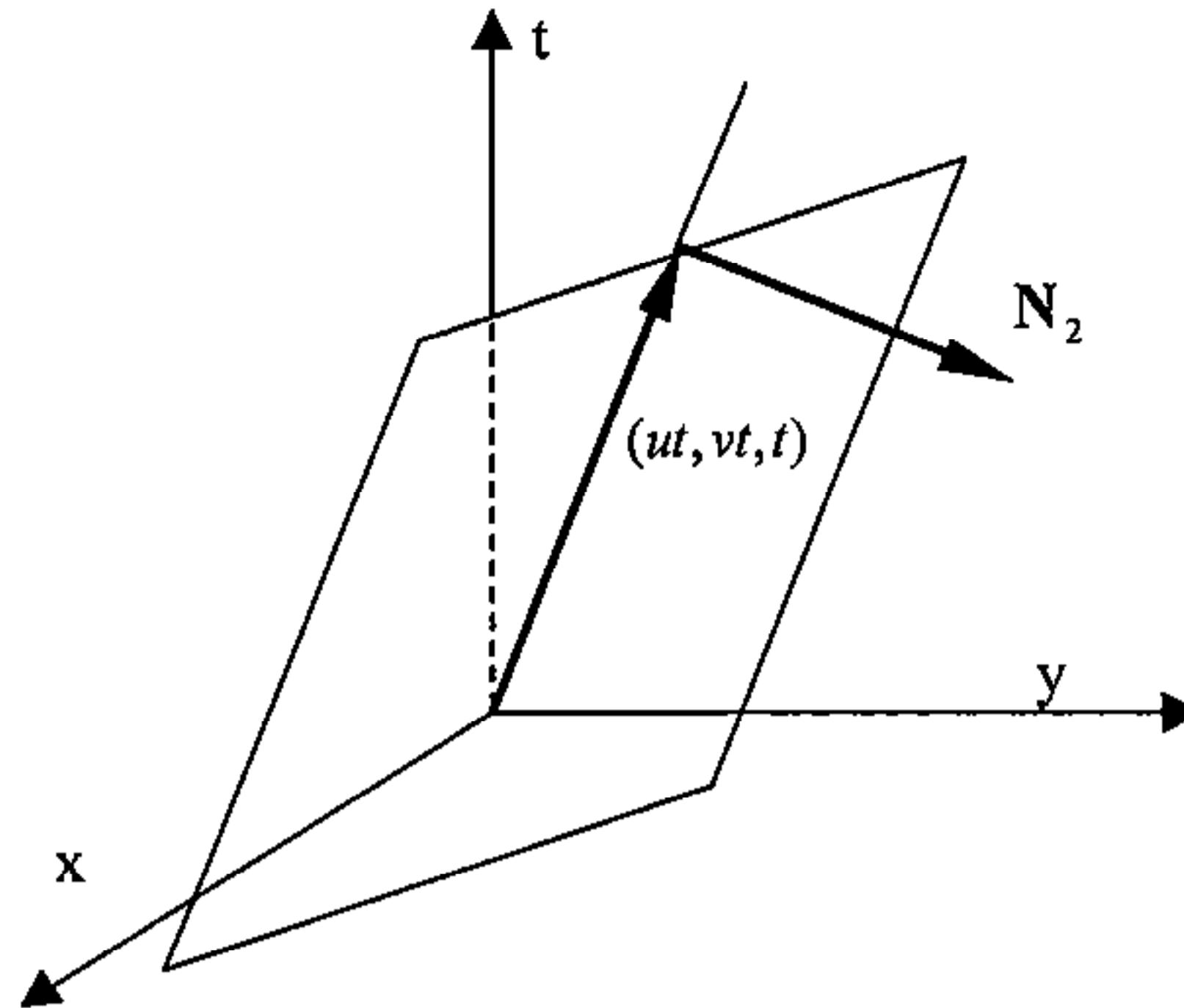


Figura 3.6. Superficie de corriente

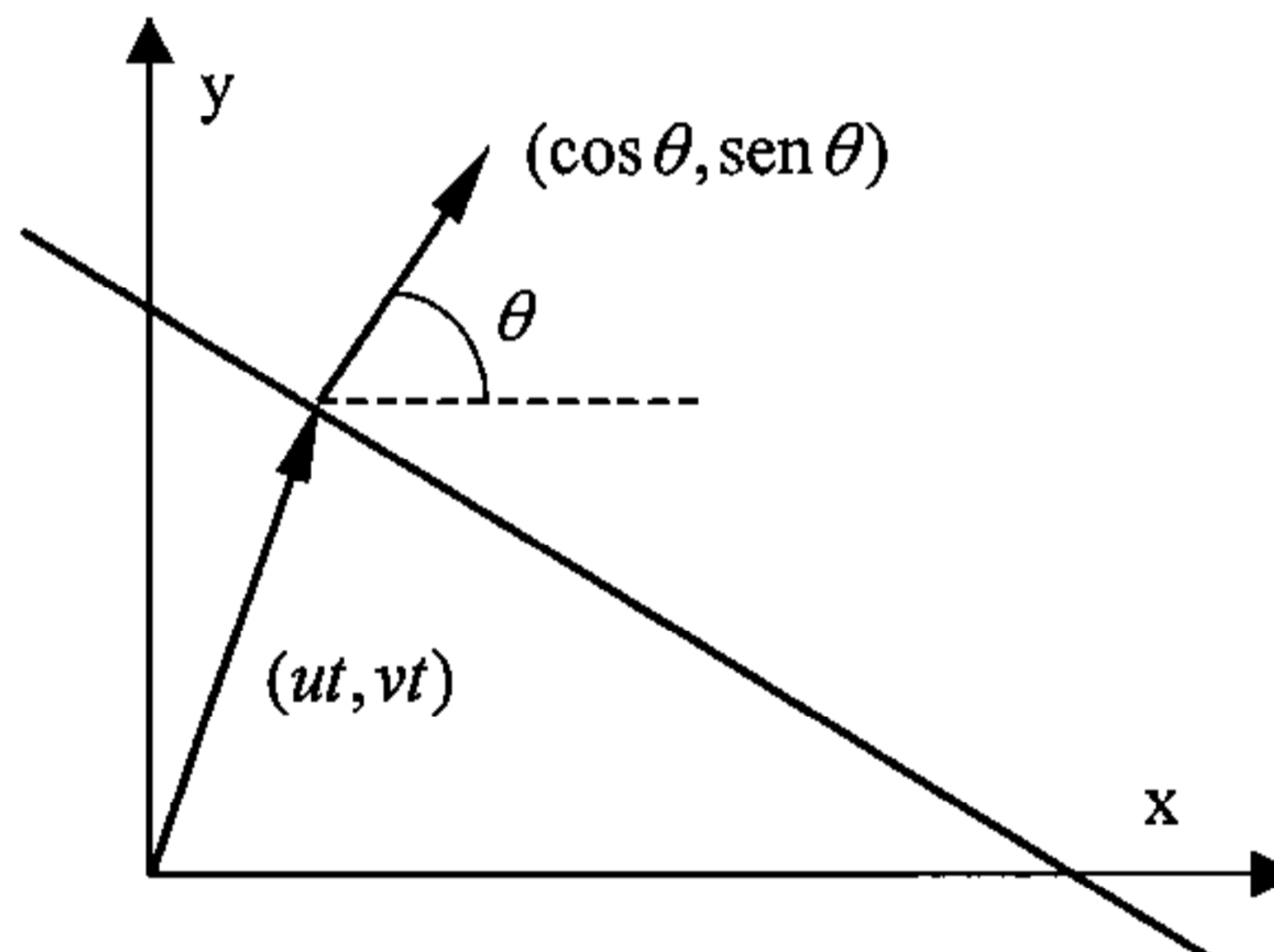


Figura 3.7. Corte de una superficie de corriente sobre el plano $t=constante$.

Dominio de dependencia y zona de influencia

Es una propiedad de los sistemas hiperbólicos que, para un punto cualquiera P del espacio x, y, t , la solución depende únicamente de los datos en un cierto dominio cerrado del espacio físico x, y , pero no de los puntos situados fuera de dicho dominio (Jeffrey, 1976). Esto es equivalente a decir que la onda asociada se propaga a una celeridad finita.

Para el caso de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, el dominio de dependencia serán todos los puntos del cono o conoide característico en la dirección decreciente de t , mientras que la zona de influencia serán los puntos dentro del conoide en la dirección de t creciente. El conoide actúa pues como una frontera para la propagación de la información.

Condiciones de compatibilidad en las superficies características

Igual que en el caso unidimensional, combinando linealmente de manera adecuada las ecuaciones de Saint Venant se puede obtener un sistema de ecuaciones equivalente al original sobre las superficies características, sistema que sólo contiene derivadas a lo largo de direcciones contenidas en las superficies características. Estas ecuaciones, llamadas *condiciones de compatibilidad, relaciones características o ecuaciones de consistencia*,

que serían el equivalente para el caso bidimensional de las ecuaciones (3.46), (3.48), son e útiles a la hora de formular las condiciones de contorno necesarias en los esquemas numéricos de resolución de las ecuaciones bidimensionales.

En este caso, utilizando en la notación derivadas totales a lo largo de las bicaracterísticas, la condición de compatibilidad sobre una superficie característica de la primera familia se puede escribir:

$$\frac{d(u_n \pm 2c)}{dt} \pm \frac{\partial u_t}{\partial \theta} = \pm g(S_{0x} - S_{fx}) \cos \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \sin \theta \quad (3.56)$$

Donde u_n y u_t representan las componentes de la velocidad en la dirección del vector normal a la superficie característica ($\cos \theta, \sin \theta$) y su perpendicular:

$$u_n = u \cos \theta + v \sin \theta \quad ; \quad u_t = -u \sin \theta + v \cos \theta \quad (3.57)$$

La ecuación (3.57) es la análoga a la ecuación (3.48) para el caso unidimensional, y expresa que en ausencia de término independiente, y en el supuesto que las variaciones en la dirección tangencial a la superficie característica fuesen despreciables, las cantidades $u_n \pm 2c$, que se conocen por *pseudo invariantes de Riemann*, se mantendrían constantes a lo largo de la correspondiente bicaracterística.

La condición de compatibilidad para la segunda familia de características queda:

$$\frac{d(u_t)}{dv} + 2 \frac{\partial c}{\partial \theta} = -g(S_{0x} - S_{fx}) \sin \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \cos \theta \quad (3.58)$$

Esta ecuación, que representa el transporte de la componente de la velocidad tangencial a la bicaracterística, no tiene un equivalente directo en el caso unidimensional

3.4. Soluciones discontinuas y propagación de ondas

Normalmente se entiende por onda la propagación de una perturbación, localizada o no, a lo largo del tiempo. Muchos fenómenos físicos ondulatorios, como es el caso de las ecuaciones de Saint Venant, se pueden representar por sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicos cuasi-lineales. El estudio de este tipo de sistemas es complejo aunque si el sistema es homogéneo el comportamiento de la solución se simplifica. En este caso el sistema puede representar una onda compresiva o una onda expansiva, y se puede estudiar utilizando la teoría de las características. Este tipo de ondas, cuya forma va cambiando (lo contrario se conoce como onda progresiva y sólo es posible para sistemas lineales), pueden ir evolucionando hasta producir una discontinuidad u onda de choque, aunque las condiciones iniciales fueran suaves.

Para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, se pueden dividir las soluciones discontinuas posibles en tres grandes grupos:

1. Discontinuidades débiles u ondas de depresión, también llamadas ondas de descompresión, ondas de expansión u ondas de rarefacción. Todas las variables dependientes son continuas y sólo sus derivadas sufren un salto.
2. Discontinuidades fuertes u ondas de choque. Todas las variables dependientes sufren un salto a través de la discontinuidad. Comprenden los frentes de onda y resaltos hidráulicos.
3. Discontinuidades de contacto. Solo alguna de las variables dependientes sufre un salto, mientras que el resto son continuas.

Para el primer tipo de ondas, que corresponden a soluciones continuas de las ecuaciones, se puede entender la solución como una hipersuperficie (una superficie ordinaria en (x, t, U) en el caso 1D con una sola variable dependiente) y la onda como un surco en dicha hipersuperficie. (Figura 3.8). La proyección sobre el espacio (x, t) de este surco o *frente de onda* será simplemente una línea para el caso unidimensional y una superficie ordinaria para el caso bidimensional, que indica como se desplaza la discontinuidad, y que se puede llamar *traza de la onda*. Se ha visto en los apartados anteriores que si se tiene una solución tal que su derivada en una dirección de (x, t) es discontinua, la superficie normal a esta dirección será una superficie característica. Como a través de la traza de la onda la derivada de la solución es también discontinua, esta deberá coincidir siempre con una superficie característica.

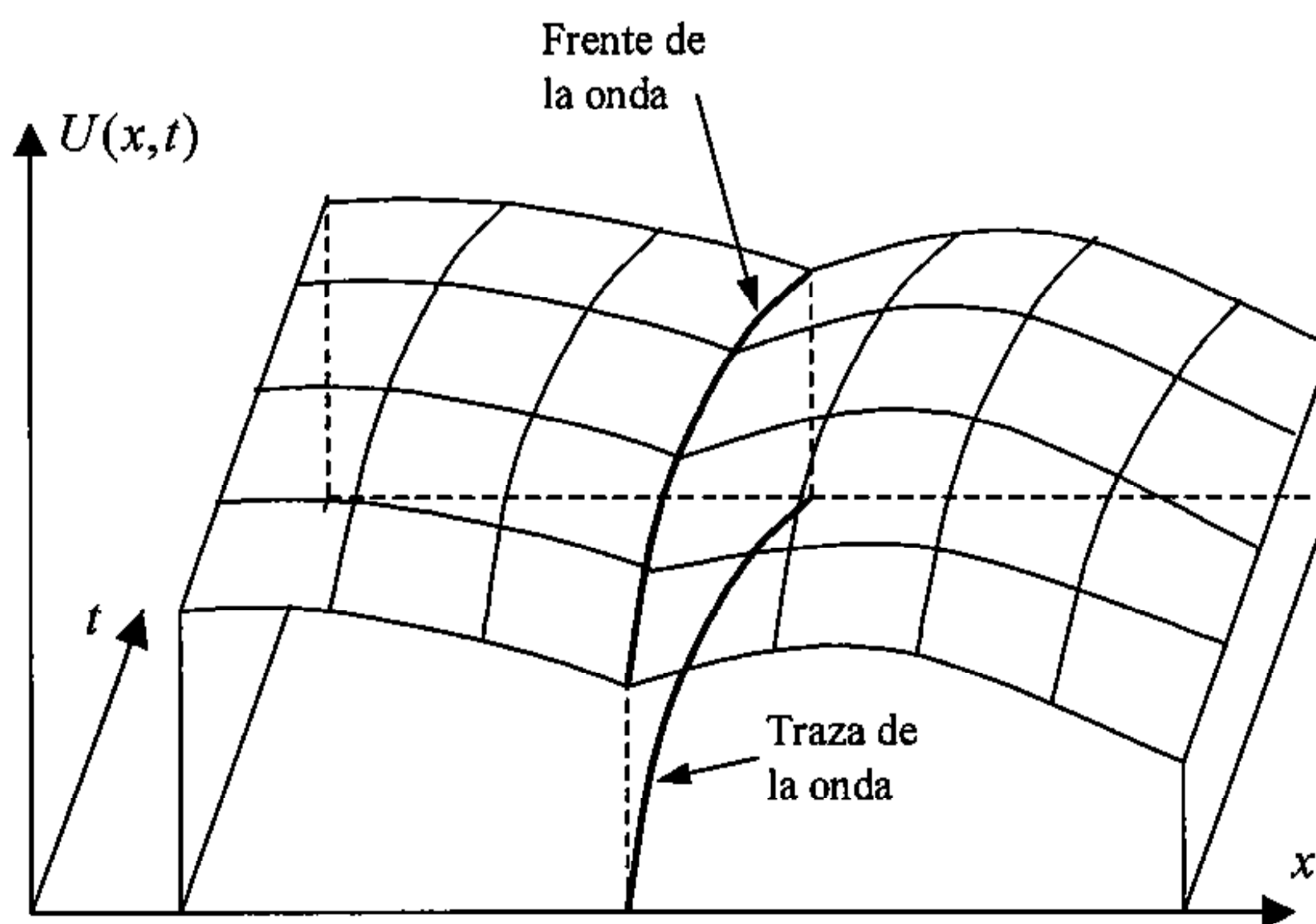


Figura 3.8. Discontinuidad débil. Solución, frente y traza de la onda.

El segundo tipo de discontinuidades, las ondas de choque o discontinuidades fuertes, son fenómenos que aparecen también en otros procesos físicos aparte del movimiento del agua en lámina libre. Estas discontinuidades pueden aparecer a partir de una discontinuidad débil que va evolucionando, tal como muestra Jeffrey (1976), quien realiza un estudio exhaustivo de este tipo de discontinuidades. En ellas interesará sobretodo poder relacionar de alguna manera la solución a ambos lados de la discontinuidad (condiciones de Rankine-Hugoniot) y tener algún criterio para poder descartar aquellas soluciones discontinuas posibles matemáticamente pero sin significado físico (mediante consideraciones sobre entropía). Una discontinuidad fuerte no tiene por qué coincidir con una línea característica, como se ha visto, y por lo tanto se propagará por el espacio con una velocidad distinta a los ceros del polinomio característico.

El tercer tipo de discontinuidades no existe para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, debido a la forma de las ecuaciones, pero sí se puede encontrar para el caso bidimensional. Sería por ejemplo el caso del contacto entre dos corrientes contiguas en la misma dirección pero con velocidades distintas.

En los siguientes subapartados se recuerdan algunas propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales, que a menudo son la expresión de leyes físicas de conservación (ya se ha dicho que las ecuaciones de Saint Venant son un sistema cuasi lineal, que es un tipo particular de sistema no lineal, y por tanto los desarrollos de este apartado también son válidos para ellas). Nos centraremos en aquellas propiedades que luego serán útiles en el desarrollo de métodos numéricos para obtener su solución. Los métodos aproximados de resolución del problema de Riemann que se presentan en capítulos posteriores (y que son la base de los esquemas numéricos de alta resolución) utilizan algunas de las propiedades que se verán en este apartado.

3.4.1. Campos característicos

La distribución espacial de los valores λ_i en el plano $x-t$, donde λ_i es el i -ésimo valor propio de \mathbf{A} , se conoce como i -ésimo campo característico. Los campos característicos, en general van variando suavemente, excepto en las discontinuidades de la solución, a través de las cuales, la variación brusca de las variables dependientes determina también variaciones bruscas en los valores y vectores propios de \mathbf{A} .

Un campo característico que cumple que los gradientes (respecto las variables dependientes) de los valores propios λ_i no son ortogonales a los vectores propios asociados \mathbf{e}_i , es decir, que para todo \mathbf{U} cumple:

$$\mathbf{e}_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{U}} \neq 0 \quad (3.59)$$

se conoce por un *campo característico genuinamente no lineal*. Lo contrario, es decir, si para un \mathbf{U} cualquiera se cumple:

$$\mathbf{e}_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (3.60)$$

se conoce por un *campo característico linealmente degenerado*. Se puede ver fácilmente que para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, los dos campos característicos dados por (3.33) son genuinamente no lineales. En el caso bidimensional, los valores y vectores propios vienen dados por (3.38) (3.39). El primer y tercer campos característicos son genuinamente no lineales, mientras que el segundo es linealmente degenerado.

3.4.2. Onda simple e invariantes de Riemann generalizados

Se consideran siempre en este apartado soluciones continuas, por lo que los resultados que se obtienen son de utilidad en el caso de discontinuidades débiles. Se introduce en primer lugar la idea de *onda simple*, para poder llegar luego a la definición de los invariantes de Riemann generalizados, cuyas propiedades son útiles para la obtención de esquemas numéricos de alta resolución. Para comprender bien el concepto de onda simple conviene hacer uso del *plano de estado* o *plano hodométrico*.

El *plano de estado* se obtiene considerando unos ejes de coordenadas, colocando en el eje de abscisas los valores correspondientes a la velocidad u y en el eje de ordenadas los valores del doble de la celeridad $2c$. Los invariantes de Riemann J^+ y J^- , definidos en (3.47), se pueden representar en el plano de estado por dos conjuntos de rectas perpendiculares entre sí con pendientes -1 y $+1$ respectivamente. (Figura 3.9).

Para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para canal rectangular homogéneas:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{3.61}$$

con U definido por (3.25) para canal prismático rectangular y por (3.21) para cauce cualquiera, y A dado por (3.30). Un par de valores $(u_1, u_2) = (A, Q)$, que corresponden a una solución de las ecuaciones (3.61) constante, define a su vez un par de valores $(u, 2c)$ que se representan por un punto en el plano de estado. Si se consideran los valores que puede tomar una solución al desplazarnos por el espacio $x-t$ a lo largo de una línea característica C^+ , habrá unos valores $(u, 2c)$ que cumplirán $u + 2c = \text{constante}$, de manera que en el plano de estado nos estaremos desplazando sobre una recta J^+ . Si por el contrario en $x-t$ nos desplazamos sobre una característica C^- sobre el plano de estado nos estaremos moviendo a lo largo de una recta J^- .

Si se considera ahora una zona del espacio $x-t$ para la cual la solución del sistema de ecuaciones es constante ($u_1(x, t) = u_{01}, u_2(x, t) = u_2$), en esta *región de solución constante* las líneas características de las dos familias serán rectas pues en cada punto habrá los mismos valores propios de la matriz, $A(U)$, que son los que definen la pendiente de las líneas características. Por otro lado todos los puntos de este dominio de solución constante corresponderán a un único punto $(u_0, 2c_0)$ del plano de estado.

Una *onda simple* es una solución del sistema (3.61) que cumple que en un cierto dominio de $x-t$ su segunda componente es función de la primera, es decir, $u_2 = f(u_1)$ o, lo que es lo mismo para las ecuaciones de Saint Venant, $2c = g(u)$ donde f y g son funciones diferenciables. Al dominio de $x-t$ en cuestión se le conoce por *región de onda simple* y a cada punto de ella le corresponde un punto sobre el plano de estado que debe estar precisamente sobre la curva \mathcal{S} definida por $2c = g(u)$.

Si se considera un punto de $x-t$ dentro de la región de onda simple, y a partir de él nos desplazamos siguiendo una característica C^+ (un desarrollo análogo se podría hacer para las características C^-), si la solución no permanece constante, resulta que sobre el plano de estado nos estaremos moviendo sobre una recta J^+ correspondiente a dicha característica. Por otro lado, por estar siempre en la región de onda simple nos estaremos moviendo también sobre la curva \mathcal{S} , de donde la recta J^+ y la curva \mathcal{S} deben ser la misma. Como ello es cierto para todas las características C^+ , resultará que todas ellas tendrán a J^+ como su correspondiente recta en el plano de estado.

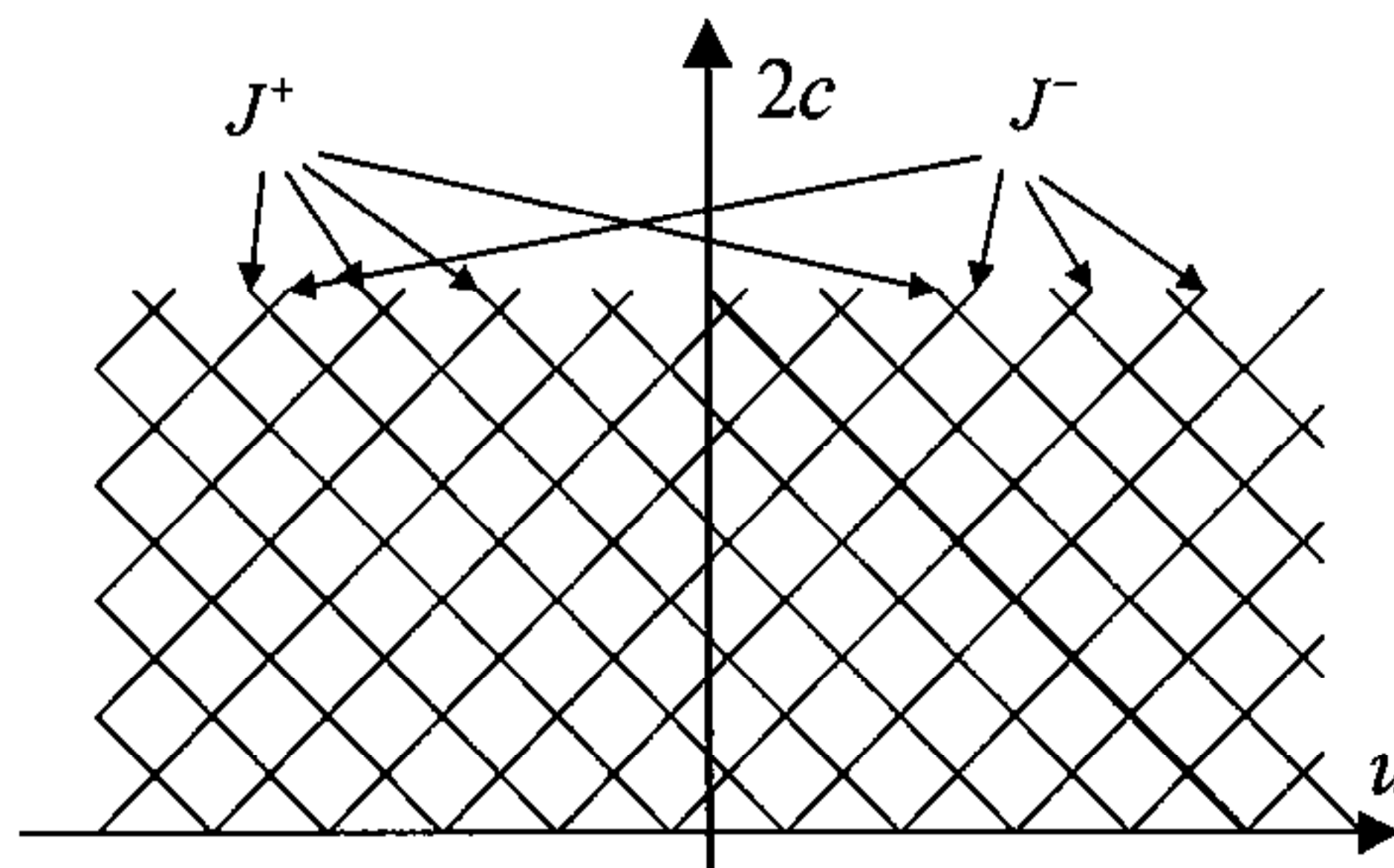


Figura 3.9. Plano de estado. Familias de rectas J^+ y J^-

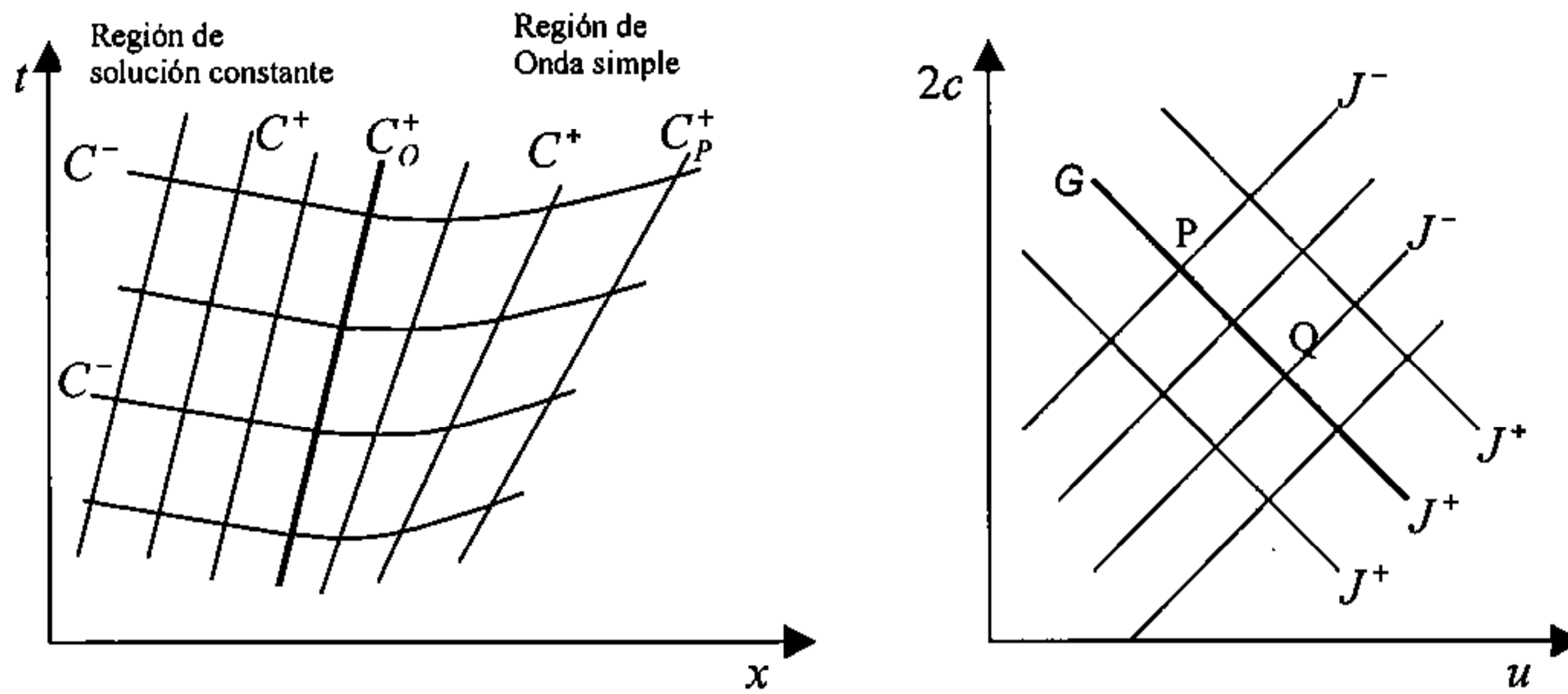


Figura 3.10. Región de onda simple, cuya imagen en el plano de estado (derecha) es el punto Q, adyacente a una región de solución constante cuya imagen es el segmento PQ

Una región de solución constante tiene un único punto como imagen en el plano de estado y una región de onda simple está siempre atravesada por una familia de características rectas. De todo lo dicho se deduce que si la solución es constante a lo largo de una línea característica (por lo que dicha línea es una recta) entonces la región adyacente a esta líneas debe ser o bien una región de solución constante o bien una región de onda simple (Figura 3.10).

Si se generaliza el concepto de onda simple para un sistema multidimensional como (3.61), pero ahora con:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

se estará en una región de onda simple si se puede poner la solución en función de una de sus componentes, que sin pérdida de generalidad consideraremos la primera, es decir $U = U(u_1)$, o lo que es equivalente $u_i = u_i(u_1)$ para $i = 2, \dots, n$. Sustituyendo esta última expresión en (3.61) y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} I + \frac{\partial u_1}{\partial x} A \right) \frac{\partial U}{\partial u_1} = 0 \tag{3.63}$$

De esta expresión se deduce que para una i -onda simple el vector $\partial U / \partial u_1$ debe ser proporcional al vector propio e_i correspondiente a dicho λ_i , es decir:

$$\frac{du_1}{e_{i1}} = \frac{du_2}{e_{i2}} = \dots = \frac{du_n}{e_{in}} \tag{3.64}$$

donde cada e_{ik} es la k -ésima componente del vector propio e_i . Integrando (3.64) se obtienen $n-1$ relaciones independientes entre las componentes de U que se pueden expresar como

$$R_{ik}(U) = \text{constante} \quad \text{para} \quad k = 1 \dots n-1 \tag{3.65}$$

y que se llaman *i*-invariantes de Riemann generalizados que son relaciones entre las distintas componentes del vector de variables dependientes que deben ser ciertas en toda la región de i -onda simple.

Invariantes de Riemann generalizados para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales: Se aplica ahora el concepto de onda simple e invariantes de Riemann generalizados a las ecuaciones de Saint Venant

unidimensionales para canal prismático rectangular. λ_1 está asociado a las características C^+ o C^1 y λ_2 está asociado a C^- o C^2 . En una región de onda simple asociada a las líneas C^+ , estas son rectas. Para cada tipo de onda simple existe en este caso un invariante de Riemann generalizado que se obtiene a partir de (3.64), que ahora queda como:

$$\frac{dh}{1} = \frac{d(hu)}{u+c} \quad (3.66)$$

ya que ahora $\mathbf{U} = (h, hu)$ y $\mathbf{e}_1 = (1, u+c)$. De (3.66) se obtiene directamente

$$du + \frac{c}{h} dh = 0 \quad (3.67)$$

de donde, integrando:

$$R^+(\mathbf{U}) = R_1(\mathbf{U}) = \int du + \int \frac{c}{h} dh = \int du + \sqrt{g} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = u - 2c = \text{constante} \quad (3.68)$$

Análogamente, para ondas simples asociadas a C^- :

$$R^-(\mathbf{U}) = u + 2c = \text{constante} \quad (3.69)$$

Así pues que los invariantes de Riemann generalizados correspondientes a C^+ y C^- son respectivamente $R^+ = u - 2c$ y $R^- = u + 2c$ (los invariantes de Riemann *normales* $J^+ = u + 2c$ y $J^- = u - 2c$). Los invariantes de Riemann generalizados correspondientes a las características C^+ corresponden, para el caso $n=2$, a los invariantes de Riemann *normales* de C^- , lo que es normal ya que son funciones que deben mantenerse constantes a través de las líneas C^+ . Para el caso $n > 2$ se puede ver que no existen unos invariantes de Riemann en el sentido clásico, como funciones que se mantengan constantes sobre cada una de las familias características (Jeffrey, 1976). Los invariantes de Riemann generalizados, por el contrario, sí que existen.

3.4.3. Las condiciones de Rankine-Hugoniot en una dimensión

Las condiciones de Rankine-Hugoniot son unas relaciones que deben cumplirse a través de una solución discontinua de una ley de conservación dada por un sistema hiperbólico. Estas condiciones sirven entonces para relacionar los valores de la solución a ambos lados de una discontinuidad fuerte.

Para ello se aplica la ley de conservación a un volumen de control que contenga una discontinuidad que se desplaza a lo largo del eje x , obteniendo, a partir del sistema (3.61):

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) = [\mathbf{U}(s_L, t) - \mathbf{U}(s_R, t)]S + \int_{x_L}^{s(t)} \frac{d\mathbf{U}(x, t)}{dt} dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_R} \frac{d\mathbf{U}(x, t)}{dt} dx \quad (3.70)$$

donde $S = ds/dt$ es la velocidad de la discontinuidad, mientras $\mathbf{U}(s_L, t)$ y $\mathbf{U}(s_R, t)$ son el límite de $\mathbf{U}(s(t), t)$ cuando x tiende a $s(t)$ por la izquierda y por la derecha respectivamente. Al hacer el límite por ambos lados hacia la discontinuidad, las dos integrales se anulan y queda la condición de Rankine-Hugoniot que se buscaba:

$$\Delta \mathbf{F} = S \Delta \mathbf{U} \quad (3.71)$$

que relaciona el salto del vector de variables dependientes (\mathbf{U}), el salto del vector de flujo \mathbf{F} y la velocidad de la discontinuidad.

De esta relación se puede ver que un salto en las variables, $\Delta \mathbf{U}$, sólo es una discontinuidad estable si se propaga con una velocidad S dada por:

$$S = \frac{\Delta F}{\Delta U} \quad (3.72)$$

Si se hace el cómputo de incógnitas y ecuaciones para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, hay cuatro incógnitas distribuidas a ambos lados de la discontinuidad: h_L, u_L, h_R, u_R . Las condiciones de Rankine-Hugoniot, derivadas de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento, proporcionan dos ecuaciones pero introducen otra incógnita S que es su velocidad de propagación. De esta manera, aunque se conozca el valor de las variables dependientes a un lado de la discontinuidad, no se puede determinar el estado del otro lado. Para hacerlo es necesario dar otra variable que puede ser, por ejemplo, la condición de que el resalto hidráulico sea estacionario ($S = 0$).

En el caso $S = 0$ las condiciones de Rankine-Hugoniot se simplifican a la ecuación $\Delta F = 0$. Aplicando esta condición a las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales (3.21) obtenemos directamente:

$$\begin{aligned} Q_L &= Q_R \\ \frac{Q_L^2}{A_L} + gI_{1L} &= \frac{Q_R^2}{A_R} + gI_{1R} \end{aligned} \quad (3.73)$$

con las variables definidas en 3.2. y cuya solución depende de la forma del cauce. En el caso más sencillo de canal prismático rectangular, teniendo en cuenta que $A = bh$ y $Q = uA$, o bien aplicando directamente las condiciones de Rankine-Hugoniot queda:

$$\begin{aligned} h_L u_L &= h_R u_R \\ h_L u_L^2 + g \frac{h_L^2}{2} &= h_R u_R^2 + g \frac{h_R^2}{2} \end{aligned} \quad (3.74)$$

La primera ecuación indica que el caudal unitario $q = hu = Q/b$ es el mismo a ambos lados del resalto. Operando con la segunda y definiendo el *número de Froude* para cauce rectangular como:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (3.75)$$

queda la ecuación de segundo grado en h_R/h_L :

$$\frac{h_R}{h_L} \left(1 + \frac{h_R}{h_L} \right) = Fr_L^2 \quad (3.76)$$

cuya solución es la clásica ecuación de Bélanger de calados conjugados en un resalto hidráulico:

$$\frac{h_R}{h_L} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_L^2} - 1 \right) \quad (3.77)$$

3.4.4. Propagación de ondas y soluciones discontinuas para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

En el caso bidimensional, el conjunto de discontinuidades posibles puede formar una estructura de la solución mucho más compleja que en el caso unidimensional. Las discontinuidades son ahora superficies en el espacio (x, y, t) que separan subdominios donde la solución es continua y pueden cruzarse o están conectadas entre ellas. Para cada punto de la superficie de discontinuidad existen los límites de la solución por la derecha y por la izquierda. La diferencia entre ellos expresará la fuerza de la onda de choque.

En la dirección tangencial a una superficie de discontinuidad la solución de las ecuaciones de Saint Venant es suave, produciéndose la discontinuidad de la solución en su dirección normal. Haciendo un cambio de coordenadas en un punto de la discontinuidad, de manera que los nuevos ejes sean normales y tangenciales a ella, se puede aproximar localmente la propagación del frente con la teoría desarrollada para el caso unidimensional.

En dos dimensiones las discontinuidades pueden dar lugar a ondas de choque si son fuertes, ondas de depresión cuando son débiles, y discontinuidades de contacto. La velocidad tangencial a ambos lados de una onda de choque deberá ser la misma, mientras que las componentes normales deberán cumplir las condiciones de Rankine-Hugoniot. Para las ondas de depresión será cierta la constancia de los invariantes de Riemann.

Para una discontinuidad de contacto, las líneas de corriente son tangenciales a ella y hay una discontinuidad tan solo en la velocidad tangencial. Como en el caso 1-D no existe velocidad tangencial, no puede haber discontinuidades de contacto.

Para el flujo bidimensional, las ondas continuas se pueden dividir también en las dos categorías que son: ondas de compresión (en las cuales el calado va aumentando con el flujo) y ondas de expansión si ocurre lo contrario. Una onda de compresión, igual que en el caso 1-D, puede evolucionar a un frente o resalto hidráulico.

3.4.5. Condiciones de Rankine-Hugoniot en dos dimensiones

Tal como se ha hecho para el caso unidimensional, las condiciones de Rankine-Hugoniot relacionan valores de la solución a ambos lados de una discontinuidad fuerte. Para una discontinuidad como una superficie curva continua en t, x, y , se puede aplicar el teorema de Gauss-Green a las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en forma conservativa (3.16) considerando dos estados constantes U_L y U_R a ambos lados de la discontinuidad. Con ello se obtiene la ecuación

$$n_t(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) + n_x(\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_L) + n_y(\mathbf{G}_R - \mathbf{G}_L) \quad (3.78)$$

donde $\mathbf{N} = (n_t, n_x, n_y)$ es un vector normal a la discontinuidad en un punto, mientras \mathbf{E} y \mathbf{G} son los vectores que forman las dos columnas del tensor de flujo, o sea:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Normalizando la longitud del vector \mathbf{N} haciendo $\mathbf{N} = (-s, n_x, n_y)$ con la condición que (n_x, n_y) sea un vector unitario en el plano x, y , la ecuación anterior (3.78) queda de la forma

$$s\Delta U = n_x\Delta E + n_y\Delta G \quad (3.80)$$

que es la condición de Rankine-Hugoniot que debe cumplirse en una discontinuidad, equivalente a la ecuación (3.71) en una dimensión, donde s representa la velocidad de propagación de la discontinuidad y $\Delta(\bullet) = \bullet_R - \bullet_L$.

Para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, sustituyendo (3.79) en (3.80) se obtiene, en componentes:

$$s\Delta h = n_x\Delta(hu) + n_y\Delta(hv) \quad (3.81)$$

$$s\Delta(hu) = n_x\Delta(hu^2 + gh^2/2) + n_y\Delta(huv) \quad (3.82)$$

$$s\Delta(hv) = n_x\Delta(huv) + n_y\Delta(hv^2 + gh^2/2) \quad (3.83)$$

Estas ecuaciones son las expresiones de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento a través de una discontinuidad.

3.4.6. El problema de Riemann.

En capítulos posteriores se tratará la obtención de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant que sirvan tanto para la solución de flujos continuos como para el caso de flujos discontinuos. Un gran grupo de estos esquemas, conocidos bajo el nombre de métodos *shock capturing* o de captura de choques, permiten formar, localizar y propagar las discontinuidades presentes en el dominio de estudio automáticamente. Otros métodos, que se pueden agrupar bajo los nombres *de shock tracking* o *shock fitting*, o sea métodos de seguimiento de choques, precisan tratar las discontinuidades individualmente de forma especial, considerándolas como un contorno interior, ir siguiendo dicho contorno a lo largo del tiempo y empalmar las soluciones a ambos lados del contorno. Dentro de este segundo grupo se encontrarían todas las variantes del método de las características.

Los métodos numéricos que se desarrollan en este trabajo son del primer tipo y, más concretamente, se pueden entender como variantes y extensiones del *método de Godunov*. Este método fue desarrollado en un principio para la resolución del *problema de Riemann* en dinámica de gases, aunque posteriormente se extendió a otros problemas similares en otros campos, como puede ser la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en flujos discontinuos.

Originalmente se denominó problema de Riemann al estudio en mecánica de gases de la propagación de onda en un tubo, de manera que el problema de Riemann original considera un tubo con un diafragma: un lado del tubo se rellena con un gas a una presión p_1 , mientras que el otro lado se rellena con otro gas a una presión p_2 . Cuando el sistema se encuentra en equilibrio el diafragma se quita repentinamente, generándose una onda compresiva hacia el lado de menor presión y una onda expansiva en el sentido opuesto.

Posteriormente el término problema de Riemann se ha extendido a cualquier problema unidimensional consistente en la solución de un sistema de ecuaciones hiperbólico del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad (3.84)$$

con unas condiciones iniciales discontinuas pero constantes en dos regiones del espacio:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

donde \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R son dos vectores constantes. El estudio del problema de Riemann es de gran utilidad para obtener propiedades de las posibles soluciones, las cuales serán luego fundamentales a la hora de desarrollar esquemas numéricos para la solución de las ecuaciones, tanto para flujos continuos como discontinuos y en una o dos dimensiones.

En este apartado y los siguientes veremos el comportamiento de la solución de sistemas de ecuaciones hiperbólicos, y en concreto de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para una serie de situaciones particulares (entre ellas el problema de Riemann), lo que será una ayuda en los capítulos siguientes.

En cuanto al caso bidimensional, no existe una definición matemática estricta para el problema de Riemann. Algunos autores lo han definido como un numero finito de estados constantes, separados por líneas rectas en x, y con un punto en común. De todos modos, la solución de este problema tendría poca importancia de cara a la obtención de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales. Sin embargo, los resultados obtenidos para el caso unidimensional sí que serán útiles para los esquemas bidimensionales, ya que la discretización de dominios bidimensionales en volúmenes finitos que se utiliza en este trabajo, permite considerar que en cada uno de los lados de dichos volúmenes tenemos un problema de Riemann unidimensional

3.4.6.1 El problema de Riemann para sistemas hiperbólicos unidimensionales a coeficientes constantes

Aunque la estructura de las ecuaciones de Saint Venant es más compleja, el estudio de este caso sencillo ayuda a entender la estructura de la solución y, por otro lado, los resultados que se obtienen se utilizarán en capítulos posteriores. El problema viene dado por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{3.86}$$

donde \mathbf{A} es una matriz $m \times m$ a coeficientes constantes, con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{3.87}$$

que se representa en la Figura 3.11.

Si se supone que el sistema es estrictamente hiperbólico, con valores propios reales ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$) la estructura de la solución en el plano $x-t$ consiste en m ondas que salen del origen. Cada una representa una discontinuidad que se propaga a velocidad λ_i . A la izquierda de λ_1 la solución es el estado constante \mathbf{U}_L , mientras que a la derecha de λ_m es \mathbf{U}_R (Figura 3.11). Como los valores propios e_i forman un sistema de vectores linealmente independientes, se pueden escribir los estados constantes \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R como:

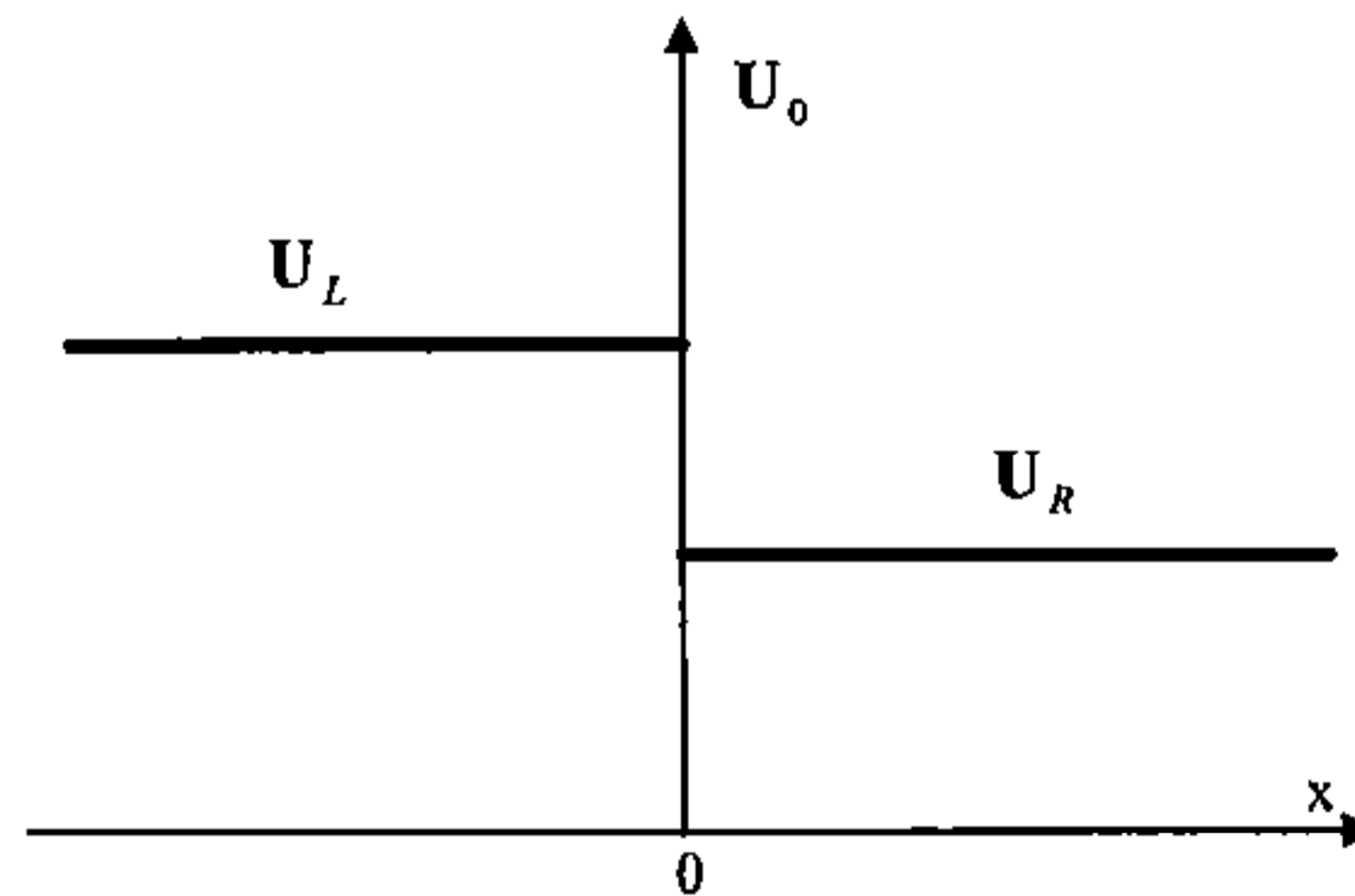


Figura 3.11. Datos iniciales del problema de Riemann

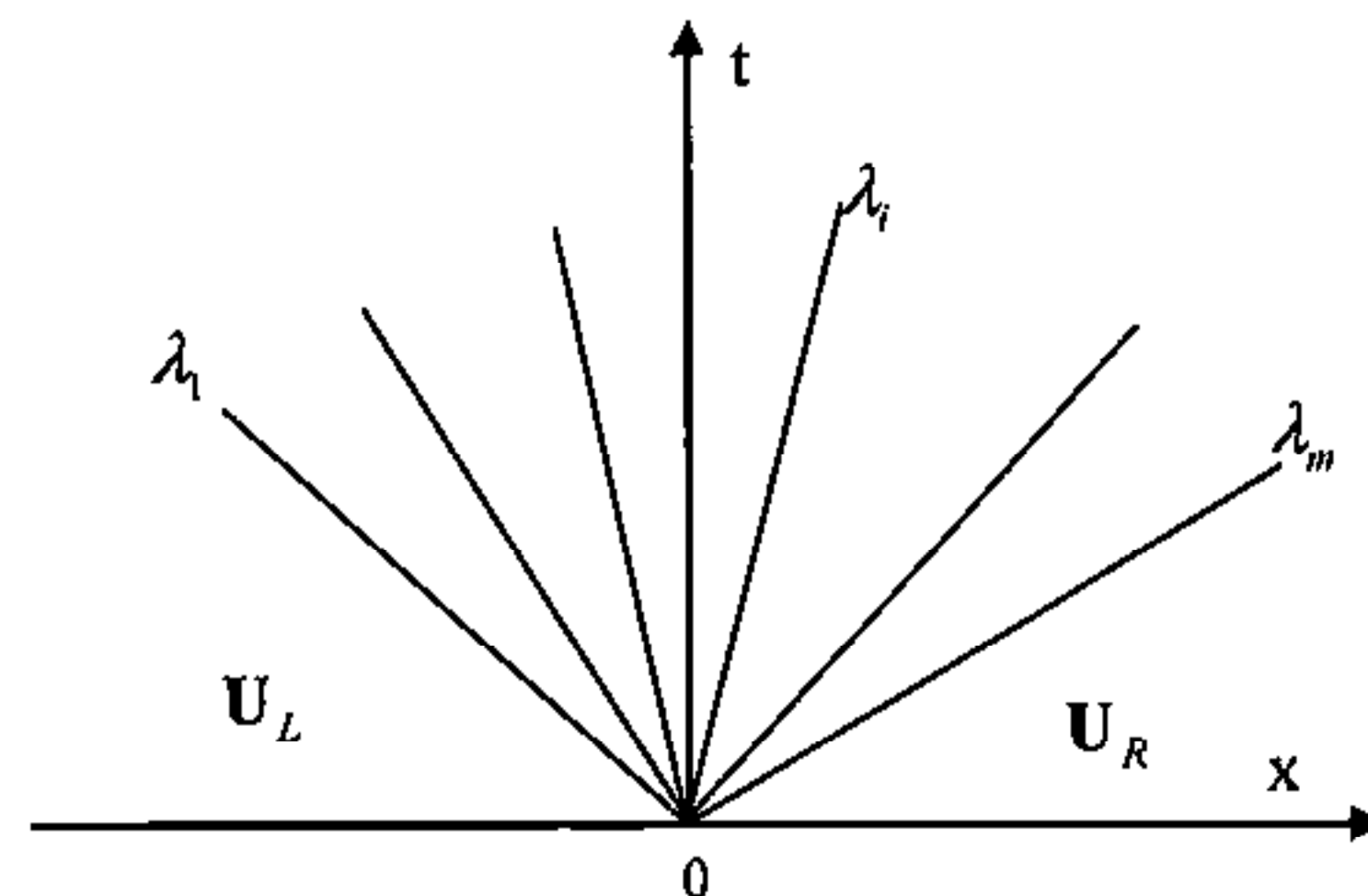


Figura 3.12. Estructura de la solución del problema de Riemann para un sistema hiperbólico a coeficientes constantes

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \quad ; \quad \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_i \quad (3.88)$$

con α_i y β_i coeficientes constantes. La solución del problema (3.86), (3.87) viene dada por (Toro, 1996):

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^I \beta_i \mathbf{e}_i \quad (3.89)$$

donde $I = I(x,t)$ es el máximo valor del subíndice i para el cual $x - \lambda_i t > 0$. De esta expresión se deduce que el salto que sufre la solución al cruzar una onda λ_i es el valor:

$$(\Delta \mathbf{U})_i = (\beta_i - \alpha_i) \mathbf{e}_i \quad (3.90)$$

donde el coeficiente $(\beta_i - \alpha_i)$ se conoce como la *fuerza de la onda i*.

Para el caso en que \mathbf{A} es una matriz 2x2, del origen salen dos ondas que viajan a una velocidad igual a las velocidades características λ_i . La solución a la izquierda de la línea $dx/dt = \lambda_1$ es el estado \mathbf{U}_L :

$$\mathbf{U}_L = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.91)$$

y a la derecha de $dx/dt = \lambda_2$ es:

$$\mathbf{U}_R = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.92)$$

La cuña comprendida entre las ondas λ_1 y λ_2 se conoce en la bibliografía como *región estrella* o *Star Region*, y la solución allí se denota con \mathbf{U}^* . Si nos desplazamos por una línea $t = \text{constante}$ desde un punto (x_L, t^*) situado a la izquierda de $dx/dt = \lambda_1$, mientras no se cruce dicha línea se cumple $x - \lambda_i t < 0$ para ambos λ_i , por lo que la solución será constante dada por (3.91). En el momento que se cruza la onda λ_1 , la expresión $x - \lambda_i t$ pasa de negativa a positiva. La solución viene dada, según (3.89), por:

$$\mathbf{U}^* = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.93)$$

mientras que al cruzar la línea $dx/dt = \lambda_2$ es la expresión $x - \lambda_2 t$ la que cambia de signo y la solución viene dada por (3.92).

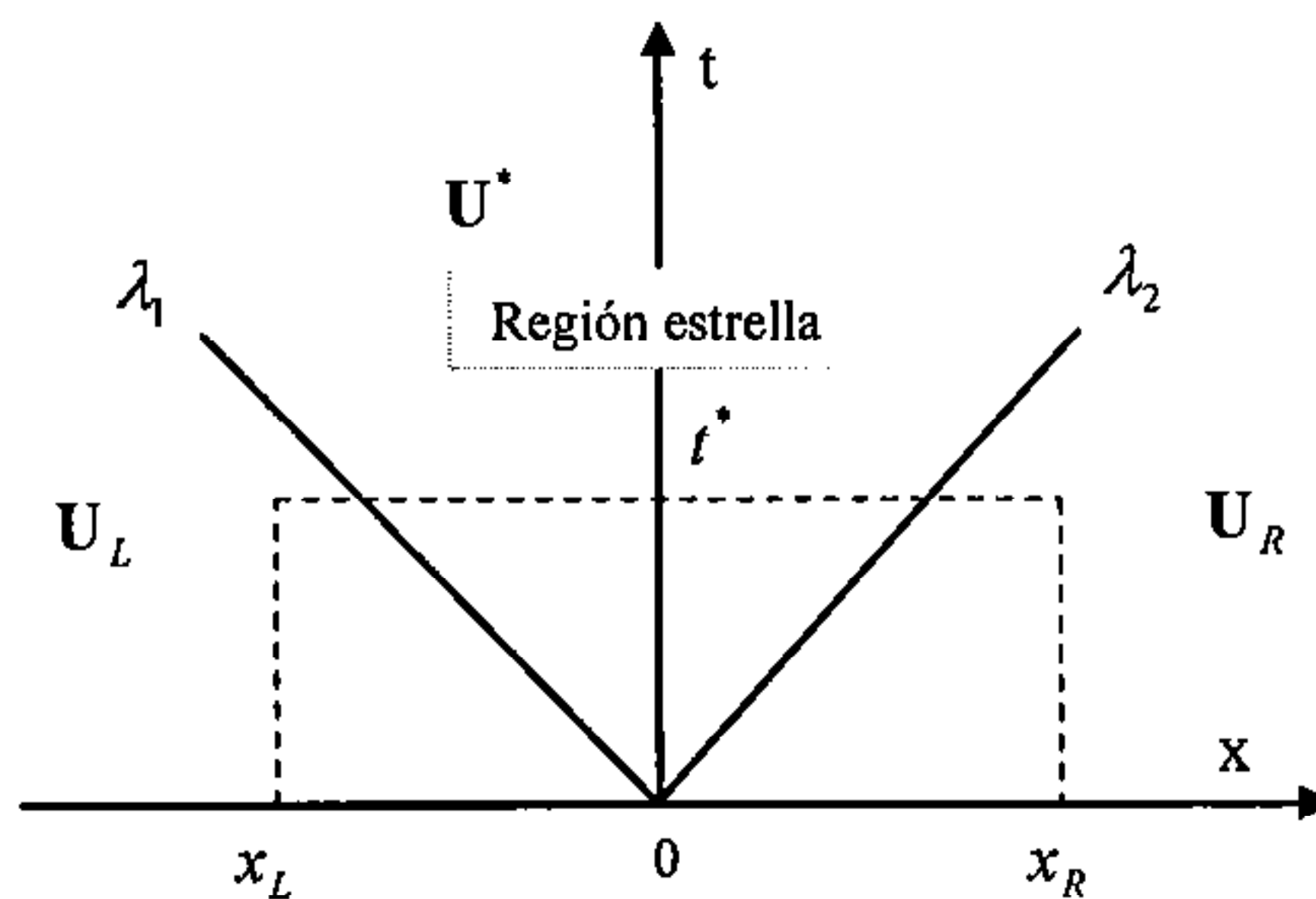


Figura 3.13. Estructura de la solución del problema de Riemann unidimensional

3.4.6.2 Relaciones integrales en el problema de Riemann

En este contexto es interesante obtener un resultado que más adelante será útil para el desarrollo de métodos aproximados de resolución del problema de Riemann. Para ello se consideran dos estados iniciales U_L a la izquierda y U_R a la derecha y las ondas que se propagan a menor y mayor velocidad de entre las existentes, siendo sus valores S_L y S_R respectivamente. La forma integral de (3.84) en $[x_L, 0] \times [0, T]$ (Figura 2.21) es:

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = \int_{x_L}^0 U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(0, t)) dt \tag{3.94}$$

que como el estado a la izquierda es constantes queda:

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = -x_L U_L + T(F_L - F_0) \tag{3.95}$$

siendo $F_L = F(U_L)$ y $F_0 = F(U(x=0))$. El término de la izquierda de la ecuación anterior se puede desarrollar como:

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx = (TS_L - x_L)U_L + \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \tag{3.96}$$

y de estas dos ultimas expresiones se obtiene:

$$F_0 = F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \tag{3.97}$$

De la misma forma, integrando sobre el volumen $[0, x_R] \times [0, T]$:

$$F_0 = F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} U(x, T) dx \tag{3.98}$$

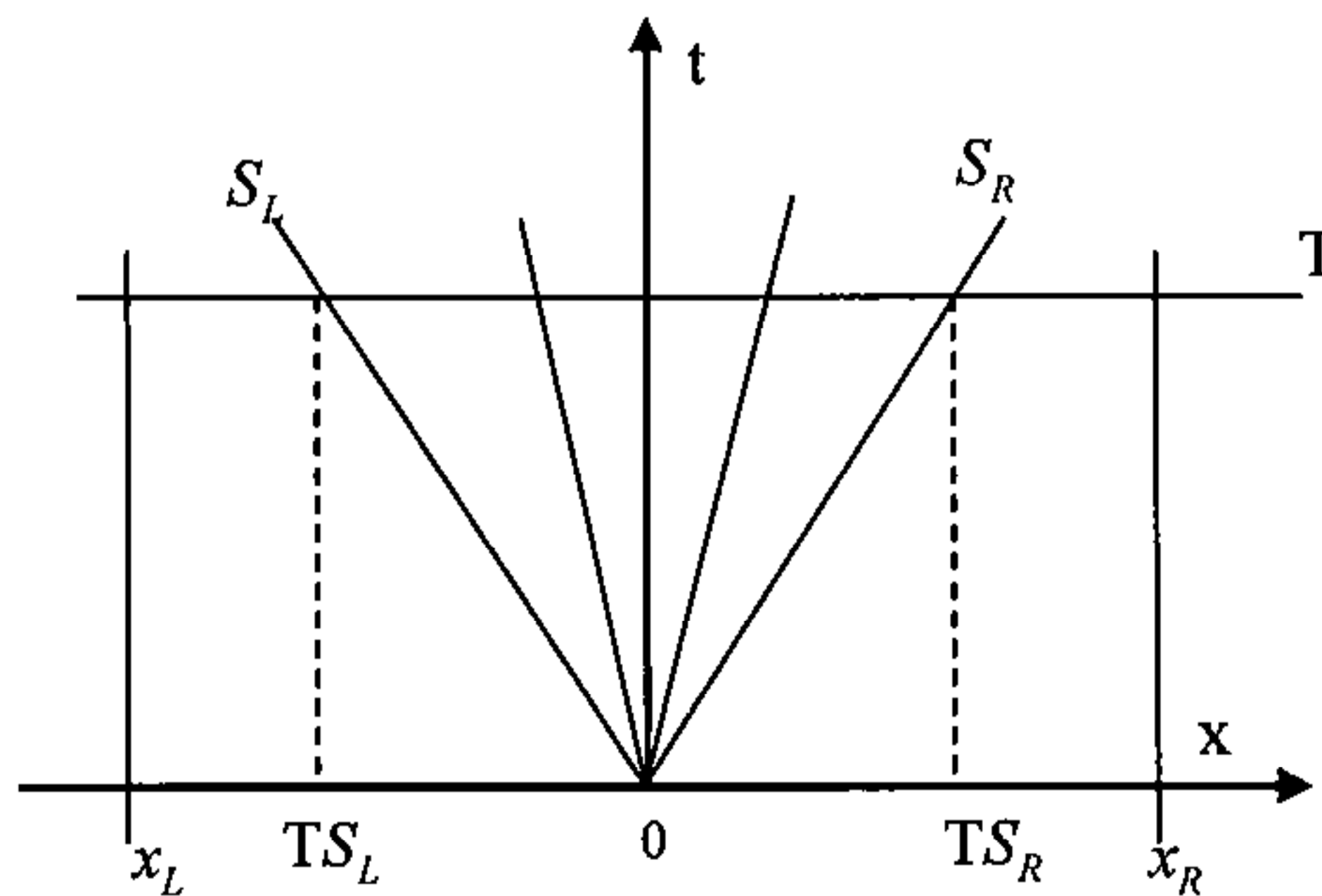


Figura 3.14. Volumen de integración $[x_L, 0] \times [0, T]$ de la ley de conservación donde S_L y S_R son las velocidades mínima y máxima de propagación de las ondas resultantes del problema de Riemann.

3.4.6.3 El problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

La solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales consiste en dos ondas (ondas de choque o de depresión) que emanan del origen, dependiendo de las condiciones iniciales, y más concretamente de si en el instante inicial las líneas características correspondientes al mismo valor propio a cada lado de la discontinuidad se cruzan (onda de choque) o no (onda de depresión).

En el caso de una onda de choque, los dos estados iniciales están conectados a través de una única discontinuidad entre ambos lados de la cual deben cumplirse las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.71) y la condición de entropía:

$$\lambda_1(U_L) > S > \lambda_1(U_R) \tag{3.99}$$

Mientras que en el caso de la onda de depresión los dos estados a cada lado están conectados por una transición suave entre los cuales se cumple la constancia de los invariantes de Riemann generalizados (porque por tratarse de una región próxima a un estado constante estaremos en una región de onda simple) y la condición de divergencia de características:

$$\lambda_1(U_L) < \lambda_1(U_R) \tag{3.100}$$

Aunque en un principio el problema de Riemann se planteó para dinámica de gases entre dos estados en equilibrio, posteriormente el término se ha aplicado para una situación inicial dada por dos estados constantes cualquiera, aunque no se cumplan las condiciones de Rankine-Hugoniot entre ellos, o sea prácticamente imposible conseguirlos en la realidad.

La estructura geométrica de todas las soluciones posibles del Problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para el caso $u_L < u_R$ es la siguiente:

1. Si $u_L - u_R > \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se descompone en dos ondas de choque o discontinuidades fuertes (frentes de onda) que se propagan en direcciones opuestas y en un estado constante entre ellos (Figura 3.15).

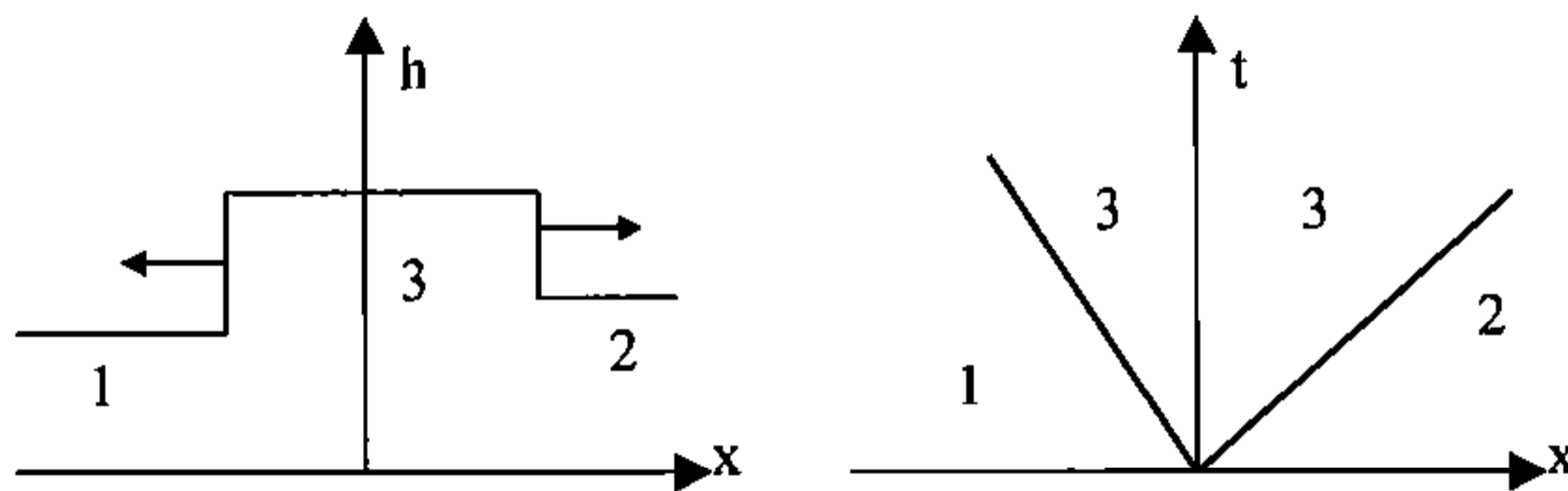


Figura 3.15. Solución del problema de Riemann 1. Solución y características.

2. Si $u_L - u_R = \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se mantiene propagándose hacia la izquierda.
3. Si $-2(c_2 - c_1) < u_L - u_R < \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se descompone en una discontinuidad fuerte que se desplaza hacia la izquierda y una onda de depresión limitada por discontinuidades débiles que se propaga hacia la derecha. Entre ellas hay un estado constante. El problema de la rotura de presa, que se trata en el apartado siguiente, es un caso particular de este con $u_R = u_L = 0$ (Figura 3.16) i $u_L - u_R = -2(c_R - c_L)$ habrá tan solo una onda de depresión propagándose hacia la derecha..

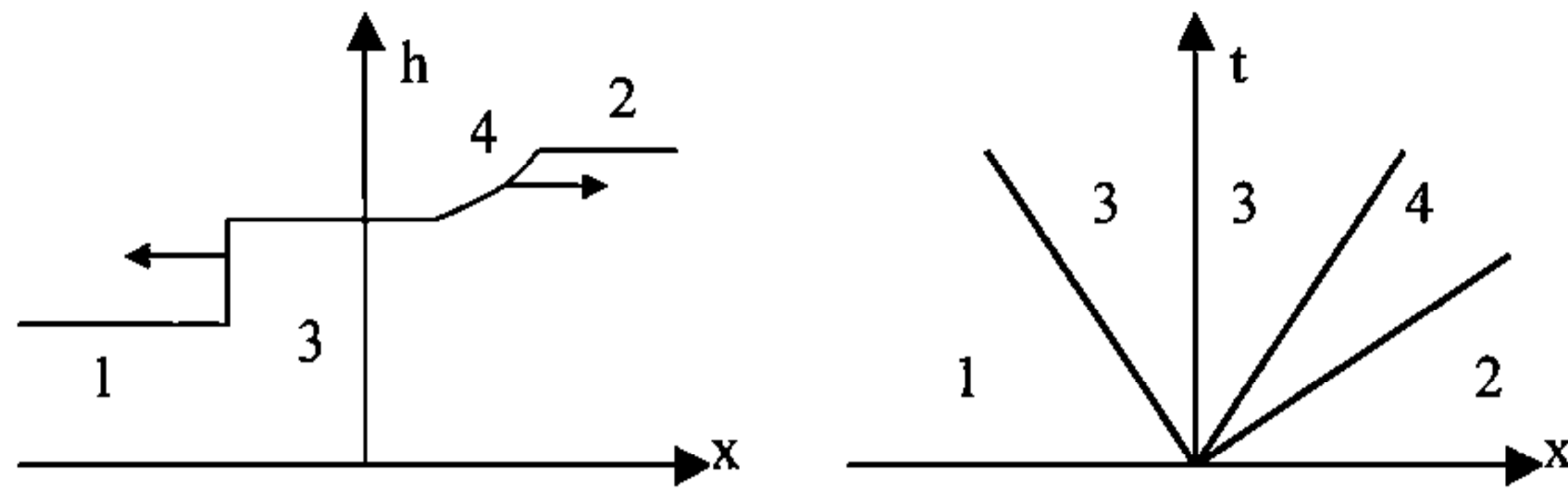


Figura 3.16. Solución del problema de Riemann 3. Solución y características.

4. Si $u_L - u_R = -2(c_L - c_R)$ habrá una onda de depresión propagándose hacia la derecha (Figura 3.17).

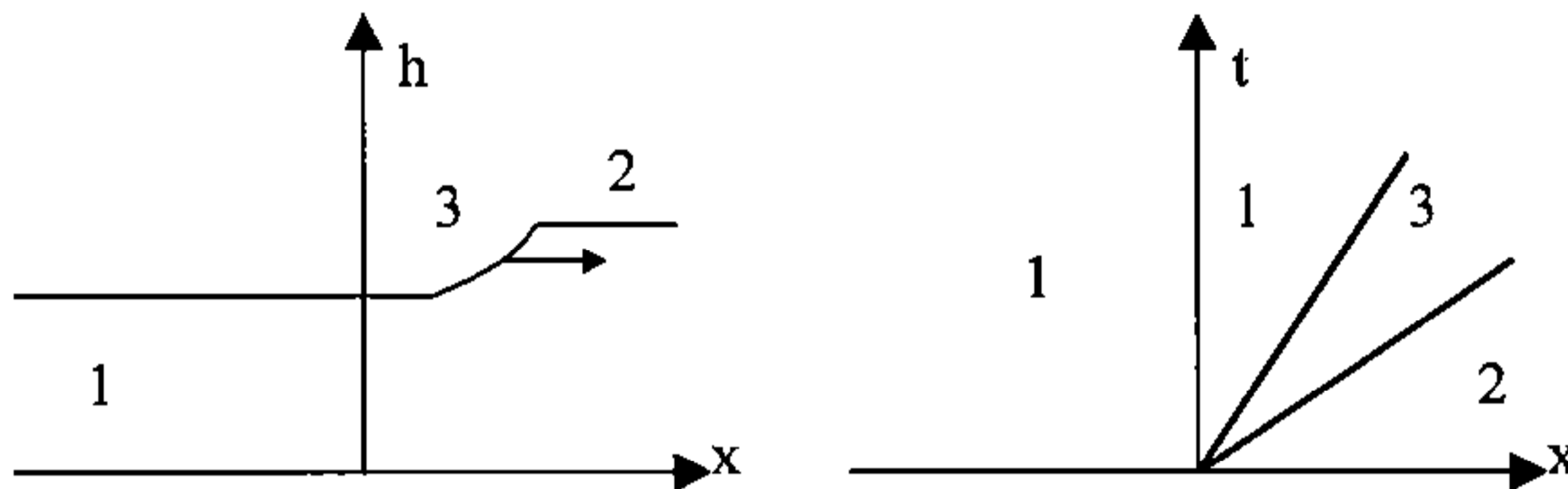


Figura 3.17. Solución del problema de Riemann 4. Solución y características.

5. Si $-2(c_R + c_L) < u_L - u_R < -2(c_L - c_R)$ habrá dos ondas de depresión propagándose hacia ambos lados con un estado constante entre ambas (Figura 3.18).

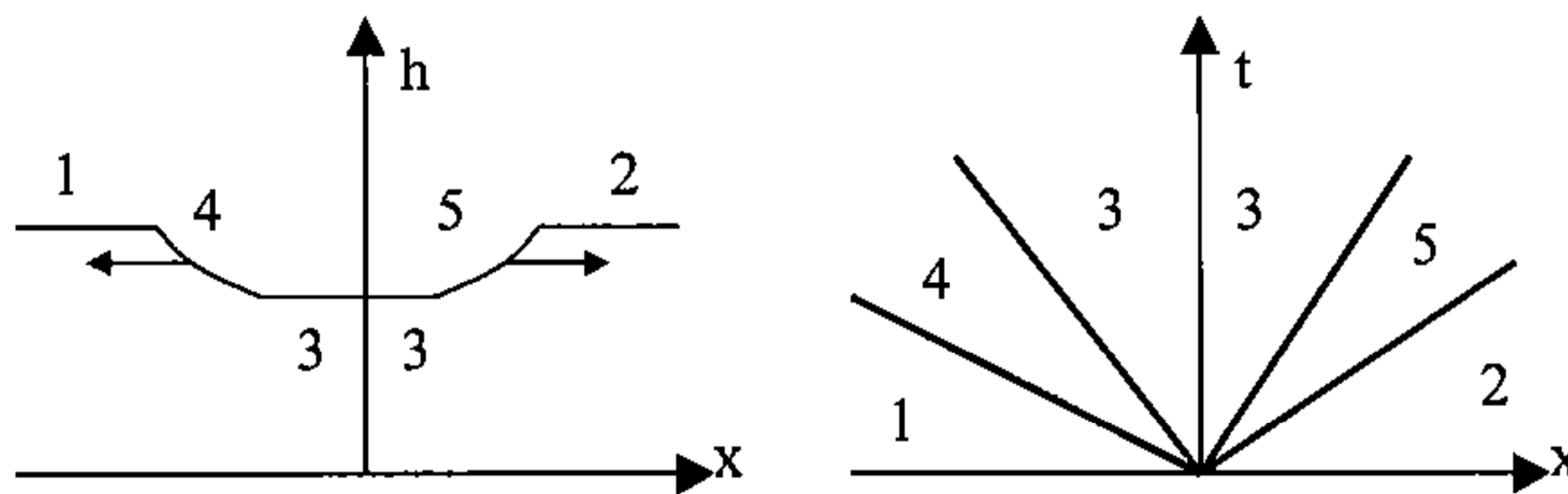


Figura 3.18. Solución del problema de Riemann 5. Solución y características.

6. Si $u_L - u_R \leq -2(c_L + c_R)$ es igual al caso anterior con la diferencia que no habrá agua entre las dos ondas de depresión.

3.4.6.4 El problema de la rotura de presa en una dimensión.

El problema de la rotura de presa en una dimensión equivale al problema de Riemann para $u_L = u_R = 0$. La discontinuidad inicial del problema hace que muchos esquemas clásicos de resolución de las ecuaciones de Saint Venant fallen, otros funcionan siempre y cuando la profundidad de agua en el lado donde es menor no sea inferior a un cierto porcentaje del otro lado. En cualquier caso es un buen test para cualquier esquema numérico que pretenda modelar correctamente flujos discontinuos.

La situación inicial sería la de un canal rectangular prismático horizontal, con una presa que separa dos partes con agua en reposo y calados distintos: h_L a la izquierda de la presa y h_R a su derecha. Suponemos el canal indefinido y sin fricción.

Como se ha visto en el apartado anterior, la estructura del flujo es la siguiente: a la izquierda del todo queda el estado inicial sin perturbar, que por congruencia con el apartado anterior llamaremos zona 2 (mayor calado inicial), a continuación, después de una discontinuidad débil, viene una zona ocupada por una onda de depresión, que va ensanchándose y propagándose a la izquierda a medida que transcurre el tiempo, la zona 4.

La siguiente, zona 3, es una zona de calado h_3 y velocidad u_3 constantes, limitada por la derecha por un frente que se propaga hacia la derecha a continuación del cual está la zona 1, con velocidad nula y calado inalterado

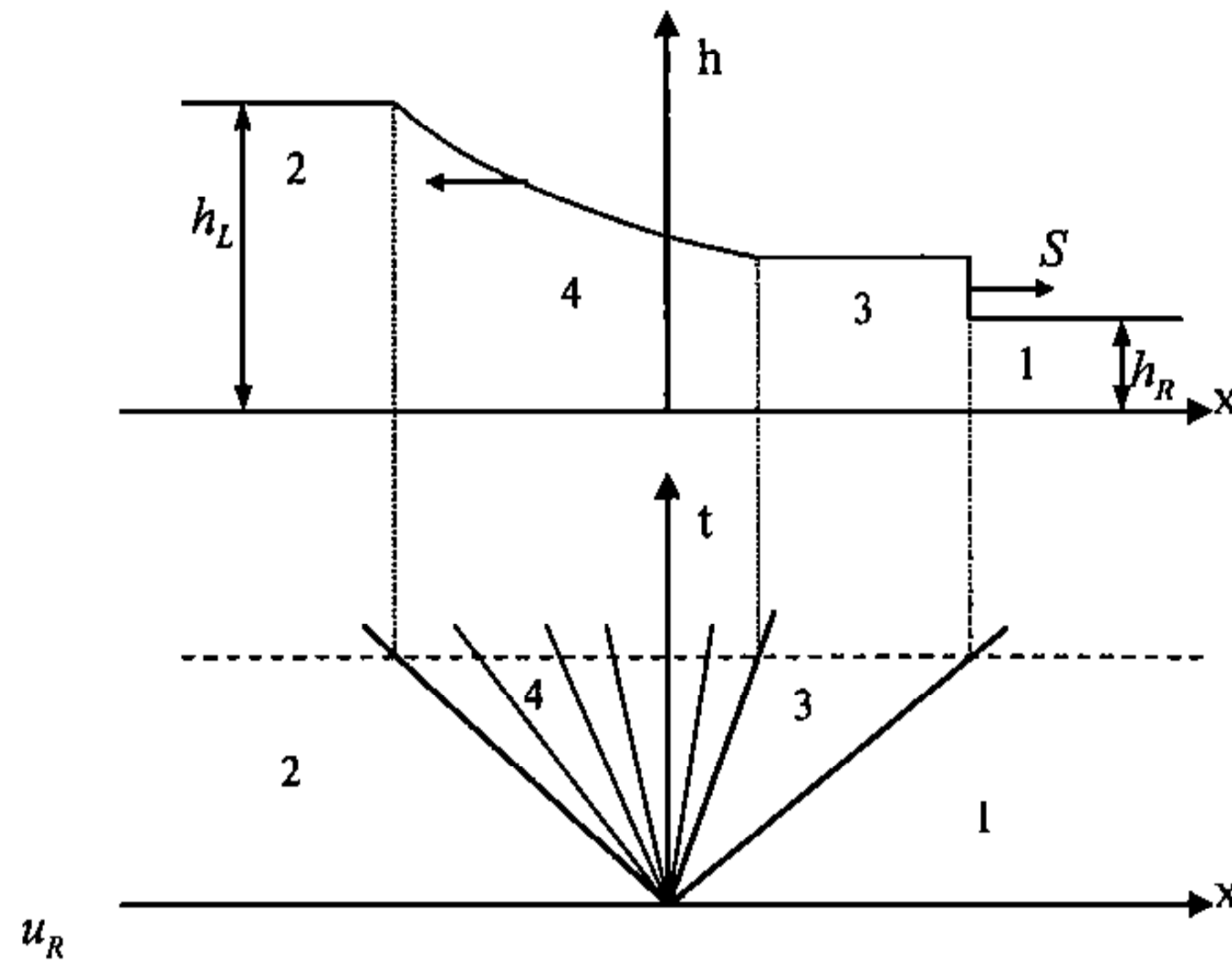


Figura 3.20.

La zona de la onda de depresión (zona 4) está limitada por dos estados constantes, por lo que, tal como se ha visto en 3.4.2 esta zona debe ser una región de onda simple correspondiente a las características C^- y por lo tanto a través de ella se cumple la constancia de los invariantes de Riemann generalizados R^- :

$$2c_2 = u_4 + 2c_4 = u_3 + 2c_3 \tag{3.101}$$

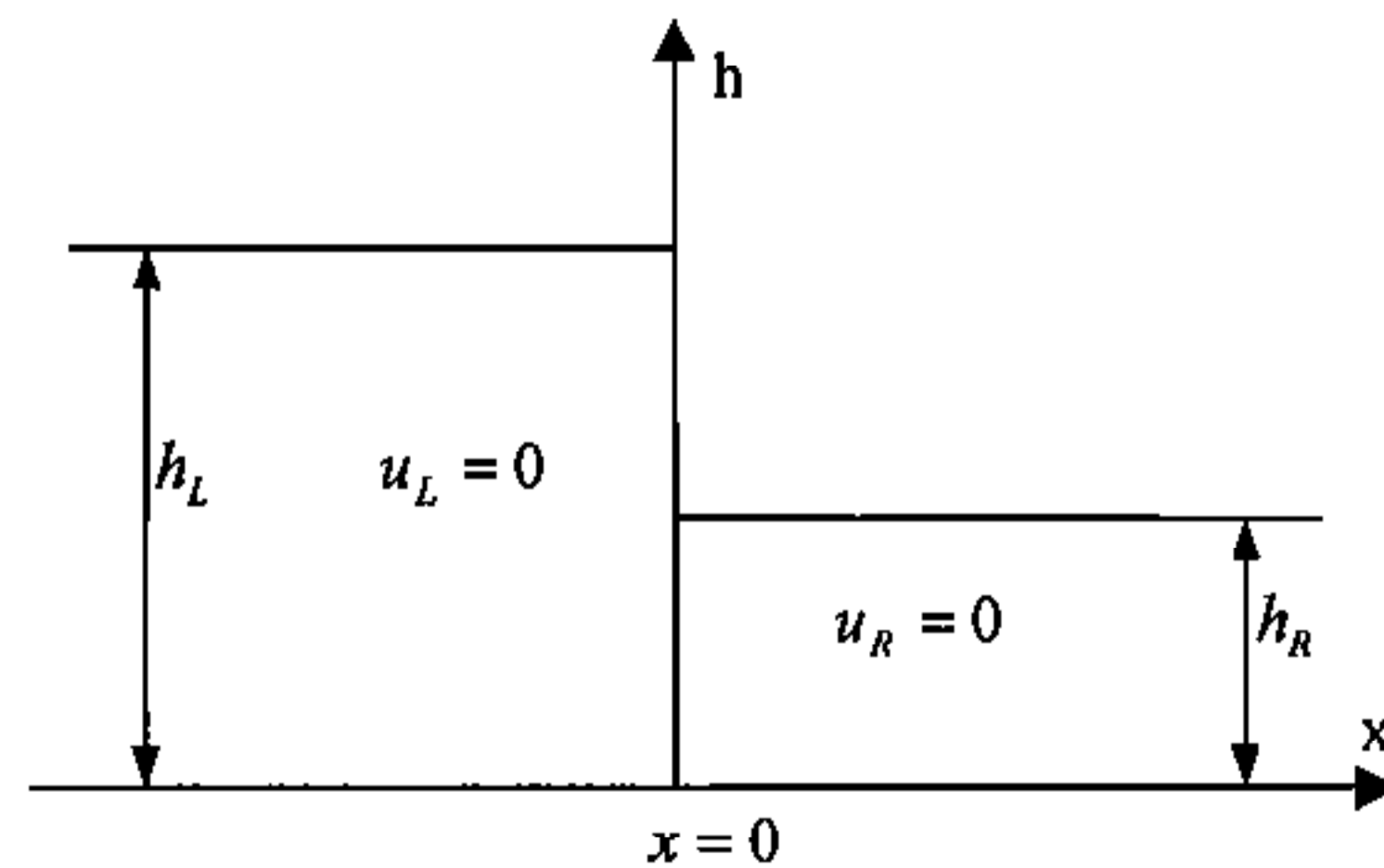


Figura 3.19. Estado inicial del problema de rotura de presa.

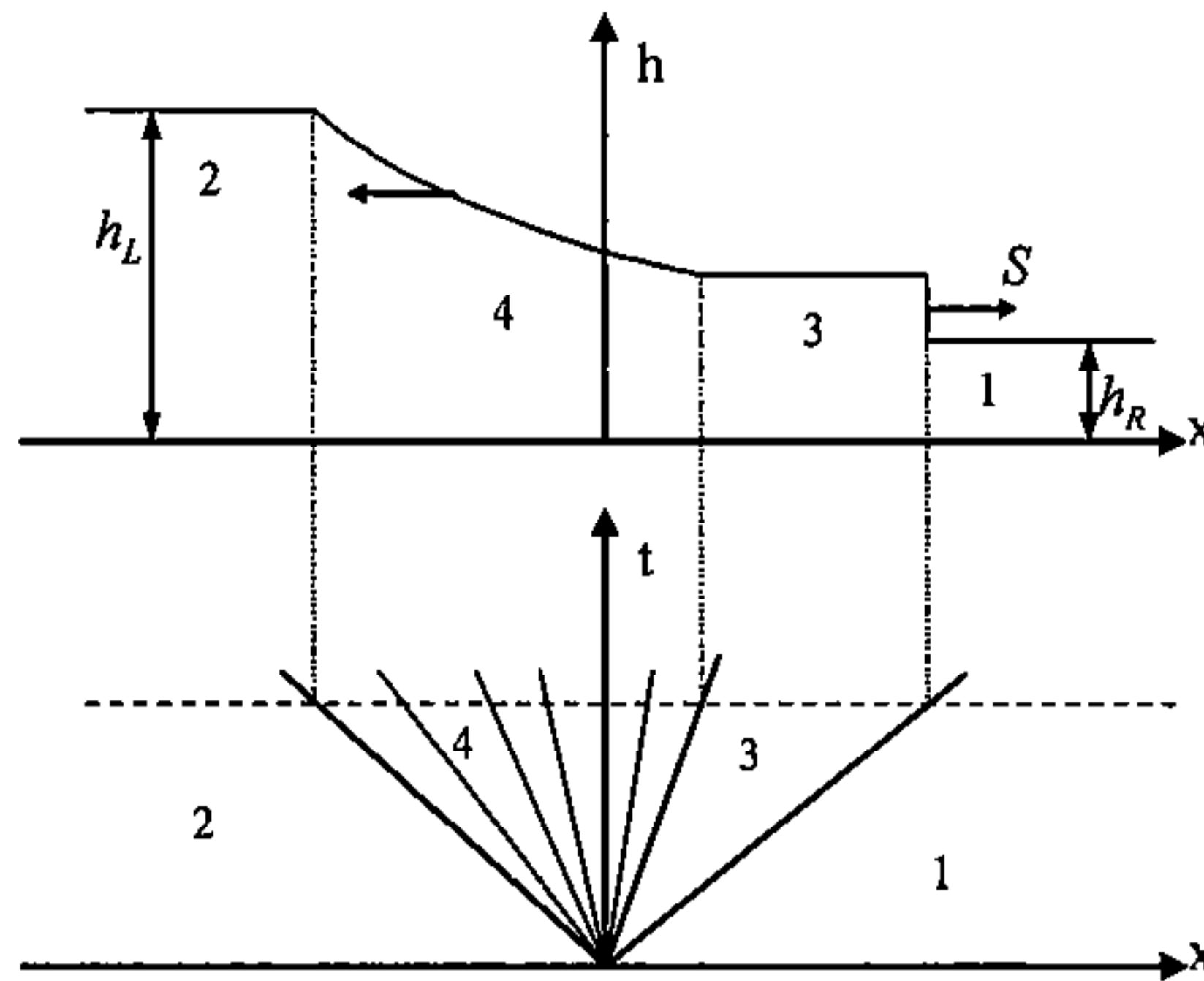


Figura 3.20. Rotura de presa a $t > 0$. Calados y características.

A través del frente, entre las zonas 3 y 1, se deben cumplir las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.71) válidas cuando tenemos una discontinuidad fuerte, que aquí quedan:

$$h_1 u_1 - h_3 u_3 = s(h_1 - h_3) \quad (3.102)$$

$$(h_1 u_1^2 + g \frac{h_1^2}{2})(h_3 u_3^2 + g \frac{h_3^2}{2}) = s(h_1 u_1 - h_3 u_3) \quad (3.103)$$

donde s es la velocidad de propagación del frente. Teniendo en cuenta que $u_1 = 0$, $h = c^2/g$ y operando, estas dos ecuaciones quedan:

$$\frac{c_3}{c_1} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{s}{c_1} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.104)$$

$$\frac{u_3}{c_1} = \frac{s}{c_1} - \frac{c_1}{4s} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{s}{c_1} \right)^2} \right) \quad (3.105)$$

que juntamente con la parte correspondiente de (3.101):

$$u_3 + 2c_3 = 2c_2 \quad (3.106)$$

forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas u_3 , c_3 y s que hay que resolver por algún método iterativo.

Las ecuaciones que dan la solución en la zona 4 se obtienen de tener en cuenta que el haz de características rectas allí corresponde a las líneas C^- y por lo tanto cumplen la relación $x/t = u_4 - c_4$ que juntamente con (3.101) da:

$$u_4 = \frac{2}{3} \left(c_2 + \frac{x}{t} \right) ; \quad c_4 = \frac{1}{3} \left(2c_2 - \frac{x}{t} \right) \quad (3.107)$$

4. Consideraciones sobre métodos numéricos

Se presenta la teoría y algunos conceptos sobre los que se sustentan los esquemas numéricos de alta resolución. Su aplicación a las ecuaciones de Saint Venant se realiza en los capítulos siguientes. Algunos de los conceptos que se exponen no son válidos para un sistema hiperbólico general (no-lineal, multidimensional y con término independiente) como son las ecuaciones de Saint Venant; sino que en algún caso son válidos tan sólo para la ecuación escalar unidimensional y homogénea, otras veces lo son para sistemas de ecuaciones unidimensionales, algunas veces homogéneas y otras con término independiente, y finalmente algunos sí que son válidos para el sistema más general. Por ello en algunos apartados del capítulo se hace referencia a expresiones de leyes de conservación más sencillas que las ecuaciones de Saint Venant.

En este capítulo se repasan conceptos de formulación y discretización, con el objetivo de justificar algunas de las decisiones que luego se toman y de dejar claras algunas ideas fundamentales sobre las que se basan los esquemas de alta resolución que se presentan en los capítulos siguientes.

4.1. Formulación integral de las leyes de conservación y discretización en volúmenes finitos

Cualquier ley de conservación, y en particular las ecuaciones de Saint Venant, se puede escribir en forma diferencial y en forma integral. Hasta ahora se han presentado las ecuaciones en forma diferencial, aunque existen buenas razones para considerar también su forma integral. La deducción de las ecuaciones se suele realizar expresando las leyes físicas de conservación como relaciones integrales en volúmenes de control, aunque luego el supuesto de suavidad de la solución permite la obtención de formas diferenciales. La forma integral es una formulación más básica que requiere menos suavidad a la solución, permitiendo con ella extender el estudio a soluciones discontinuas. Por otro lado, desde un punto de vista de cálculo numérico, el hecho de utilizar la forma integral de las ecuaciones lleva de forma natural a una discretización del dominio en células o *volúmenes finitos*, y a todos los esquemas basados en este tipo de discretización que tiene ventajas considerables.

Para una ley de conservación escalar unidimensional como:

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (4.1)$$

la forma integral se obtiene efectuando la integración en x y t . Si consideramos, por ejemplo, el dominio $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2] \times [t, t + \Delta t]$ donde Δx y Δt son intervalos espaciales y temporales cualquiera, a partir de (4.1) se obtiene (abusando del lenguaje):

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [u_t + f_x(u)] dx dt = 0 \quad (4.2)$$

de donde es inmediato:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [f(x + \Delta x/2, t) - f(x - \Delta x/2, t)] dt = 0 \quad (4.3)$$

que es la forma integral de (4.1). Se ha utilizado la notación $f(x, t)$ para $f(u(x, t))$.

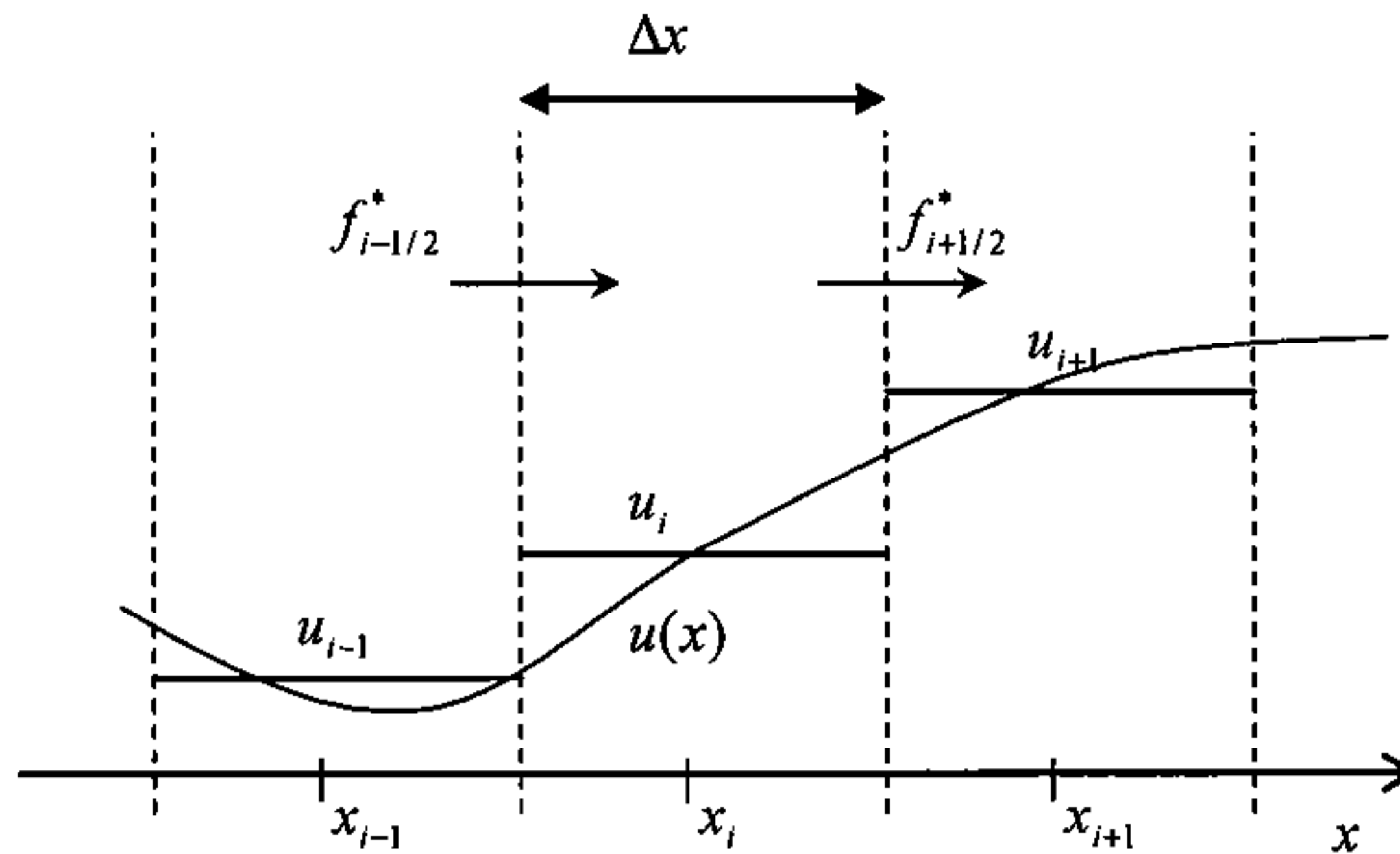


Figura 4.1. Discretización en volúmenes finitos

Los esquemas numéricos clásicos en diferencias finitas utilizan discretizaciones que consideran el valor de las variables en puntos concretos de la malla espacial. En volúmenes finitos, en cambio, el dominio de estudio se divide en una serie de celdas, o *volúmenes finitos*, y las variables utilizadas en el esquema numérico representan el valor medio de las variables dependientes en cada celda en un instante determinado. En la Figura 4.1 se representa la discretización en volúmenes finitos para el caso unidimensional y la ecuación escalar. En ella los valores u_i^n representan el valor medio de $u(x, t)$ en la celda i y en el instante $t = t^n = n\Delta t$:

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(x, t) dx \tag{4.4}$$

Observando la ecuación (4.3) y teniendo en cuenta la definición de u_i^n en (4.4), se obtiene:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} [f(x + \Delta x/2, t) - f(x - \Delta x/2, t)] dt \tag{4.5}$$

La integral de la ecuación anterior es desconocida ya que no se pueden conocer los valores de $u(x - \Delta x/2, t)$ y $u(x + \Delta x/2, t)$ en tiempos comprendidos entre t y $t + \Delta t$, por lo que hay que aproximar dicha integral de alguna manera. Así, la técnica de los volúmenes finitos lleva a describir un esquema numérico para la ecuación (4.1) mediante una expresión del tipo:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \tag{4.6}$$

Donde, como se ha visto, u_i^n representa el valor que toma la variable u en la celda i del dominio unidimensional discretizado y en el instante de tiempo n , mientras que $f_{i+1/2}^*$ se conoce por *flujo numérico* y depende en general de las variables en las celdas contiguas a la i en los instante de tiempo t^n y t^{n+1} :

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^*(u_{i-l}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n, u_{i-l}^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, \dots, u_{i+m}^{n+1}) \tag{4.7}$$

con l y m dos enteros no negativos. El flujo numérico es en definitiva lo que diferenciará un esquema numérico de otro.

En una dimensión y para esquemas conservativos (ver apartado 4.5.3) la diferencia entre los volúmenes finitos y las diferencias finitas es principalmente conceptual, ya que el esquema numérico resultante es generalmente idéntico con las dos técnicas de discretización. En dos o más dimensiones, en cambio, los esquemas resultantes de utilizar una u otra técnica son muy diferentes, hasta el punto que utilizando volúmenes finitos se obtienen

esquemas que permiten considerar soluciones discontinuas de manera inmediata mientras que con diferencias finitas ello se complica en gran manera. Los volúmenes finitos permiten además adaptar la discretización a dominios con formas arbitrarias muy fácilmente, mientras que con diferencias, en el caso de no tener mallas rectangulares y uniformes se obtienen esquemas muy complicados.

En el caso de un sistema de ecuaciones unidimensionales, como son las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$U_t + F_x(U) = H \quad (4.8)$$

con U , F y H los vectores de (2.52), la forma integral para un dominio $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2] \times [t, t + \Delta t]$ se obtiene de la misma forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[U_t + \frac{\partial}{\partial x} F(U) \right] dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} H dx dt \quad (4.9)$$

que también se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [U(x, t + \Delta t) - U(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [F(U(x + \Delta x/2, t)) - F(U(x - \Delta x/2, t))] dt = \\ = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} H(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

De donde se obtiene un esquema del tipo:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) + \Delta t H_i \quad (4.11)$$

donde ahora F^* es el flujo numérico, U_i^n es el valor medio del vector U en la celda i en el instante t^n y H_i un valor representativo del promedio de H en la celda i en el paso de tiempo de t^n a t^{n+1} , y que, como F^* , dependerá del esquema utilizado.

En el caso bidimensional el dominio físico se descompone en polígonos (en este trabajo se utilizan cuadriláteros y triángulos) que son ahora los volúmenes de control o volúmenes finitos. Cada volumen tiene una superficie o contorno formado por los lados que lo encierran y viene definido por sus vértices. Los vértices pueden estar distribuidos irregularmente, formando una malla no estructurada, o formar parte de una malla estructurada (para cuadriláteros siempre habrá cuatro lados concurrentes en cada vértice, y para triángulos tres). En dos dimensiones los volúmenes finitos no son pues volúmenes tridimensionales sino áreas, y sus superficies son curvas cerradas. En la Figura 4.2 se representa un volumen finito $V_{i,j}$ en forma de cuadrilátero en un dominio bidimensional. Su superficie o contorno son los cuatro lados, cada uno de ellos con un vector normal exterior n .

Como se vio en el capítulo anterior, las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales se pueden escribir de forma conservativa como (apartado 2.2.7):

$$U_t + \nabla F = H \quad (4.12)$$

donde ahora U y H son vectores y F es el tensor de flujo dado por (2.47). Su expresión integral para un volumen V cualquiera es:

$$\int_V U_t dV + \int_V \nabla F dV = \int_V H dV \quad (4.13)$$

y aplicando el teorema de Gauss a la segunda integral se tiene:

$$\int_V U_t dV + \oint_S (F \cdot n) ds = \int_V H dV \quad (4.14)$$

donde S es la superficie que encierra a V . Si ahora se denotan con U_{ij} y H_{ij} respectivamente al valor promedio en el volumen finito V de las variables dependientes y del término independiente, la ecuación (4.14) se puede reescribir, para un volumen concreto V_i como:

$$U_i = \frac{-1}{V_i} \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds + H_{i,j} \tag{4.15}$$

Tal como se ha hecho en el caso unidimensional, se puede definir un tensor de flujo numérico \mathbf{F}^* , que es el *flujo numérico* normal a S , de manera que la integral que aparece en esta última ecuación se puede aproximar como la suma del producto de dicho tensor por el vector normal a S , o sea:

$$\oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} \tag{4.16}$$

donde w_l representa el índice correspondiente a la l -ésima pared del elemento i y N_i el número de lados.

El vector \mathbf{n}_{i,w_l} es la normal exterior a la pared w_l del elemento i y l_{i,w_l} es su longitud. La expresión del flujo numérico, igual que en el caso 1D, es lo que diferenciará un esquema numérico de otro, que se puede escribir de forma general, análogamente a (4.11) como:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} + \Delta t H_i \tag{4.17}$$

En esta última expresión ya se puede intuir la importancia que tiene el problema unidimensional en la resolución del problema bidimensional. Este último se acaba resolviendo considerando el flujo numérico a través de cada una de las cuatro paredes de cada elemento de volumen, y este flujo se puede calcular como si en la dirección normal a cada pared hubiera un problema de Riemann unidimensional, con dos estados constantes a cada lado definidos por los valores promedio de las variables en los elementos de volumen contiguos a dicha pared. También es fundamental la discretización del término $H_{i,j}$, que representa la integral del término independiente en el volumen finito V_{ij} .

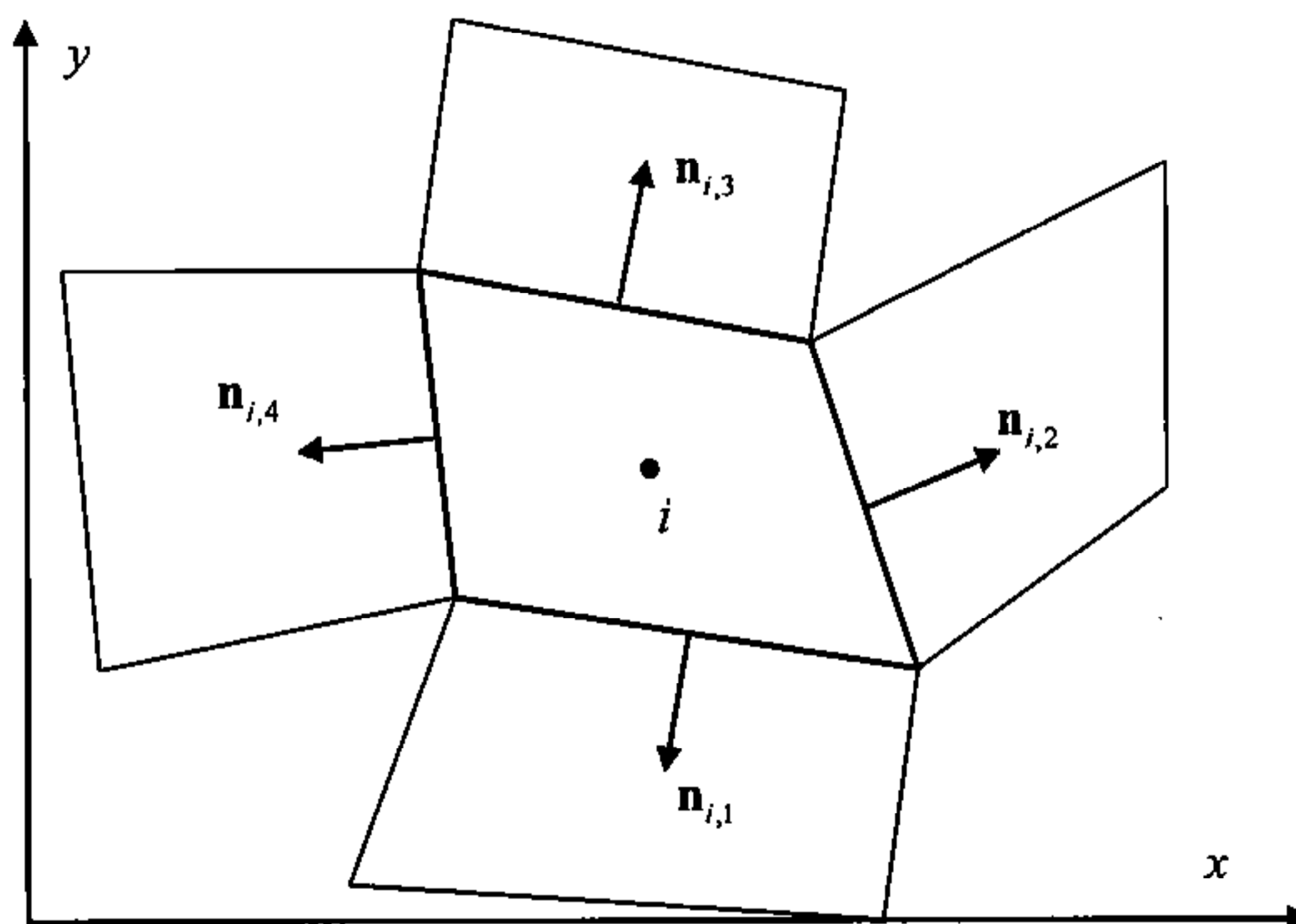


Figura 4.2. Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional

4.2. Solución débil

Se ha visto en el capítulo anterior que la solución de un sistema de ecuaciones cuasi-lineal homogéneo, que responde a la ecuación diferencial

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

puede desarrollar singularidades o discontinuidades después de un tiempo finito, por lo que las soluciones clásicas del sistema de ecuaciones diferenciales (clásicamente se admiten como soluciones las funciones continuas con derivadas continuas, o a lo sumo funciones continuas que cumplan la condición de Lipschitz) dejan de ser válidas. En la forma diferencial del sistema de ecuaciones aparecen explícitamente las derivadas de las variables hidráulicas, que no están definidas en el caso de haber discontinuidades. En la forma integral, en cambio, este problema no se da.

El concepto de solución de (4.18) se puede extender considerando la forma integral siguiente:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U})] w dx dt = 0 \quad (4.19)$$

donde $w(x,t)$ es una *función de test*, función suave en un cierto dominio de (x,t) y que se anula en el contorno y fuera de dicho dominio. La ecuación (4.19), como forma integral que es, si que se satisface aunque existan discontinuidades. Si tomáramos $w \equiv 1$ la ecuación (4.19) se convertiría en una expresión integral de las leyes de conservación con sentido físico del tipo de (4.9) para un sistema homogéneo.

Integrando (4.19) por partes se obtienen:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} [w_t \mathbf{U} + w_x \mathbf{F}(\mathbf{U})] dx dt = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x,0) \mathbf{U}(x,0) dx \quad (4.20)$$

Una función \mathbf{U} que satisface (4.20) para cualquier función de test w se llama una *solución débil* o *solución generalizada* del sistema de ecuaciones (4.18). Una solución clásica del sistema de ecuaciones, si existe, debe satisfacer la leyes de conservación en forma integral, por lo que es también una solución débil. Sin embargo lo contrario no es cierto.

La importancia de la solución débil viene dada por el teorema de Lax-Wendroff (apartado 4.5.3) que asegura la obtención de una solución débil bajo ciertas condiciones del esquema numérico, y por lo tanto abre la posibilidad de desarrollar esquemas numéricos con los que se pueden obtener soluciones discontinuas del sistema de ecuaciones de manera directa (métodos directos o *shock-capturing*). Sin embargo, la solución débil no es única, por lo que la solución obtenida con un esquema numérico puede que no coincida con la solución física del sistema. Para poder asegurar lo contrario se debe comprobar que la solución satisface la condición de entropía resultante de considerar la segunda ley de la termodinámica (apartado 4.5.4).

4.3. Esquemas explícitos y esquemas implícitos

Los esquemas explícitos son aquellos en los que el cálculo de las variables en un instante se efectúa tan sólo con los valores que toman en el instante anterior. Un esquema numérico explícito, por ejemplo para la ecuación escalar unidimensional, toma la forma (4.6) pero sin que el flujo numérico dependa de los valores en el instante t^{n+1} , o sea:

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^*(u_{i-1}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n) \quad (4.21)$$

Cada punto del dominio espacial (o cada volumen finito) se calcula pues independientemente de los demás.

Por el contrario, un esquema implícito evalúa las variables dependientes en el instante t^{n+1} a partir de los valores en puntos adyacentes al de cálculo en el instante anterior t^n , pero también en el mismo instante t^{n+1} (expresiones (4.6) y (4.7)). La resolución de un punto del espacio en un instante implica pues los valores en otros puntos del espacio en el mismo instante, por lo que se debe resolver en cada paso de tiempo un sistema de ecuaciones que engloba todas las variables en todos los puntos del espacio en el instante t^{n+1} .

Los esquemas explícitos tienen un coste computacional pequeño en cada paso de tiempo, pero para ser estables es necesario trabajar con incrementos de tiempo también pequeños. Un análisis de estabilidad para esquemas explícitos ((Gómez, 1988)(Abbott, 1979)) a partir de la teoría de las características para soluciones continuas lleva a la conclusión que dichos esquemas, para ser estables, deben cumplir la condición de Courant, que para las ecuaciones unidimensionales es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u \pm c|} \quad (4.22)$$

o, lo que es lo mismo:

$$C = \frac{|u \pm c| \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.23)$$

donde C es el número de Courant, también llamado número de Courant, Friedrichs y Levy (CFL). La condición de Courant significa que el dominio de dependencia de un punto en un esquema en diferencias explícitas (que está formado por los puntos del espacio que intervienen en el esquema) debe comprender al dominio de dependencia para la ecuación diferencial, ya que precisamente $|u \pm c|$ es la velocidad de propagación de una onda, o velocidad de transmisión de la información, que limita el dominio de dependencia para la solución exacta.

Para el caso bidimensional el mismo análisis de estabilidad (Tan, 1992) concluye que para que un sistema explícito sea estable debe cumplirse (para el caso $\Delta x = \Delta y$ y malla regular):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2} |\sqrt{u^2 + v^2} + c|} \quad (4.24)$$

que para una discretización mediante volúmenes finitos, con la notación del apartado 4.1., queda como:

$$\Delta t \leq \min_{i,j} \left(\frac{l_{i,j}}{\sqrt{2} |\sqrt{u^2 + v^2} + c|} \right) \quad (4.25)$$

que también se puede escribir como

$$C = \max_{i,j} \left(\frac{|\sqrt{u^2 + v^2} + c| \Delta t}{l_{i,j}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.26)$$

Lo visto es una condición necesaria de estabilidad, pero en el caso de soluciones discontinuas el criterio de estabilidad puede ser más restrictivo en algún caso. En el caso unidimensional lo que debe cumplirse es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{\max}} \quad (4.27)$$

donde S_{\max} es la velocidad de propagación de la onda más rápida del problema de Riemann asociado. Esta será pues la condición que deberán cumplir los esquemas basados en el método de Godunov, como se verá en adelante. En la práctica las condiciones (4.22) y (4.27) se suelen considerar equivalentes, aunque en algún caso, como el avance en lecho seco, podría llevar a inestabilidades por estar infravalorando la velocidad de propagación de la onda.

Los esquemas implícitos tienen la ventaja sobre los esquemas explícitos que son incondicionalmente estables, aunque la convergencia a veces puede ser difícil de conseguir dependiendo de las condiciones iniciales. Es posible combinar la diferenciación temporal implícita con discretizaciones espaciales de alta resolución (Alcrudo, 1992) (entendiendo como tales aquellas que, para una formulación explícita de la derivada temporal, serían de alta resolución) resultando esquemas estables para fenómenos estacionarios con números de Courant del orden de 100, pero no es posible asegurar, ni siquiera en el caso escalar, que los esquemas resultantes sean realmente de alta resolución, es decir, que cumplan las tres condiciones de Harten. Esto, junto con el hecho de que se pierde precisión debido a las aproximaciones que se deben hacer para linealizar el sistema, la relativamente poca mejora en tiempos de cálculo por el gran número de iteraciones que hacen falta para converger y el tiempo que consume cada iteración (especialmente en dominios grandes y bidimensionales), y el hecho que si se pretende modelar un régimen rápidamente variable en el tiempo el uso de incrementos de tiempo grandes pierde incluso sentido físico, hace que los esquemas implícitos se utilicen poco para fenómenos físicos rápidamente variables donde son necesarios esquemas de alta resolución. Los esquemas implícitos dan excelentes resultados para flujo claramente subcrítico, siendo los más utilizados para ello el esquema de Preissmann o de los cuatro puntos para cálculos unidimensionales, y esquemas ADI desarrollados a partir del esquema de Lendersee para dos dimensiones. Para problemas con variaciones importantes en el espacio o en el tiempo, los esquemas explícitos son más adecuados. Información sobre esquemas implícitos clásicos se puede encontrar en (Abbott, 1979), (Cunge, 1980), (Ritchmyer, 1967) y (Gómez, 1988).

4.4. Esquemas centrales y esquemas upwind

Los esquemas en diferencias finitas consisten en reemplazar las derivadas según cada variable dependiente por cocientes en diferencias de los valores de las variables en los puntos de discretización del dominio de solución. Tradicionalmente los esquemas numéricos unidimensionales utilizan, para la discretización espacial, diferencias centradas, diferencias hacia delante o diferencias hacia atrás, según la aproximación a la derivada de una función $f(x)$ en el punto x_i se realice, respectivamente, como:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad ; \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (4.28)$$

Las dos últimas expresiones tendrán sentido, sobretodo, en los puntos de los contornos del dominio de estudio, donde las diferencias centrales no se pueden utilizar, al menos de forma inmediata.

Uno de los esquemas explícitos más sencillos en que se puede pensar para resolver la ecuación escalar homogénea (4.1) consistiría en utilizar una aproximación con diferencias hacia delante para las derivadas temporales (que como se verá en el apartado 4.5.3 es necesario para tener esquemas conservativos) y diferencias centrales en las derivadas espaciales para tener segundo orden de precisión, o sea, para el punto (x_i, t^n) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (4.29)$$

para la ecuación (4.1) con $f(u) = \lambda \cdot u$, la aplicación de las estas expresiones nos llevaría al esquema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (4.30)$$

Sorprendentemente este esquema es incondicionalmente inestable como se puede ver con un análisis de estabilidad de Von-Neumann (Gómez, 1988), (Toro, 1997), y ello es debido a que se está utilizando un dominio de dependencia para el esquema numérico distinto del dominio de dependencia físico de la solución exacta.

En cambio, tan solo sustituyendo $u_i^n = 1/2(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n)$ en (4.29), el esquema resultante para esta misma ecuación queda como:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i-1}^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i+1}^n \quad (4.31)$$

que es el conocido *esquema de Lax-Friedrichs* (a veces llamado también *esquema de Lax* o *esquema difusivo*), y resulta incondicionalmente estable si se cumple la condición de Courant:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.32)$$

Este esquema tiene un buen comportamiento para ondas rápidas, pero no tanto para ondas lentas o estacionarias.

Otro esquema central de especial interés es el esquema de Lax-Wendroff, que se puede obtener considerando las derivadas espaciales como una combinación de derivadas hacia delante y derivadas hacia atrás:

$$\frac{du}{dx} = \gamma_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (4.33)$$

con

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) \quad (4.34)$$

resultando

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i-1}^n + \left(1 - \left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_i^n - \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i+1}^n \quad (4.35)$$

que también es estable si se cumple (4.32).

Para poder incorporar en el esquema numérico las propiedades del fenómeno físico se desarrollaron los *esquemas upwind* (*contraviento* o *contracorriente*), esquemas descentrados que utilizan el hecho de que la información se propaga a lo largo de las líneas características para que los puntos involucrados en las derivadas espaciales involucren al dominio que físicamente influencia cada punto de cálculo. Para ello se utilizan derivadas espaciales hacia delante o hacia atrás dependiendo del sentido de propagación de la onda. Por ejemplo, para la ecuación (4.1) con $f(u) = \lambda \cdot u$, λ es precisamente la velocidad característica ($\lambda = df/du$), velocidad con que se propaga una onda. Si λ es positivo se pueden utilizar diferencias hacia atrás, lo que resulta en el esquema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4.36)$$

mientras que si λ es negativo, utilizando diferencias hacia delante tenemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4.37)$$

Este esquema, de primer orden de precisión, es estable para números de Courant inferiores o iguales a 1 y tiene la ventaja de tener en cuenta la física del fenómeno a la hora de discretizar las ecuaciones. Para escribirlo en forma condensada se puede definir:

$$\lambda^+ = \frac{1}{2}(\lambda + |\lambda|) \quad ; \quad \lambda^- = \frac{1}{2}(\lambda - |\lambda|) \quad (4.38)$$

de manera que si λ es positivo $\lambda^+ = \lambda$ y $\lambda^- = 0$, mientras que si por el contrario λ es negativo se tiene $\lambda^+ = 0$ y $\lambda^- = \lambda$. Con ello este *esquema upwind de primer orden* se puede escribir como:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda^+ \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\lambda^- \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.39)$$

Este esquema, válido como se ha dicho para la ecuación escalar homogénea con $f(u) = \lambda \cdot u$ fue propuesto por Courant, Isaacson y Reeves en 1952, por lo que también se le conoce como esquema *CIR*. En el capítulo siguiente se realiza la extensión a sistemas de ecuaciones no lineales.

En los últimos años distintos autores han realizado importantes esfuerzos para desarrollar esquemas upwind. Aunque los esquemas centrales tienen las ventajas de su simplicidad, no tienen en cuenta como realmente se propaga la información. El coste computacional de los esquemas upwind puede ser bastante mayor que para esquemas centrados y el tratamiento del término independiente complejo, aún así son una buena opción para conseguir métodos directos para las ecuaciones del flujo en lámina libre, especialmente para el caso bidimensional.

4.5. Algunas propiedades de los esquemas numéricos

En este apartado se comentan algunas de las propiedades que puede tener, y en general es conveniente que tenga, un esquema numérico. Cuando en adelante se discutan los distintos esquemas, el hecho de poseer o no estas propiedades dará inmediatamente una idea de sus capacidades y limitaciones.

4.5.1. Orden de diferenciación

El orden de diferenciación de un esquema numérico en diferencias finitas hace referencia a la manera como se aproximan las derivadas de manera discreta. Dada una función $f(x)$ suficientemente suave, y el valor que toma en un punto x_0 se puede conocer el valor que toma en un punto cercano $x_0 + \Delta x$ mediante un desarrollo en serie de Taylor:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_k \frac{(\Delta x)^k}{k!} \frac{d^k f(x_0)}{dx^k} \quad (4.40)$$

Truncando la serie de Taylor se pueden obtener aproximaciones a las derivadas de $f(x)$. Por ejemplo, despreciando los términos de segundo orden en (4.40) y despejando, podemos obtener una aproximación a la primera derivada como:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.41)$$

o, considerando el punto $x_0 - \Delta x$:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.42)$$

Tanto (4.41) como (4.42) son aproximaciones de primer orden de la primera derivada de $f(x)$ en x_0 , pues el error cometido es un término de primer orden, $O(\Delta x)$. Considerando los desarrollos en serie de Taylor de $f(x_0 + \Delta x)$ y $f(x_0 - \Delta x)$ y restando uno de otro se puede obtener una aproximación a la derivada, mediante diferencias centradas, que es de segundo orden, ya que los términos de primer orden se anulan:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.43)$$

En general un esquema basado en diferencias hacia delante, hacia atrás, o upwind será de primer orden de precisión, mientras que diferencias centrales producirán un esquema de segundo orden de precisión.

Un resultado importante para el desarrollo de esquemas de alta resolución, es que un esquema numérico lineal para la resolución de la ecuación escalar (4.1) con $f(u) = \lambda u$

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k u_{i+k}^n \quad (4.44)$$

es de segundo orden de precisión si y sólo si:

$$S_0 = 1 \quad ; \quad S_1 = -c \quad ; \quad S_2 = c^2 \quad (4.45)$$

donde $c = \lambda \Delta t / \Delta x$ y:

$$S_q = \sum_{k=-k_L}^{k_R} k^q b_k \quad (4.46)$$

De los esquemas vistos en 1.1. son de primer orden el esquema inestable (4.30), el esquema de Lax-Friedrichs (4.31) y el esquema upwind de primer orden (4.39). El esquema de Lax-Wendroff es de segundo orden de precisión en el espacio y en el tiempo, y además es el único esquema posible de segundo orden que incorpora tan solo tres puntos $(u_{i+1}^n, u_i^n, u_{i-1}^n)$ en su discretización.

4.5.2. Convergencia, consistencia y estabilidad

A continuación se enuncian tres conceptos que sirven para considerar la bondad con que un esquema numérico es capaz de reproducir la solución de la ecuación original.

Convergencia: Un esquema numérico es convergente si la solución numérica obtenida de él tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial cuando la malla se hace indefinidamente fina. Todo esquema numérico debería pues ser convergente.

Consistencia: Un esquema será consistente con la ecuación original si, al refinar la malla, el operador diferencial y el operador en diferencias finitas son equivalentes. La consistencia indica pues la bondad con que un esquema numérico representa la ecuación original, y se puede expresar también diciendo que un esquema numérico es consistente si el flujo numérico coincide, cuando todos los argumentos son iguales a v , con el flujo físico para $u = v$:

$$f_{i+1/2}^*(v, \dots, v, \dots, v) = f(v) \quad (4.47)$$

Estabilidad: La estabilidad es la propiedad que tiene o no un esquema numérico de que los errores de redondeo permanezcan dentro de límites razonables. La estabilidad es una propiedad del método de integración utilizado, que no depende de la ecuación original.

Los tres conceptos anteriores están ligados por el *teorema de Lax*, que dice que para un problema de valor inicial lineal bien planteado, y para un esquema numérico consistente, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la solución numérica. Este teorema permite descomponer el problema de la convergencia en otros dos más asequibles, por lo que se puede demostrar la convergencia de un esquema, al menos para el problema lineal, a través de su consistencia y estabilidad. La mayor parte de los esquemas utilizados para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales se basan en este teorema para garantizar su convergencia, aunque se debe recordar que las ecuaciones de Saint Venant forman un sistema de ecuaciones no lineal y por tanto esta teoría deja de ser válida.

4.5.3. Esquemas conservativos

Para poder calcular soluciones discontinuas se deben imponer condiciones tanto en la formulación de las ecuaciones como en los esquemas numéricos utilizados. En cuanto a las primeras, tan solo la forma conservativa de las ecuaciones, que utiliza como variables aquellas que físicamente se conservan, permitirá calcular de forma correcta una solución discontinua (Toro, 1997). Para cualquier otro conjunto de variables distinto de las variables conservativas se obtendrán unas condiciones de salto (como las condiciones de Rankine-Hugoniot para las variables conservativas) erróneas, con una velocidad de propagación también errónea, y por lo tanto una solución de su posición a lo largo del tiempo también errónea.

Un esquema numérico, para la ecuación escalar (4.1) se define como *esquema conservativo* si se puede escribir en la forma de la ecuación (4.6). Los esquemas conservativos aparecen pues de forma natural al considerar la forma integral de la ecuación (4.1), ecuación (4.3), y una discretización en volúmenes finitos.

Por otro lado, gracias al teorema de Lax-Wendroff, que dice que un método numérico conservativo, si es convergente, converge a una solución débil de la ley de conservación, se puede asegurar que mediante esquemas conservativos podremos calcular la solución incluso en el caso de haber discontinuidades. Y es más, en el caso

de tener soluciones discontinuas, si se quiere utilizar un método directo o *shock capturing* no queda más remedio que aplicar un método conservativo y utilizar las ecuaciones en forma conservativa.

El teorema de Lax-Wendroff asegura que la solución que se obtiene es una solución débil del sistema de ecuaciones, pero como las soluciones débiles pueden no ser únicas, es necesario verificar que ésta coincide con la solución física comprobando que se cumple la condición de entropía.

Algunos esquemas de ejemplos escritos en forma conservativa son:

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) \quad (4.48)$$

para el esquema inestable,

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.49)$$

para el esquema de Lax-Friedrichs o

$$f_{i+1/2} = f \left(\frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n) \right) \quad (4.50)$$

para el esquema de Lax-Wendroff.

4.5.4. Unicidad y condición de entropía

Para una misma condición inicial discontinua puede existir más de una solución débil de las ecuaciones, pero de ellas solamente una es físicamente correcta. En el caso de las ecuaciones de Saint Venant, debido a la viscosidad del fluido y a la producción de calor, la entropía debe crecer a través de una discontinuidad. Sin embargo, se pueden encontrar soluciones discontinuas de las ecuaciones de Saint Venant para las cuales la entropía decrece. Este tipo de soluciones son físicamente inadmisibles.

La solución correcta se puede distinguir de las otras porque debe cumplir una serie de criterios que se puede demostrar que son equivalentes (Tan, 1992):

1. Criterio de viscosidad. La solución correcta coincide con el límite, cuando la viscosidad tiende a cero, de las mismas ecuaciones hiperbólicas cuando al término independiente se le añade un término de viscosidad. En el caso particular de un sistema de ecuaciones hiperbólico como (4.18), la solución físicamente correcta debe coincidir, pues, con el límite cuando ν tiende a 0 de la solución de:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (4.51)$$

2. Criterio de la aproximación en diferencias: La solución físicamente correcta coincide con el límite de la solución numérica cuando el incremento de tiempo utilizado tiende a cero.
3. Criterio de la onda de choque: Como se ha visto en el apartado Capítulo 3. , para la ecuación unidimensional escalar homogénea, una discontinuidad fuerte físicamente correcta es aquella en la que convergen las líneas características. Para un sistema hiperbólico del tipo (4.8) lo mismo será cierto para cada uno de los campos característicos, lo que se traduce que para cualquier valor propio λ_i , si S es la velocidad de propagación de la discontinuidad debe cumplirse, como muestra la Figura 4.3.

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S > \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (4.52)$$

$$\lambda_{i+1}(\mathbf{U}_R) > S > \lambda_{i-1}(\mathbf{U}_L) \quad (4.53)$$

Naturalmente la segunda de estas ecuaciones no tiene sentido para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para las cuales solamente existen dos valores propios, pero sí cuando consideramos las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (variables u, v, h) restringidas a una dirección (lo que se hace en cada uno de los contornos de los elementos de volumen).

Se puede probar que las ecuaciones (4.52) y (4.53) son equivalentes, en dinámica de gases, al hecho que la entropía termodinámica de una partícula aumente al cruzar una discontinuidad.

Los criterios anteriores son equivalentes, por lo que los esquemas de alta resolución deben comprobar que la solución obtenida cumple alguno de ellos, o, lo que es lo mismo, que no permiten obtener soluciones que violen alguno de los mencionados criterios.

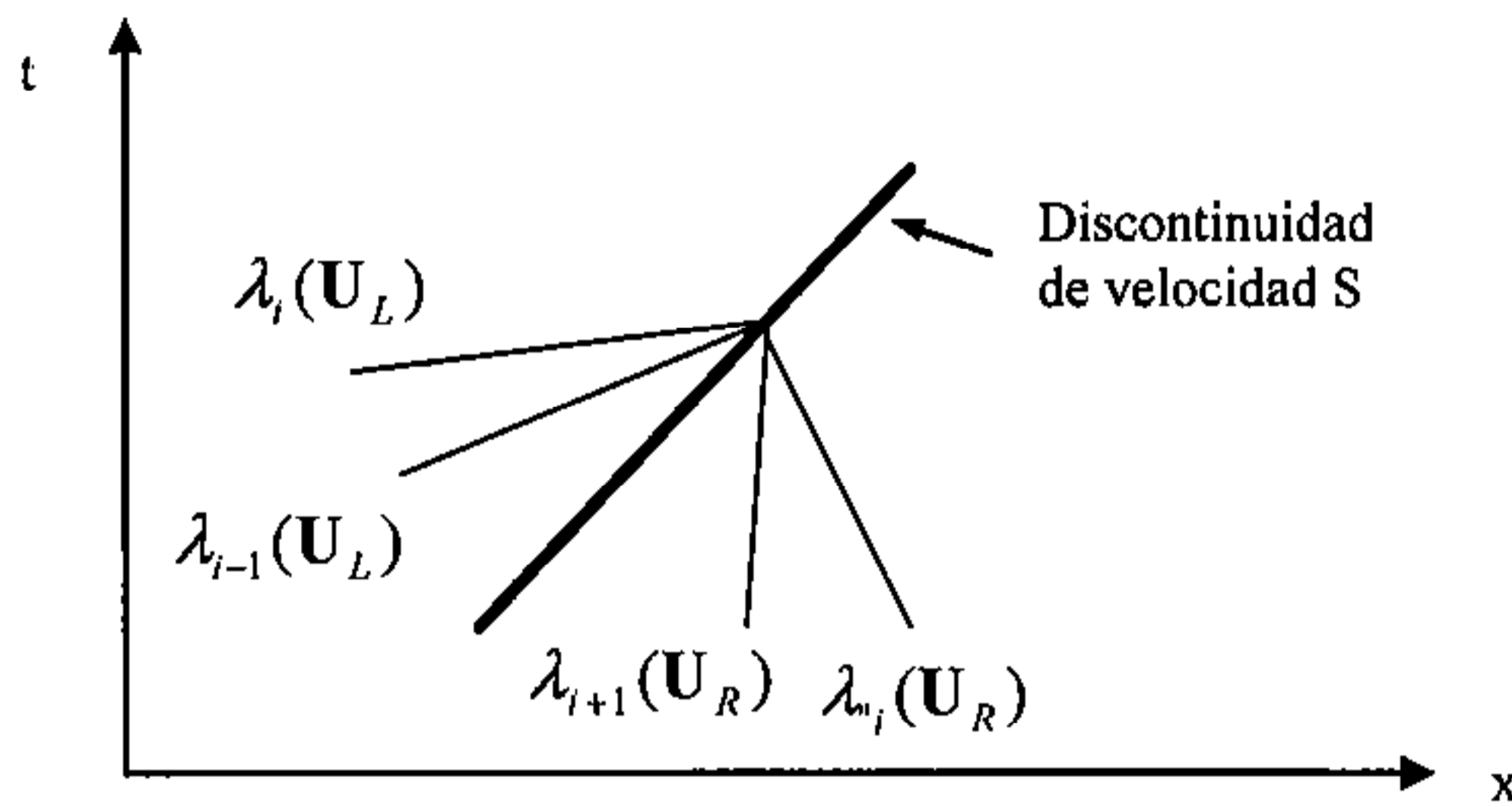


Figura 4.3. Convergencia de las características en una discontinuidad con sentido físico

4.5.5. Monotonicidad

En la búsqueda de esquemas numéricos verdaderamente de alta resolución toman importancia los conceptos teóricos de monotonicidad, variación total decreciente (TVD), la condición de compatibilidad de datos y la idea de esquemas ENO (Essentially Non-Oscillating), conceptos que están muy ligados entre si y que son fundamentales para comprender los esquemas de alta resolución. Se insiste que la mayoría de estos conceptos rigurosamente sólo tienen sentido para la ecuación escalar homogénea, o para un sistema de ecuaciones homogéneo, aunque generalmente se cumple que los esquemas que resultan adecuados para esos casos también lo serán en el caso más general con términos fuente y más dimensiones.

Si consideramos la expresión escalar de un ley física de conservación (4.1) su solución *preserva la monotonicidad* (Harten, 1982) entendiéndolo por ello que se cumplen las dos condiciones siguientes: 1) no se pueden crear nuevos extremos locales en x y 2) el valor de un mínimo local no puede disminuir y el de un máximo local no puede aumentar. La preservación de la monotonicidad es pues una propiedad física de una ley de conservación que cualquier buen esquema numérico deberá mantener.

Por otro lado, al pasar a la solución discreta, se dice que un esquema numérico del tipo:

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-r+1}^n, \dots, u_{i+s}^n) \tag{4.54}$$

es monótono si H es una función no-decreciente de todos sus argumentos:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j^n} \geq 0 \quad \forall j \tag{4.55}$$

Con un esquema monótono, a partir de un conjunto de datos $\{u_i^n\}$ se obtiene una solución $\{u_i^{n+1}\}$ que cumple (Toro, 1997):

$$\max_i \{u_i^{n+1}\} \leq \max_i \{u_i^n\} \quad ; \quad \min_i \{u_i^{n+1}\} \geq \min_i \{u_i^n\} \quad (4.56)$$

que no es más que la expresión discreta de la preservación de la monotonicidad física de la solución. Un esquema monótono mantiene esta propiedad y por lo tanto no podrá crear soluciones espurias, por lo que la búsqueda de esquemas monótonos será la base de los métodos de alta resolución.

Para un esquema conservativo de tres puntos del tipo

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \quad (4.57)$$

puede verse fácilmente que la condición de monotonicidad (4.55) queda

$$\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i^n}(u_i^n, u_{i+1}^n) \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}^n}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq 0 \quad (4.58)$$

mientras que para un esquema lineal del tipo:

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k u_{i+k}^n \quad (4.59)$$

la condición de monotonicidad (4.55) queda

$$b_k \geq 0 \quad \forall k \quad (4.60)$$

Un resultado notable que se deduce de las propiedades anteriores es el *Teorema de Godunov*: para la ecuación escalar (4.1) con $f(u) = au$, no existe ningún esquema lineal (de la forma (4.59)) de orden de precisión mayor que uno, que sea monótono. El Teorema de Godunov se demuestra desarrollando S_2 en (4.46) como:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=-k_L}^{k_R} k^2 b_k = \sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k - 2 \sum_{k=-k_L}^{k_R} k b_k - c^2 \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k = \\ &= \left[\sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k \right] - 2cS_1 - c^2 S_0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

sustituyendo la condición de segundo orden de precisión del esquema (4.45) en (4.61) queda

$$S_2 = \left[\sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k \right] + c^2 = c^2 \quad (4.62)$$

si se pretende que el esquema sea monótono debe cumplirse además (4.60), por lo que la única posibilidad sería $b_k = 0$ para cualquier k , lo que no tiene sentido.

Del Teorema de Godunov se desprende pues que los esquemas lineales pueden ser sólo de primer orden para ser monótonos, pero por otro lado los esquemas de primer orden son a veces poco precisos. Para conseguir esquemas de alta resolución se tiene que evitar pues caer en las hipótesis de este teorema, y en concreto buscar esquemas que no sean lineales, es decir, cuyos coeficientes dependan de los valores discretos que toma la solución.

Otro resultado importante (Hirsh, 1990) es que los esquemas monótonos no sólo convergen a una solución débil de la ley de conservación, sino que lo hacen a la única solución que satisface la condición de entropía y que es, por lo tanto, la solución física.

4.5.6. Oscilaciones espurias, dispersión y disipación

Se conoce por el nombre de fenómeno de Gibbs el hecho de que un esquema de segundo o mayor orden de precisión produce oscilaciones espurias de la solución en zonas cercanas a grandes gradientes, y en concreto en zonas cercanas a discontinuidades de la solución. Esquemas distintos producen oscilaciones distintas (ver Figura 4.4) alrededor de la discontinuidad, pero como se ha visto en el apartado anterior cualquier esquema numérico lineal de segundo orden de precisión las producirá. Las oscilaciones pueden ir aumentando al transcurrir el tiempo y provocar que el esquema numérico sea inestable, producir valores de calados negativos o simplemente malas aproximaciones a la realidad. Este fenómeno se conoce también por el nombre de *dispersión*.

Históricamente este problema se trató, en un principio, añadiendo términos de viscosidad artificial a esquemas de segundo orden, solución que utilizan todavía algunos programas comerciales, a pesar que de esta manera la discontinuidad se suaviza comprendiendo un dominio más amplio que el que tiene realmente. Precisamente los métodos de aislamiento del frente de onda (*Shock Fitting methods*) se desarrollaron para intentar resolver este problema, pero que como se ha dicho se mostraron ineficaces y poco prácticos al tener que tratar la discontinuidad como un contorno móvil con unas condiciones especiales, frente a la ventaja de los métodos directos, con esquemas de alta resolución que no requieren de ningún tratamiento especial.

Por el contrario los esquemas de primer orden son disipativos, de manera que la amplitud de una onda decrece más que su solución exacta y por otro lado las variaciones de la solución, y sobretodo las discontinuidades, se esparcen por la malla de cálculo (ver Figura 4.5).

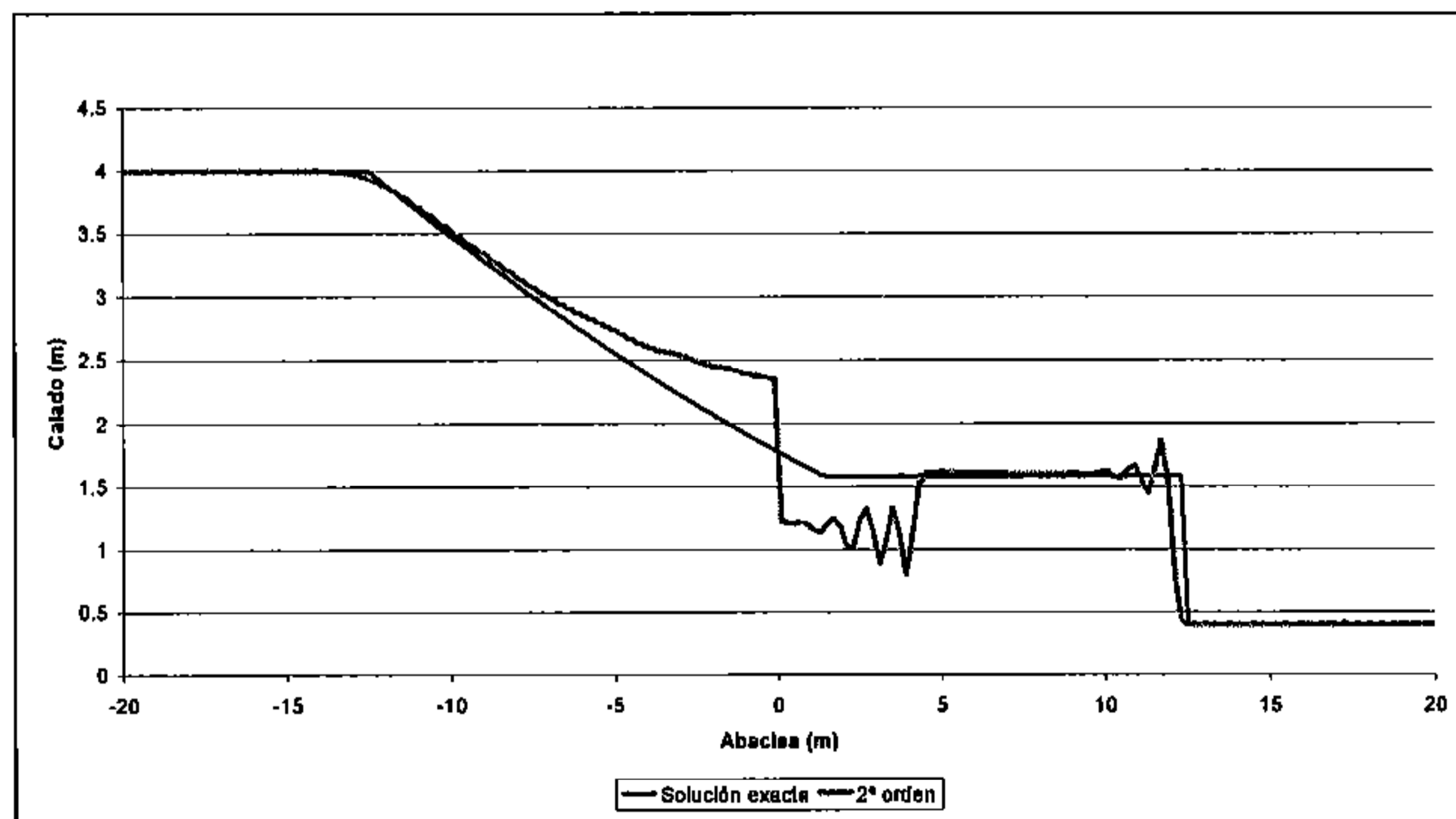


Figura 4.4. Oscilaciones espurias (fenómeno de Gibbs) para un esquema de segundo orden

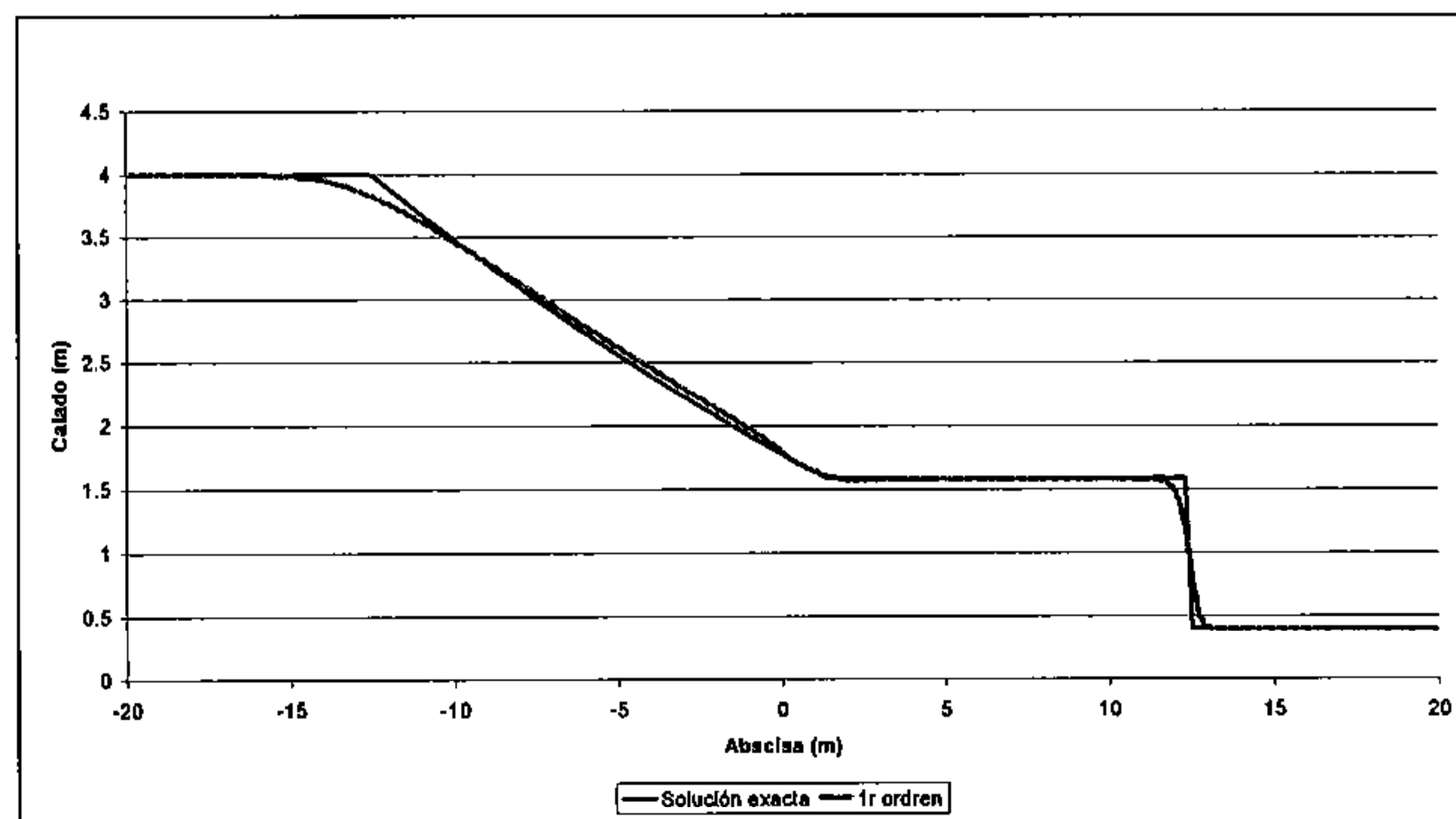


Figura 4.5. Disipación producida por un esquema de primer orden.

4.5.7. Variación Total Decreciente y compatibilidad de datos

Una condición menos estricta que la monotonidad es el concepto de *Variación Total Decreciente* (*Total Variation Diminishing o TVD*) introducido por Harten (1983), que asegura la convergencia de la solución numérica a la solución débil de la ley de conservación (4.1), aunque, al contrario que la monotonidad, no asegura el cumplimiento de la condición de entropía.

Se define la *Variación Total* de una función continua $u(x)$ como

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(x)| dx \quad (4.63)$$

mientras que para una solución discreta $\{u_i^n\}$, será

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (4.64)$$

y se dice que un esquema numérico para la resolución de la ecuación escalar homogénea escalar (4.1) es *TVD* (*Variación Total Decreciente*) si

$$TV(u^n) \leq TV(u^{n+1}) \quad (4.65)$$

Entre las propiedades de monotonidad, preservación de la monotonidad y, variación total decreciente existe la siguiente relación: Todos los esquemas monótonos (4.54)(4.55) son esquemas TVD, mientras que a su vez todos los esquemas TVD preservan la monotonidad. Para esquemas lineales de la forma (4.59) la condición de preservación de la monotonidad equivale a la de monotonidad, por lo que cualquier esquema TVD lineal será sólo de primer orden de precisión. Sin embargo, lo dicho no es cierto para esquemas no lineales, que pueden ser TVD y tener segundo orden de precisión, y de aquí su importancia en la generación de esquemas de alta resolución.

Una condición para que un esquema numérico para la resolución de la ecuación escalar (4.1) sea TVD fue dada por Harten (1983) en el teorema conocido por su nombre.

Teorema de Harten: si se considera un esquema escrito de la siguiente forma (que es otra manera de escribir la expresión de un esquema conservativo (4.6)):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2} + D_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2} \quad (4.66)$$

con $\Delta u_{i-1/2} = u_i^n - u_{i-1}^n$, $\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1}^n - u_i^n$ y $C_{i-1/2}$, $D_{i+1/2}$ funciones de $\{u_i^n\}$, el esquema es TVD si se cumple

$$C_{i+1/2} \geq 0 \quad ; \quad D_{i+1/2} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq C_{i+1/2} + D_{i+1/2} \leq 1 \quad (4.67)$$

El teorema de Harten permitirá esquivar en cierta manera los resultados del teorema de Godunov abriendo un posible camino a los esquemas de alta resolución a través de esquemas no lineales, ya que los coeficientes $C_{i-1/2}$ y $D_{i+1/2}$ dependen de los datos. Se recuerda que estos conceptos teóricos son ciertos, como se ha dicho, para la ecuación escalar homogénea.

En la construcción de esquemas TVD en lugar de aplicar directamente el teorema de Harten se utiliza otra condición algo más restrictiva pero de más fácil aplicación que es la *condición de compatibilidad de datos*: se dice que un esquema para la resolución de la ecuación escalar homogénea (4.1) es *compatible con los datos* $\{u_i^n\}$ si la solución $\{u_i^{n+1}\}$ obtenida con dicho esquema, en cada punto i está comprendida entre los valores u_{i-s}^n y u_i^n siendo s el signo de $\lambda = \partial f / \partial u$. u_{i-s}^n es el valor de la solución en el instante n en el punto upwind del punto i .

La anterior definición se puede describir como que se cumple:

$$\min(u_{i-s}^n, u_i^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u_{i-s}^n, u_i^n) \quad (4.68)$$

Observando la definición de esquema TVD dada al principio del apartado, resulta que si un esquema es compatible con los datos, por la condición anterior el esquema es TVD.

Por otro lado, puede verse que esta condición de compatibilidad de datos es equivalente a requerir:

$$0 \leq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_{i-s}^n - u_i^n} \leq 1 \quad (4.69)$$

Esta última expresión es la que se utilizará luego para construir esquemas TVD.

5. Esquemas numéricos para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

Se describen los esquemas numéricos utilizados en este trabajo para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión.

Dependiendo del problema que se desee resolver, alguna de las formas de escribir las ecuaciones vistas en el capítulo segundo es más conveniente que otra, ya que permite utilizar discretizaciones del dominio y esquemas numéricos más apropiados a cada problema. Para la obtención de soluciones discontinuas, se puede aprovechar la similitud de las ecuaciones de Saint Venant con las ecuaciones de Euler de dinámica de gases, para las cuales se ha realizado un gran esfuerzo de obtención de este tipo de soluciones, y adaptar las técnicas desarrolladas para ellas, y en especial toda la teoría de los *Riemann solvers*, para obtener la solución de las ecuaciones del flujo en lámina libre. Por otro lado es necesario aceptar que existe una teoría exacta y bien demostrada para el caso unidimensional, lineal y homogéneo, pero tan sólo aproximada para las ecuaciones no lineales y con término independiente, como son las ecuaciones completas del flujo en lámina libre en una o dos dimensiones para una topografía cualquiera.

Las observaciones sobre las propiedades de las ecuaciones y los distintos esquemas numéricos, junto con la discretización en volúmenes finitos, conducen a la obtención de *esquemas de alta resolución* para ecuaciones diferenciales, entendiendo como tales los que cumplen las tres condiciones enunciadas en el Capítulo 2. , apartado 1.2.2.2, según la propuesta de Harten y Hymann (1983). Se verá en detalle lo que implican las tres condiciones anteriores y todo el aparato matemático necesario para conseguir esquemas que las satisfagan.

Los esquemas conservativos de primer orden pueden servir de punto de partida para el desarrollo de esquemas de segundo orden y de esquemas TVD. Entre los distintos esquemas conservativos *upwind*, (esquemas que tienen en cuenta como se propaga la información), destaca el método de Godunov, que es, o se puede ver como, la base de toda la familia de esquemas numéricos conocidos en la bibliografía como métodos *flux difference splitting* (separación de la diferencia de flujo), el tipo de esquemas utilizados en este trabajo.

En este capítulo se trata la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión. En general se tratará con la forma conservativa de las ecuaciones por ser la utilizada en los esquemas numéricos empleados en este trabajo.

Es de destacar que las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión tienen la particularidad que el vector de flujo F no depende solamente de las variables U , sino que tiene una dependencia espacial $F(U, x)$ a través del término de presión I_1 . La variación de I_1 depende de la variación en el área pero también de la irregularidad geométrica del cauce. En ninguna de las referencias conocidas que tratan con geometrías irregulares esto se tiene en cuenta.

Otro aspecto que se ha cuidado en los desarrollos que se presentan en este capítulo es la capacidad de los esquemas numéricos de reproducir correctamente el régimen permanente. Los esquemas numéricos presentados convergen al régimen permanente correcto (es decir, para flujo en régimen permanente gradualmente variado, la solución que se obtiene con los esquemas numéricos que se desarrollan respeta la conservación de la energía).

5.1. Esquema conservativo de primer orden: Método de Godunov en una dimensión

Para un sistema de ecuaciones hiperbólico del tipo:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (5.1)$$

el método de Godunov es un esquema conservativo que utiliza la discretización en volúmenes finitos y que, por lo tanto, se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) \quad (5.2)$$

La particularidad del método de Godunov es que el flujo numérico $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$ entre dos celdas o volúmenes finitos i e $i+1$, se obtiene de la solución del problema de Riemann local (en cada intercelda o contorno de cada elemento de volumen) definido por el sistema (5.1) y las condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^n & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (5.3)$$

o sea:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, [t^n, t^{n+1}])) \quad (5.4)$$

donde $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, [t^n, t^{n+1}])$ es la solución del problema de Riemann local mencionado ((5.1)(5.3)) en $x_{i+1/2}$ en $[t^n, t^{n+1}]$. En este intervalo de tiempo, si se cumple la condición de Courant, la solución del problema de Riemann es constante sobre el eje de tiempos, como se ha visto en el Capítulo 3. . En el caso unidimensional, para el problema local el subíndice L se refiere, como en el Capítulo 3. , al estado inicial de la izquierda con y el subíndice R al estado de la derecha ($\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_i^n$ y $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{i+1}^n$), mientras que 0 indicará la abscisa $x_{i+1/2}$ por ser el origen de este problema de Riemann local.

Para aplicar el método de Godunov es necesario en primer lugar resolver un problema de Riemann, a continuación encontrar la solución en $x_{i+1/2}$ y finalmente evaluar el flujo \mathbf{F} con dicha solución. En la resolución del problema de Riemann y la evaluación de la solución es donde aparecen las distintas variantes que dan lugar a esquemas numéricos distintos.

Para una ecuación escalar homogénea del tipo

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (5.5)$$

con el método de Godunov coincide con el esquema *upwind* de primer orden presentado en el capítulo anterior.

Se ha visto en el Capítulo 3. que, para un sistema de ecuaciones no lineal e hiperbólico como son las ecuaciones de Saint Venant, el problema de Riemann tiene una estructura compleja y encontrar su solución es costoso. Por ello varios autores desarrollaron métodos numéricos para encontrar una solución aproximada del problema de Riemann, lo que se conoce como *approximate Riemann Solvers*. Estos *Riemann Solvers* utilizan el hecho que para aplicar el método de Godunov no necesitamos saber el detalle de toda la solución del problema de Riemann, sino sólo el valor de la solución en el contorno entre dos volúmenes finitos.

5.1.1. Approximate Riemann Solver de Roe en una dimensión

El *Riemann Solver* de Roe se desarrolló en principio para las ecuaciones de Euler (Roe, 1981). Desde entonces se ha aplicado a una gran variedad de problemas físicos, entre ellos las ecuaciones de Saint Venant. A menudo en la literatura se denomina al método de Godunov con el *Riemann Solver* de Roe simplemente como *esquema de Roe*.

El sistema de ecuaciones no lineales (5.1) también se puede escribir, como se ha visto en el capítulo 3. como:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0 \quad (5.6)$$

donde \mathbf{A} es el jacobiano y viene dado por (2.68). La base del *Riemann solver* de Roe consiste en aproximar en cada incremento de tiempo este sistema de ecuaciones por el sistema de ecuaciones lineal a coeficientes constantes

$$\mathbf{U}_t + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_x = 0 \quad (5.7)$$

en el cual la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$, es una aproximación a \mathbf{A} y se encuentra con los datos del problema de Riemann local \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R , es decir $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$, y debe cumplir tres propiedades que son:

1. El nuevo sistema (5.7) debe preservar el carácter hiperbólico del sistema inicial, por lo que $\tilde{\mathbf{A}}$ debe tener valores propios $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ reales con sus vectores propios correspondientes $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ linealmente independientes.
2. El sistema debe ser consistente con el sistema original, lo que quiere decir que debe cumplirse $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$.
3. La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ debe asegurar la propiedad (algunas veces llamada *conservatividad*):

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (5.8)$$

Una vez obtenida la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ se puede aplicar directamente lo visto en 2.5.7.1 para el problema de Riemann en sistemas hiperbólicos unidimensionales a coeficientes constantes, para el cual la solución está formada por estados constantes separados por las distintas ondas. Si se denota con $\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(x, t)$ a la solución de este problema de Riemann aproximado en $x_{i+1/2}$ (para distinguirlo de la solución del problema de Riemann exacto $\mathbf{U}_{i+1/2}(x, t)$), se tiene, con la notación de 2.5.7.1:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \mathbf{U}_i^n + \sum_{\tilde{\lambda}_j < 0}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.9)$$

o

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \mathbf{U}_{i+1}^n - \sum_{\tilde{\lambda}_j > 0}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.10)$$

donde los $\tilde{\alpha}_j$ son unos coeficientes constantes (llamados *fuerzas* de cada onda), y los valores $\tilde{\lambda}_j$ son los valores propios de $\tilde{\mathbf{A}}$. Las dos expresiones anteriores se pueden combinar para tener:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.11)$$

Para la obtención del flujo numérico ahora sea provechan los resultados del Capítulo 2, apartado 2.5.7.2. Para ello la ecuación (2.211) se reescribe como(lo mismo se podría hacer con la ecuación (2.212)):

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{U}_L - \frac{1}{T} \int_{T_S^L}^0 \mathbf{U}_{i+1/2}(x, T) dx \quad (5.12)$$

Por otro lado, el sistema aproximado (5.7) se puede entender como un sistema de leyes de conservación $U_x + \bar{F}_x(U) = 0$ con $\bar{F}(U) = \tilde{A}U$, que definirá otro problema de Riemann (que llamaremos problema de Riemann aproximado) y al que también se le puede aplicar el resultado anterior:

$$\bar{F}_0 = \bar{F}_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{S_L} \bar{U}_{i+1/2}(x, T) dx \quad (5.13)$$

La expresión (5.12) se refiere al problema de Riemann exacto, mientras que (5.13) se refiere al problema de Riemann aproximado. El *Riemann solver* de Roe considera que la solución exacta $U_{i+1/2}(x, T)$ se puede aproximar por $\bar{U}_{i+1/2}(x, T)$. Así, suponiendo pues que los integrandos en estas dos últimas expresiones son iguales, sustituyendo una en la otra se obtiene:

$$F_0 = \bar{F}_0 + F_L + \bar{F}_L \quad (5.14)$$

Volviendo a coordenadas globales:

$$F_{i+1/2}^* = \bar{F}(\bar{U}_{i+1/2}(0)) + F(U_i^n) + \bar{F}(U_i^n) \quad (5.15)$$

y sustituyendo aquí (5.9) y la definición del flujo $\bar{F}(U) = \tilde{A}U$, queda finalmente:

$$F_{i+1/2}^* = F(U_i^n) + \sum_{\tilde{\lambda}_j \leq 0} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{e}_j \quad (5.16)$$

El mismo desarrollo para el lado derecho del problema de Riemann a partir de la ecuación (2.212) daría:

$$F_{i+1/2}^* = F(U_{i+1}^n) - \sum_{\tilde{\lambda}_j \geq 0} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{e}_j \quad (5.17)$$

y combinando estas dos últimas expresiones se obtiene el flujo numérico para el método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe (o esquema de Roe):

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{e}_j \quad (5.18)$$

Por analogía con lo realizado por Roe para las ecuaciones de Euler (Roe, 1981), en el caso de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales se puede encontrar la matriz \tilde{A} , o $\tilde{A}_{i+1/2}$ para el problema de Riemann centrado en $x_{i+1/2}$, obteniendo primero un estado promedio $\tilde{U}_{i+1/2}$ y calculando $\tilde{A}_{i+1/2} = A(\tilde{U}_{i+1/2})$. De la misma manera que A tiene unos valores y vectores propios que dependen de U (ecuación (2.71), los valores y vectores propios de $\tilde{A}_{i+1/2}$ dependerán de $\tilde{U}_{i+1/2}$ según:

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c} \quad ; \quad \tilde{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm \tilde{c} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Como debe cumplirse la propiedad 1, un salto en las variables a través de la intercelda $i+1/2$ se podrá escribir como:

$$\Delta U_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j \quad (5.20)$$

siendo $\Delta U_{i+1/2} = U_{i+1} - U_i$. Desarrollando (5.20) y teniendo en cuenta (2.52) se obtienen los coeficientes $\tilde{\alpha}_j$:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= \frac{(\tilde{c} - \tilde{u})\Delta A + \Delta Q}{2\tilde{c}} \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{(\tilde{c} + \tilde{u})\Delta A - \Delta Q}{2\tilde{c}}\end{aligned}\quad (5.21)$$

La propiedad 3 de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$, ecuación (5.8) se puede describir con la notación utilizada:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} (\Delta \mathbf{U}_{i+1/2}) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.22)$$

sustituyendo en ella (5.20) y utilizando que $\partial I_1 / \partial x = I_2 + A \partial h / \partial x$, se obtiene el valor de la variable promedio \tilde{u} para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$\tilde{u} = \frac{\frac{Q_{i+1}}{\sqrt{A_{i+1}}} + \frac{Q_i}{\sqrt{A_i}}}{(\sqrt{A_i} + \sqrt{A_{i+1}})} \quad (5.23)$$

En cuanto a \tilde{c} , una posible expresión es:

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}} \quad (5.24)$$

De esta manera quedan determinadas todas las variables en (5.18) para la aplicación del método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, sin haber considerado aun el término independiente. \tilde{A} y \tilde{B} son una aproximación del área y ancho superficial en el contorno, para los cuales se puede tomar en principio la media aritmética de los valores en los elementos contiguos, aunque en el apartado 5.5. se verá otra expresión más adecuada para asegurar la correcta modelación del régimen permanente.

Con lo visto hasta el momento, el *Riemann solver* de Roe aproxima el problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant en cada intercelda por otro problema de Riemann asociado a un sistema de ecuaciones hiperbólico lineal (5.7). Como se ha visto para este último las ondas que se producen son líneas en el plano (x, t) que separan estados constantes. En cambio, para el sistema original las ondas pueden ser ondas de choque u ondas de depresión y, en este último caso, la onda no se limita a una línea en el espacio (x, t) sino que se esparce en un abanico. En el caso que dicho abanico comprenda el eje de tiempos (como ocurre por ejemplo en la rotura de presa) el signo de $\tilde{\lambda}$, y por tanto el signo de la pendiente de las líneas características, cambia dentro del abanico. Lo que en cierta manera hace el *Riemann solver* de Roe es condensar todo el abanico a una única línea (Figura 5.1) y tener, para la onda correspondiente, una onda de choque que no se corresponde con la realidad y que viola la condición de entropía.

Cuando se produce esta situación (onda de depresión transcítica j), se cumple $\lambda(\mathbf{U}_j^L) < \tilde{\lambda}_j$ y $\tilde{\lambda}_j < \lambda(\mathbf{U}_j^R)$, siendo \mathbf{U}_j^L y \mathbf{U}_j^R los estados situados respectivamente a izquierda y derecha de la onda. En ese caso se suele utilizar la corrección de entropía de Harten y Hyman (1982) que resulta de aproximar la zona comprendida dentro del abanico de la onda de depresión por un estado constante $\bar{\mathbf{U}}_j$, aplicar la forma integral del sistema de ecuaciones en un volumen que comprende la onda, y buscar el valor que debe tomar $\tilde{\lambda}^j$ para calcular dicho estado constante con las expresiones (5.9) o (5.10). En definitiva se trata de aproximar la solución en la intercelda $i+1/2$ de una manera más precisa que con el *Riemann solver* de Roe (que aproxima dicha solución por el estado constante comprendido entre las dos ondas, sin tener en cuenta que en algún caso el contorno puede quedar comprendida en una de las ondas).

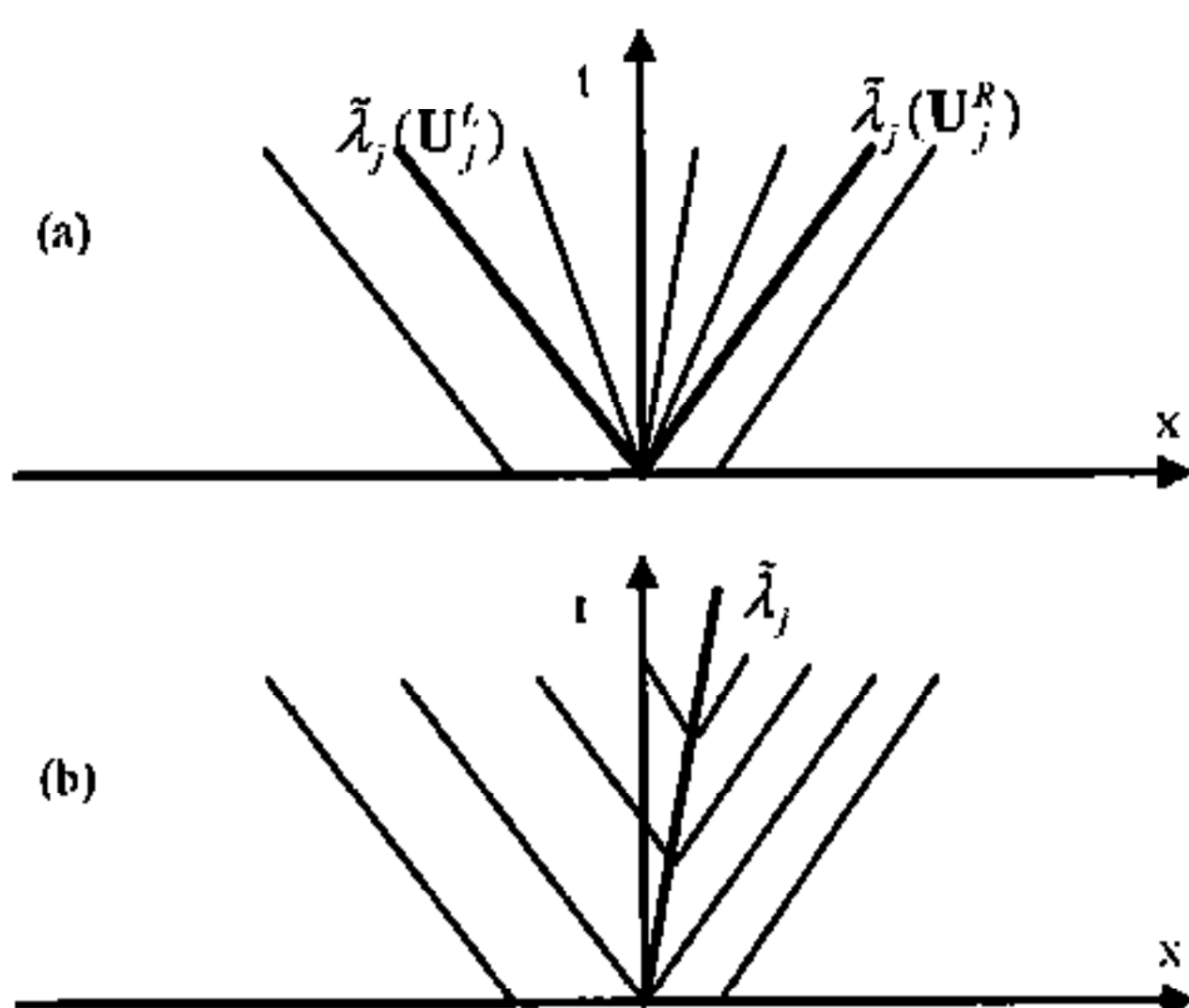


Figura 5.1. Esquema de una onda de depresión transcritical (a) y la aproximación de la misma, en forma de onda de onda de choque de depresión no admisible físicamente, del Riemann solver de Roe (b)

La corrección de entropía de Harten y Hyman consiste en reemplazar $|\tilde{\lambda}_j|$ en (5.18) por φ_j siendo:

$$\varphi_j = \begin{cases} |\tilde{\lambda}_j| & \text{si } |\tilde{\lambda}_j| \geq \varepsilon_j \\ \varepsilon_j & \text{si } |\tilde{\lambda}_j| < \varepsilon_j \end{cases} \quad (5.25)$$

y

$$\varepsilon_{j,i+1/2} = \max \left[0, (\tilde{\lambda}_{j,i+1/2} - \lambda_{j,i}), (\lambda_{j,i+1} - \tilde{\lambda}_{j,i+1/2}) \right] \quad (5.26)$$

Finalmente el método de Godunov con el Riemann solver de Roe y la corrección de entropía de Harten y Hyman se puede escribir:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.27)$$

5.1.1.1 Término independiente en el esquema Godunov+Roe 1D

En el flujo de agua en lámina libre el efecto de la fricción y la pendiente de fondo pueden ser determinantes. Este efecto se plasma en el término independiente de las ecuaciones, por lo que se debe asegurar un correcto tratamiento del mismo, y en concreto, utilizar una discretización en el esquema numérico que esté de acuerdo con el tratamiento del vector de flujo. Esto que parece obvio no es inmediato, porque el término independiente de las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa no se puede poner fácilmente de forma discreta como una diferencia tal como se hace con el vector de flujo.

Ello ha llevado a que tradicionalmente la consideración del término independiente se haya hecho para cada elemento de volumen según la expresión (3.11), es decir, considerando el valor medio del mismo en el centro del elemento. Sin embargo, esta aproximación centrada no consigue un correcto balance entre el término independiente y el vector de flujo, por lo que lleva a errores importantes. Esto se puede ver fácilmente intentando modelar una situación de agua parada sobre fondo irregular. En un elemento con fondo horizontal contiguo a otro con pendiente, la pendiente de fondo según (3.11) sería nula, mientras que los flujos numéricos en los contornos del elemento serían distintos (por haber niveles de agua distintos a ambos lados) y el esquema numérico produciría una solución no estacionaria. Con este tratamiento del término independiente los resultados que se obtienen para un problema estacionario son variables en el tiempo, lo que es evidentemente incorrecto. Un requisito indispensable es entonces que en situaciones estacionarias el tratamiento del término independiente tenga un correcto balance con la discretización del vector de flujo, de manera que el efecto de ambos se anule y se obtenga una solución también estacionaria.

Conviene destacar (Hubbard et al 2000, Brufau, 2000) que la parte del término independiente correspondiente a la pendiente de fondo tiene un claro equilibrio con el vector de flujo, no ocurriendo lo mismo con los términos de fricción. Así, para el tratamiento del término independiente es conveniente la descomposición del mismo separando los términos de fricción, que admiten un tratamiento centrado, aunque pueden crear problemas de estabilidad en caso de ser importantes, del resto. De ahora en adelante se considerará:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (5.28)$$

con

$$\mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gAS_0 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gAS_f \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Los primeros trabajos para equilibrar el término independiente con el vector de flujo se deben a Glaister (1988) para canales horizontales con fondo horizontal y ancho variable, seguidos bastante más tarde por Vázquez-Cendón (1999) en esquemas de primer orden en una y dos dimensiones y geometrías irregulares, planteándose la extensión a segundo orden de precisión y esquemas TVD por Hubbard y García-Navarro (2000).

En volúmenes finitos, el esquema numérico para la resolución de un sistema de ecuaciones con término independiente

$$\mathbf{U}_i + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{H} \quad (5.31)$$

se concreta en:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^* \quad (5.32)$$

donde las expresiones del flujo numérico son las vistas en 5.1. . \mathbf{H}_i^* es la expresión numérica del término independiente \mathbf{H} , y representa el término independiente integrado en todo el volumen finito.

En nuestro caso, con (5.28), se tiene:

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{*1} + \mathbf{H}_i^{*2} \quad (5.33)$$

Para \mathbf{H}^2 , que incluye los términos de fricción, se puede considerar una discretización centrada simple:

$$\mathbf{H}_i^{*2} = \Delta x \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (5.34)$$

La parte correspondiente a \mathbf{H}^1 deberá tratarse de acuerdo con el esquema numérico utilizado según lo que se expone a continuación

Para \mathbf{H}^1 y para que se establezca un correcto balance entre el término independiente y la parte homogénea de la ecuación, la discretización deberá de hacerse de la misma manera que para el vector de flujo, por lo que, a la vista de (5.2), parece lógico considerar también dos contribuciones al término independiente, una en cada contorno del elemento de volumen, o sea:

$$\mathbf{H}_i^{*1} = \mathbf{H}_{i,j-1/2}^{*1} + \mathbf{H}_{i,j+1/2}^{*1} \quad (5.35)$$

siendo

$$\mathbf{H}_{i,i-1/2}^* = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathbf{H}^1 dx \quad ; \quad \mathbf{H}_{i,i+1/2}^* = \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{H}^1 dx \quad (5.36)$$

El esquema de Roe descompone la diferencia del vector de flujo a través de un contorno en función de los vectores propios del jacobiano del sistema (5.22). Una descomposición análoga del término independiente en función de los mismos vectores propios consiste en aproximar el término independiente en un contorno, o más concretamente la integral del término independiente en el volumen comprendido entre los centros de dos volúmenes finitos contiguos según:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{H}^1 dx = \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.37)$$

donde $\tilde{\beta}_j$ son unos coeficientes. De las dos últimas expresiones se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i,i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\tilde{\lambda}_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2} \\ \mathbf{H}_{i,i+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\tilde{\lambda}_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

y con esta última, junto con (5.32), (5.35), (5.34) y (5.35), se obtiene la expresión del método de Godunov y el Riemann solver de Roe para un sistema de ecuaciones con término independiente:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2}^* - \mathbf{F}_{i+1/2}^* + \mathbf{H}_{i,i-1/2}^* + \mathbf{H}_{i,i+1/2}^*) + \Delta t \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (5.39)$$

donde \mathbf{F}^* responde a (5.18), \mathbf{H}^* a (5.38), y \mathbf{H}^2 a (5.30).

Para obtener los coeficientes $\tilde{\beta}_j$, considerando (5.37) junto con (5.29) se tiene:

$$\tilde{\beta}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \end{pmatrix} + \tilde{\beta}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ gAS_0 + gI_2 \end{pmatrix} dx \quad (5.40)$$

si $\tilde{S}_0 \Delta x = -\Delta z$ y $\partial I_1 / \partial x = I_2 + A \partial h / \partial x$ resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= -\frac{1}{2\tilde{c}} g\tilde{A}(\Delta z + \Delta h) + \frac{1}{2\tilde{c}} g\Delta I_1 \\ \tilde{\beta}_2 &= -\tilde{\beta}_1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.1.2. Dependencia espacial del vector de flujo en geometrías irregulares.

Las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión (3.20) tienen la particularidad que el vector de flujo \mathbf{F} no depende solamente de las variables $\mathbf{U} = (A, Q)$, sino que tiene una dependencia espacial $\mathbf{F}(\mathbf{U}, x)$ a través del término de presión I_1 . Esto modifica lo visto hasta ahora en este subapartado 5.1., concretamente la expresión (5.8) y lo que de ella se deriva. La ecuación (5.8) se verifica cuando

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (5.42)$$

mientras en una geometría irregular se tiene:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (5.43)$$

con

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{\partial I_1}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

I_1 representa la fuerza producida por la distribución de presiones en una sección del río y depende de \mathbf{A} , a través de h , pero también de x a través de la dependencia espacial de b . Una primera aproximación a sistemas de ecuaciones con dependencia espacial del vector de flujo se encuentra en Hubbard y García-Navarro (2000) para canales rectangulares.

De esta manera lo presentado en el subapartado anterior sería válido para canales prismáticos, pero no para geometrías irregulares. Para éstas la variación de I_1 depende de la variación en el área pero también de la irregularidad geométrica del cauce. Dos secciones de un río pueden tener la misma área pero distinto valor de I_1 . Para canal prismático, de (5.8), teniendo en cuenta que $\tilde{\mathbf{A}}$ es una aproximación a $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$, se desprende $g\Delta(I_1) = \tilde{c}\Delta A$. En geometrías irregulares el incremento que sufre el valor de I_1 de un elemento de volumen a otro se debe a la variación que sufre el valor del área a través de dicho contorno, pero también a la variación geométrica del cauce:

$$g\Delta(I_1)_{i+1/2} = \tilde{c}^2 \Delta A_{i+1/2} + g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} \quad (5.45)$$

El término $gI_1|_{\tilde{A}}$ indica el valor de la resultante de las presiones en una sección para un valor del área igual a \tilde{A} . La ecuación anterior indica que la diferencia de la resultante de las presiones entre dos secciones transversales del río depende de la diferencia de áreas entre dos secciones pero también de la diferencia de presión en ambas secciones a igualdad de área. En un canal prismático se tendría $g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = 0$.

Con estas consideraciones, ahora la ecuación (5.22) se puede describir como:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} (\Delta \mathbf{U}_{i+1/2}) + \Delta(gI_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.46)$$

$\tilde{\gamma}_{1,2}$ son el resultado de la descomposición en base a los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_{1,2}$ de $\Delta(gI_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$:

$$g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (5.47)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\tilde{c}} g\Delta(I_1|_{\tilde{A}}) \\ \tilde{\gamma}_2 &= -\tilde{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

\tilde{A} es un valor representativo del área en el contorno entre dos volúmenes finitos.

Algunas propuestas para \tilde{c} podrían ser $\tilde{c} = \sqrt{g\tilde{A}/\tilde{B}}$ con $\tilde{A} = (A_i + A_{i+1})/2$ y $\tilde{B} = (B_i + B_{i+1})/2$, $\tilde{c} = (c_i + c_{i+1})/2$, $\tilde{c}^2 = (c_i^2 + c_{i+1}^2)/2$, $\tilde{c} = \sqrt{g\Delta I / \Delta A}$ que son una buena aproximación en canales prismáticos. Sin embargo estas expresiones no consiguen calcular correctamente el salto en las fuerzas de presión $g\Delta I_{i+1/2}$. si en (5.45) no se considera el último término de la ecuación. Por otro lado, es evidente que ninguna de las expresiones vistas reproduce correctamente la descomposición del salto de las fuerzas de presión (5.46).

Por todo lo visto, se propone la siguiente expresión para la celeridad:

$$\tilde{c}^2 = g \frac{(I_{i+1} - I_i) - (\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}}{A_{i+1} - A_i} \quad (5.49)$$

$(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$ se calcula fácilmente como la diferencia de las fuerzas de presión en $i+1$ y i :

$$(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = (I_1|_{\tilde{A}})_{i+1} - (I_1|_{\tilde{A}})_i \quad (5.50)$$

mientras $(I_1|_{\tilde{A}})_i$ son las fuerzas de presión en el volumen finito i para un valor del área \tilde{A} . Con lo visto hasta ahora, \tilde{A} podría ser cualquier valor comprendido entre A_i y A_{i+1} , aunque más adelante (apartado 5.5.) se verá que para mantener un correcto balance con el término independiente en el caso de flujo estacionario debe utilizarse la media armónica.

Es de destacar que mientras se cumpla $A_{i+1} \neq A_i$, la expresión (5.49) está correctamente definida ya que $\tilde{A} \in [A_i, A_{i+1}]$ y $\text{signo}[(I_1)_{i+1} - (I_1|_{\tilde{A}})_{i+1}] = \text{signo}[(I_1|_{\tilde{A}})_i - (I_1)_i] = \text{signo}[A_{i+1} - A_i]$. Cuando $A_{i+1} = A_i$ la variación de la fuerza de presión por variación del área es cero, la expresión (5.45) se reduce a $g\Delta I_{i+1/2} = g(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$ y cualquiera de las definiciones de la celeridad vistas es posible. En este caso, en este trabajo se ha utilizado la expresión $\tilde{c}^2 = (c_i^2 + c_{i+1}^2)/2$.

Con lo visto, un desarrollo paralelo al del subapartado 5.1.1, pero considerando la variabilidad espacial del vector de flujo, permite obtener la expresión final del método de Godunov con el Riemann solver de Roe y la corrección de entropía de Harten y Hyman para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (5.51)$$

5.2. Esquemas de segundo orden en una dimensión

Ya se ha visto rior que los esquemas de segundo orden son incompatibles con la condición de no tener oscilaciones espurias en el entorno de las discontinuidades, pero también se ha adelantado ya que los esquemas TVD o de alta resolución consiguen evitar estas oscilaciones manteniendo el segundo orden de precisión en prácticamente todo el dominio. Los esquemas de segundo orden, que se abordan en este apartado son la base para el posterior desarrollo de esquemas TVD.

De entre la multitud de esquemas de segundo orden existentes para las ecuaciones de Saint Venant se tratan aquellos que son útiles más adelante para el desarrollo de métodos TVD, y que permiten además un tratamiento adecuado del término independiente.

A partir del método de Godunov se pueden desarrollar esquemas de segundo orden en base a dos planteamientos distintos: los esquemas tipo WAF (de *Weight Averaged Flux* o flujo ponderado) y los esquemas tipo MUSCL (de *Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*) también llamados esquemas de extrapolación de variables.

Los esquemas de segundo orden se presentan aquí por ser la base de los esquemas de alta resolución presentados en 5.3. , aunque carecen de utilidad práctica por si solos debido a las oscilaciones espurias que conllevan en caso de existir discontinuidades en el flujo. Por ello no se han utilizado en las simulaciones, y solamente se presenta el esquema para la parte homogénea de las ecuaciones.

5.2.1. Esquema WAF en una dimensión

En el esquema WAF, o de flujo ponderado, el flujo numérico es un promedio integral del flujo en $[x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{t^{n+1} - t^n} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(\bar{U}(x, t)) dx dt \quad (5.52)$$

donde $\bar{U}(x, t)$ es la solución del problema de Riemann con datos iniciales U_i, U_{i+1} , que se denota por $U_{i+1/2}$. Si además en (5.52) se aproxima la integral en el tiempo por el punto medio resulta:

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(U(x, \frac{1}{2} \Delta t)) dx \quad (5.53)$$

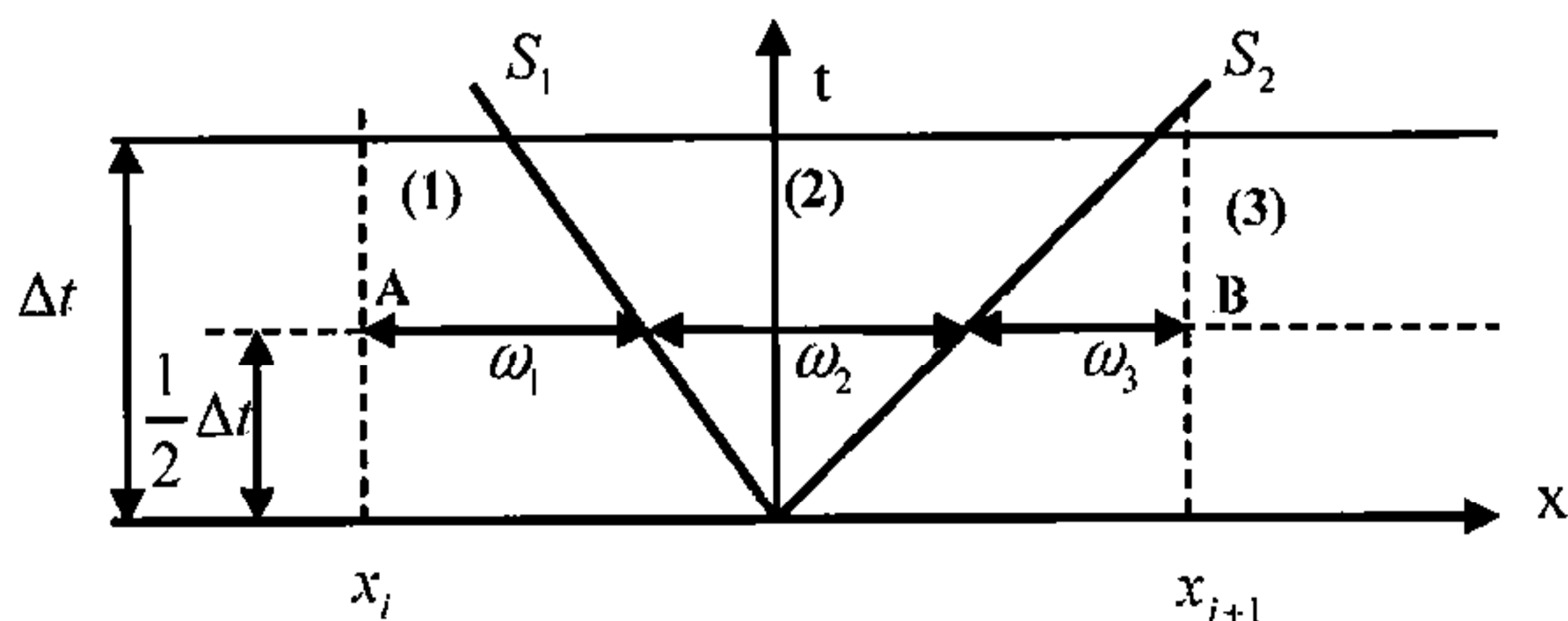


Figura 5.2 Ponderación del flujo en el esquema WAF

Para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, las dos ondas del problema de Riemann tienen velocidades de propagación S_1 y S_2 . La integral de (5.53) (desde A hasta B en la Figura 5.2) se puede descomponer como la suma de tres integrales para cada una de los tres estados (1), (2) y (3). De esta manera de (5.53) resulta:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \omega_1 \mathbf{F}^{(1)} + \omega_2 \mathbf{F}^{(2)} + \omega_3 \mathbf{F}^{(3)} \quad (5.54)$$

donde ω_1 , ω_2 y ω_3 son los pesos de ponderación del flujo y que valen:

$$\omega_j = \frac{1}{2}(\nu_j - \nu_{j-1}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nu_0 = -1 \\ \nu_j = \frac{\Delta t S_j}{\Delta x} \quad j = 1, 2 \\ \nu_3 = 1 \end{cases} \quad (5.55)$$

teniendo en cuenta que $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}^{(3)} = \mathbf{F}_{i+1}$, y $\Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^j = \mathbf{F}_{i+1/2}^{(j+1)} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{(j)}$ queda finalmente la expresión del flujo numérico para el esquema WAF:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \nu_j \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^j \quad (5.56)$$

Naturalmente esta última expresión no queda completa hasta conocer la expresión de $\mathbf{F}^{(2)}$, para lo cual se necesita conocer la solución del problema de Riemann, o una aproximación a ella mediante un *Riemann solver*. El esquema WAF puede tener distintas variedades según como se aproxime esta solución.

Para la ecuación escalar homogénea (4.1) el esquema WAF es idéntico al esquema de Lax-Wendroff (3.50).

Si se sustituye en la expresión general del esquema WAF (5.56), la ecuación (5.46), obtenida con el *Riemann solver* de Roe se obtiene:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \nu_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \nu_j \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (5.57)$$

que sería como una extensión a sistemas de ecuaciones del esquema de Lax-Wendroff, y que no es recomendable utilizar en presencia de discontinuidades o fuertes gradientes por los problemas de oscilaciones espurias asociados a cualquier esquema de segundo orden. En la expresión anterior $\nu_j = \tilde{\lambda}_j \Delta t / \Delta x$. Esta última expresión también se puede poner como un flujo numérico de primer orden más unas contribuciones de segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

y añadiéndole la corrección de entropía para evitar discontinuidades no físicas en el caso de tener una onda transcrítica, finalmente resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \phi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \phi_j (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

5.3. Esquemas de alta resolución en una dimensión (Métodos de segundo orden y variación total decreciente)

En el capítulo anterior se han descrito los problemas de oscilaciones espurias asociados a los esquemas de segundo orden en presencia de discontinuidades o gradientes importantes (Teorema de Godunov). También se han adelantado las propiedades que debe tener un esquema numérico para que no se produzcan estas oscilaciones y, en especial, para que el esquema sea TVD (Teorema de Harten) en el caso de la ecuación escalar homogénea (4.1).

En este apartado se muestra como se concreta todo esto para los esquemas vistos en el apartado anterior, primero para la ecuación escalar homogénea y después para sistemas hiperbólicos no lineales. Mientras que en el caso escalar la variación total decreciente se consigue de manera rigurosa, esta generalización a sistemas no lineales no es rigurosa pero funciona bien en la práctica, por lo que se puede considerar como una generalización empírica.

Los esquemas TVD se pueden obtener directamente a partir de esquemas de segundo orden (por ejemplo el esquema WAF) imponiendo restricciones a los coeficientes para asegurar que se cumpla el teorema de Harten (Toro, 1997) o a partir de otra idea, quizás más intuitiva, de combinar un esquema de primer orden con otro de segundo, haciendo un promedio ponderado, y ver que pesos se le debe dar a cada esquema para asegurar que el esquema resultante sea TVD. Según esta segunda opción, el flujo numérico de un esquema TVD se escribe como:

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^{1er} + \psi_{i+1/2} (f_{i+1/2}^{2do} - f_{i+1/2}^{1er}) \quad (5.60)$$

donde $f_{i+1/2}^{1er}$ es el flujo numérico del esquema de primer orden y $f_{i+1/2}^{2do}$ el del esquema de segundo orden. Para $\psi_{i+1/2} = 1$ el esquema resultante sería precisamente el esquema de segundo orden escogido. Como en presencia de fuertes gradientes éste no cumplirá las condiciones de Harten para ser TVD, se trata de deducir una expresión para la *función de limitación del flujo* $\psi_{i+1/2}$, que regule la corrección del esquema de segundo orden para asegurar la variación total decreciente.

5.3.1. Esquema WAF TVD en una dimensión

Para la ecuación escalar homogénea (4.1) se ha visto que los esquemas de Lax-Wendroff y WAF coinciden, por lo que a veces el esquema WAF TVD se encuentra referido como esquema de Lax-Wendroff TVD. Sin embargo, para sistemas de ecuaciones no lineales como las ecuaciones de Saint Venant, el esquema de Lax-Wendroff como tal no existe mientras si lo hace el esquema WAF, por ello parece más apropiado referirse al esquema como esquema WAF TVD.

El esquema WAF TVD se puede obtener considerando como $f_{i+1/2}^{1er}$ el flujo numérico del método de Godunov, y $f_{i+1/2}^{2do}$ el flujo numérico del esquema WAF.

Para la ecuación escalar homogénea (4.1) el flujo numérico del método de Godunov se puede escribir:

$$f_{i+1/2}^{1er} = \frac{1}{2}(1+s)(\lambda u_i^n) + \frac{1}{2}(1-s)(\lambda u_{i+1}^n) \quad (5.61)$$

con $s = \text{signo}(\lambda)$ mientras que el flujo numérico del esquema WAF es:

$$f_{i+1/2}^{2do} = \frac{1}{2}(1+\nu)(\lambda u_i^n) + \frac{1}{2}(1-\nu)(\lambda u_{i+1}^n) \quad (5.62)$$

En el caso $\lambda > 0$, sustituyendo (5.61) y (5.62) en (5.60) y operando se puede llegar a escribir el esquema numérico como

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2} \quad (5.63)$$

donde:

$$C_{i-1/2} = \nu \left(1 + \left[\frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i-1/2} + \frac{1}{r_i^+} \left[\frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i+1/2} \right) \quad (5.64)$$

con

$$r_i^+ = \frac{\Delta u_{i-1/2}}{\Delta u_{i+1/2}} \quad (5.65)$$

r_i^+ se puede ver como el salto que sufre la solución en el contorno upwind del elemento de volumen respecto el salto en el otro contorno.

La expresión (5.63) tiene la forma de (3.66), por lo que ahora sólo faltará ver como debe ser ψ para que se cumplan las restricciones (3.67), es decir, para que:

$$0 \leq \nu \left(1 + \left[\frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i-1/2} + \frac{1}{r_i^+} \left[\frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i+1/2} \right) \leq 1 \quad (5.66)$$

Desarrollando la desigualdad de la izquierda (para el caso $\lambda > 0$ y por tanto $c > 0$) se obtiene

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2} \geq \left(\psi_{i-1/2} - \frac{2}{1-\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \geq 0 \\ \psi_{i+1/2} \leq \left(\psi_{i-1/2} - \frac{2}{1-\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \leq 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

mientras que la de la derecha conduce a

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2} \leq \left(\psi_{i-1/2} + \frac{2}{\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \geq 0 \\ \psi_{i+1/2} \geq \left(\psi_{i-1/2} + \frac{2}{\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \leq 0 \end{cases} \quad (5.68)$$

Se puede realizar un procedimiento análogo para el caso $\lambda < 0$ (y por lo tanto $\nu < 0$) obteniéndose entonces:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + D_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2} \quad (5.69)$$

con:

$$D_{i+1/2} = -\nu \left(1 + \left[\frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i+1/2} + \frac{1}{r_i^-} \left[\frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i-1/2} \right) \quad (5.70)$$

donde ahora

$$r_i^- = \frac{\Delta u_{i+1/2}}{\Delta u_{i-1/2}} \quad (5.71)$$

tiene el mismo significado de ser el salto de la solución en el en el contorno *upwind* del elemento de volumen respecto del salto en el otro contorno. De (3.66), (3.67) resulta:

$$0 \leq D_{i+1/2} \leq 1 \quad (5.72)$$

y desarrollando como antes la desigualdad de la izquierda:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2} \geq \left(\psi_{i+1/2} - \frac{2}{1+\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \geq 0 \\ \psi_{i-1/2} \leq \left(\psi_{i+1/2} - \frac{2}{1+\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \leq 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

mientras que de la de la derecha:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2} \leq \left(\psi_{i+1/2} + \frac{2}{-\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \geq 0 \\ \psi_{i-1/2} \geq \left(\psi_{i+1/2} + \frac{2}{-\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \leq 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

Las expresiones (5.67)(5.68) por un lado, junto con (5.73)(5.74) por el otro, son limitaciones al valor de ψ en un contorno de un elemento de volumen. Estas cuatro desigualdades se pueden escribir de forma condensada para un contorno cualquiera $i+1/2$, sustituyendo en (5.67)(5.68) ν por $|\nu|$ y en (5.73)(5.74) ν por $-|\nu|$, como:

$$\begin{cases} \frac{\psi_{i+1/2-s}}{r_{i+1/2}} - \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \leq \frac{2}{1-|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \geq 0 \\ \frac{\psi_{i+1/2-s}}{r_{i+1/2}} - \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \leq \frac{2}{1-|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (5.75)$$

$$\begin{cases} \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} - \psi_{i+1/2-s} \leq \frac{2}{|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \geq 0 \\ \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} - \psi_{i+1/2-s} \geq \frac{2}{|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (5.76)$$

$$r_{i+1/2} = \frac{\Delta u_{i+1/2-s}}{\Delta u_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1-s} - u_{i-s}}{u_{i+1} - u_i} \quad (5.77)$$

Teniendo en cuenta estos resultados es interesante hacer unas consideraciones que nos conducen a las restricciones finales que deberá cumplir $\psi(r)$:

1. $\psi(r)$ es un factor que limita la corrección de segundo orden según (5.60), por lo que no tiene sentido que tome valores negativos. De esta manera se exigirá siempre $\psi(r) \geq 0$.
2. Para tener el esquema de segundo orden en las zonas suaves de la solución (donde la variación en una intercelda es parecida a la variación en la intercelda contigua) se debe exigir $\psi(r) = 1$ para $r = 1$.
3. Un valor negativo de $r_{i+1/2}$ indica distinto sentido de propagación de la onda en cada extremo del elemento de volumen, es decir, una discontinuidad. En tal caso un esquema de segundo orden podría producir oscilaciones. Por lo tanto se tomará $\psi(r) = 0$ para $r < 0$, y las segundas desigualdades de (5.75) y (5.76) no tendrán utilidad.
4. Como la primera desigualdad de (5.75) debe ser cierta en cualquier elemento de volumen, y el valor de $\psi(r)$ en un extremo del mismo puede ser independiente del valor en el otro extremo, resulta que $\psi_{i+1/2-s} \leq 2/(1-|\nu|)$, o, en general: $\psi(r) \leq 2/(1-|\nu|)$.

5. Con un procedimiento análogo, de la segunda desigualdad de (5.76) se obtiene $\psi(r) \leq 2r/|\nu|$.
6. Finalmente, de la primera desigualdad de (5.76) se obtiene $\psi(r) \geq -2r/(1-|\nu|)$, aunque esta desigualdad, como $r \geq 0$ y $1-|\nu| \geq 0$ no aporta nada por ser más restrictiva la condición $\psi(r) \geq 0$. Igualmente de la primera desigualdad de (5.76) se obtendría $\psi(r) \geq -2/|\nu|$ que tampoco aporta nada por la misma razón.

Las restricciones de los puntos 1 a 5 han permitido a distintos autores definir distintas funciones de limitación:

Función de limitación de *Van Leer*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{2r}{1+r} & \text{si } r \geq 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

Función de limitación *Minmod*:

$$\psi(r) = \max[0, \min(r, 1)] \quad (5.79)$$

Función de limitación *Superbee*:

$$\psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \quad (5.80)$$

Función de limitación *Van Albada*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{r(1+r)}{1+r^2} & \text{si } r \geq 0 \end{cases} \quad (5.81)$$

y función de limitación *Ultrabee*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{2}{|\nu|} r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{|\nu|}{1-|\nu|} \\ \frac{2}{1-|\nu|} & \text{si } r \geq \frac{|\nu|}{1-|\nu|} \end{cases} \quad (5.82)$$

Las funciones de limitación (Figura 5.3), excepto *Ultrabee*, utilizan el hecho que la condición más restrictiva del punto 4 es $\psi(r) \leq 2$ y la más restrictiva del punto 5 $\psi(r) \leq 2r$ (por la condición de Courant $0 \leq |\nu| \leq 1$).

Como se aprecia en la Figura 5.3 todas las funciones de limitación presentadas cumplen con las restricciones de los puntos 1 a 5, excepto la *Ultrabee*, que no cumple $\psi(1) = 1$ y por lo tanto con ella nunca se reproducirá el esquema de Lax-Wendroff. Con todas las funciones se consiguen esquemas TVD que no producen oscilaciones espurias alrededor de las discontinuidades. Una comparación de los resultados con las distintas funciones se encuentra en (Toro, 1997), donde se concluye que las mejores para capturar bien las discontinuidades son la *Ultrabee* y la *Superbee*, mientras que para zonas suaves de la solución las mejores son la *Superbee* y la de *Van Leer*. Estas dos últimas son también las que producen mejores resultados cuando se tienen tanto discontinuidades como zonas con variaciones suaves, tanto para la ecuación escalar como también para sistemas no lineales, siendo las más recomendables para casos reales.

Con todo lo visto, el esquema WAF TVD para la ecuación escalar homogénea resulta ser:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|\lambda|\Delta u_{i+1/2} + \psi_{i+1/2} \frac{1}{2}|\lambda|(1-|\nu|)\Delta u_{i+1/2} \quad (5.83)$$

donde ψ es un factor que gradúa la cantidad de corrección de segundo orden del esquema. La expresión anterior se puede escribir de forma más compacta:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|\lambda|(1-\psi_{i+1/2}(1-|\nu|))\Delta u_{i+1/2} \quad (5.84)$$

Para la ecuación escalar hay una única ley de conservación y una onda, pero para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales tenemos dos leyes de conservación y dos familias de ondas. A la hora de imponer la variación total decreciente a las ecuaciones de Saint Venant, la solución del sistema completo se puede caracterizar por saltos individuales a través de cada una de las ondas, por lo que la extensión del esquema WAF, para las ecuaciones de Saint Venant, al esquema WAF TVD se puede realizar aplicando una función de limitación a cada una de las dos ondas que se producen en el problema de Riemann asociado a cada contorno.

Así, para un sistema de ecuaciones, aplicando funciones de limitación al esquema WAF con el *Riemann solver* de Roe (5.57) (que recordamos se puede ver como una extensión a sistemas no lineales del esquema de Lax-Wendroff) por analogía a lo que se ha hecho para el esquema de Lax-Wendroff en la ecuación escalar, y incluyendo ya la corrección de entropía de Harten y Hyman, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \phi_j (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde ahora $\psi_j = \psi(r_j)$.

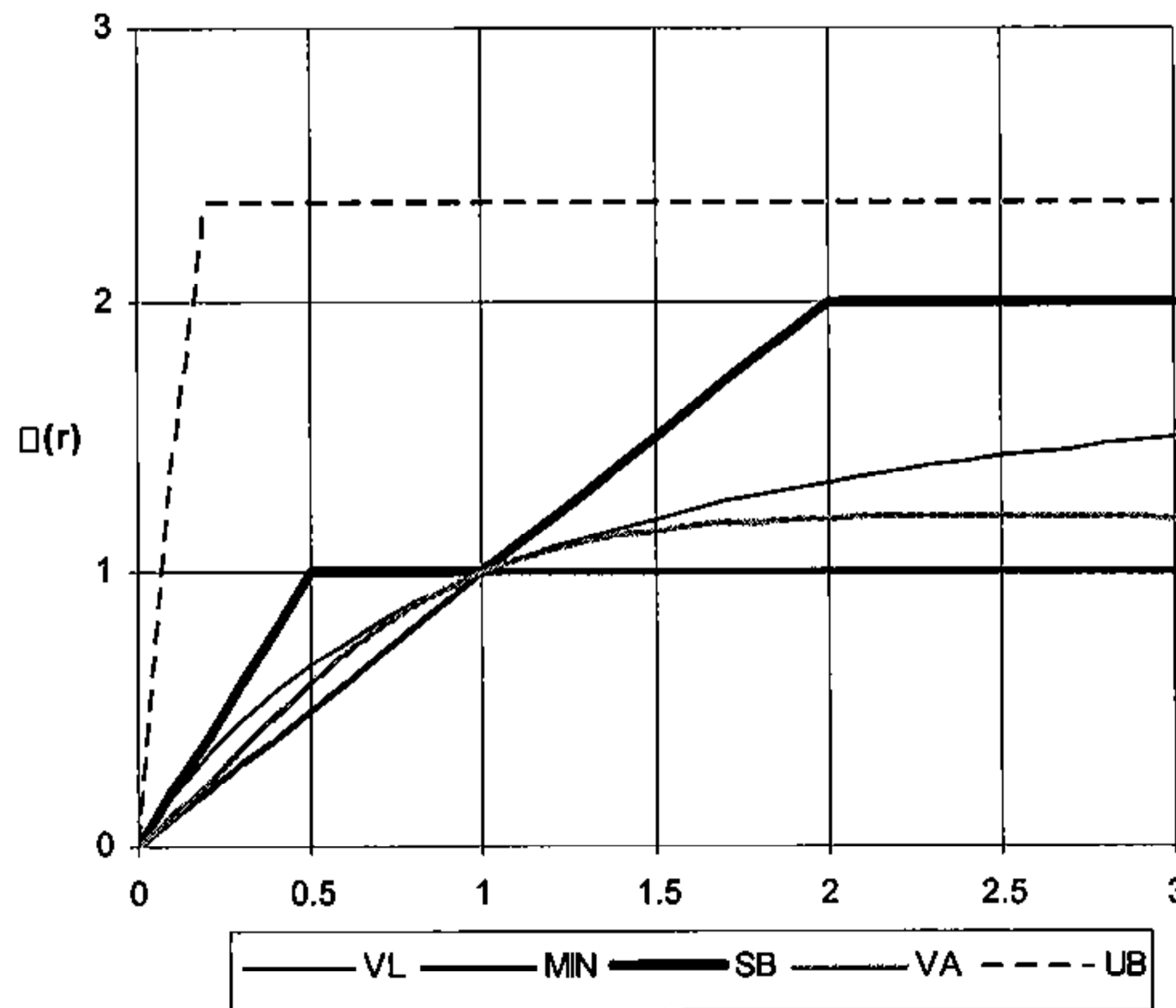


Figura 5.3. Funciones de limitación: VL: Van Leer, MIN: Minmod, SB: Superbee, VA: Van Albada, UB: Ultrabee

El mismo esquema, escrito como un esquema de primer orden más las correcciones de segundo orden, queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

r_j debe ser un indicador del salto que sufre la solución a través de una onda en el contorno upwind del elemento de volumen respecto del mismo salto en el otro contorno. A la vista de (5.20) una posible expresión para r_j sería el cociente entre las componentes que permiten escribir el salto en función de los valores propios:

$$(r_j)_{i+1/2} = \frac{(\tilde{\alpha}_j)_{i+1/2-s}}{(\tilde{\alpha}_j)_{i+1/2}} \quad (5.87)$$

Otra posibilidad con la que se obtienen buenos resultados (Alcrudo, 1992) es definir r_j como el cociente entre contribuciones de la onda j al término que hace que el esquema numérico (5.85) sea de segundo orden, ya que estas son precisamente las que provocan las oscilaciones espurias:

$$(r_j)_{i+1/2} = \frac{(\tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|))_{i+1/2-s}}{(\tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|))_{i+1/2}} \quad (5.88)$$

5.3.1.1 Término independiente en el esquema WAF TVD 1D

Las ecuaciones (5.85) y (5.86) son la expresión del flujo numérico del esquema WAF TVD en una dimensión que, como se ha visto, se puede entender como el esquema de primer orden (5.18) más unas correcciones de segundo orden. Naturalmente, para conseguir un balance correcto entre la discretización del vector de flujo y la del término independiente, estas mismas correcciones deberán extenderse a la discretización de primer orden de este último (5.38) (5.35).

La inclusión de las correcciones de segundo orden en (5.38) se puede hacer de la misma manera que se ha hecho en (5.18) para obtener (5.85). Así, de la observación de estas tres últimas expresiones se deduce la expresión de la parte del término independiente correspondiente a \mathbf{H}' discretizado de acuerdo con el esquema WAF TVD:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i,i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2} \\ \mathbf{H}_{i,i+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

5.4. Condiciones de contorno en una dimensión

En la resolución de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, con cualquiera de los esquemas en volúmenes finitos, para encontrar la solución en un elemento en un instante de tiempo es necesario conocer el valor de la solución en el mismo elemento y en los contiguos en un instante anterior, con el fin de evaluar el flujo numérico a través de cada contorno del elemento. Naturalmente, en los elementos situados en los extremos aguas abajo y aguas arriba del tramo de estudio, no se conoce a priori el valor de la solución al otro lado del contorno, por lo que habrá que imponerlos como condición.

En la resolución de un sistema hiperbólico, como son las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa, el número de condiciones de contorno que se pueden imponer es igual al número de características entrantes en el contorno, tal como se desprende de la teoría de características presentada en el apartado 2.4.2, mientras para aplicar cualquiera de los esquemas vistos es necesario conocer el valor que toman todas las variables dependientes (A y Q) en cada contorno. Así, el número de variables que se deben imponer depende del régimen hidráulico (lento o rápido) y de si el contorno se trata de una entrada o una salida. El resto de variables hay que calcularlas, y para ello se utiliza precisamente la teoría de las características. Las ecuaciones necesarias se pueden obtener particularizando la ecuación (2.110) sobre las características salientes.

Si se denota por P el punto en el contorno sobre el cual se requiere conocer el valor de las variables dependientes en el instante $n+1$, las distintas disposiciones posibles de líneas características se muestran en la Figura 5.4 y el número de condiciones a imponer en la Tabla 5.1. En la figura, el punto A es el punto del instante n sobre la característica C^+ que pasa por P , mientras que C es el punto en el instante n sobre la característica C^- que pasa por P .

Caso	Número de características salientes	Número de condiciones a imponer
1. Entrada en régimen rápido	0	2
2. Entrada en régimen lento	1	1
3. Salida en régimen lento	1	1
4. Salida en régimen rápido	2	0

Tabla 5.1. Condiciones de contorno en 1D

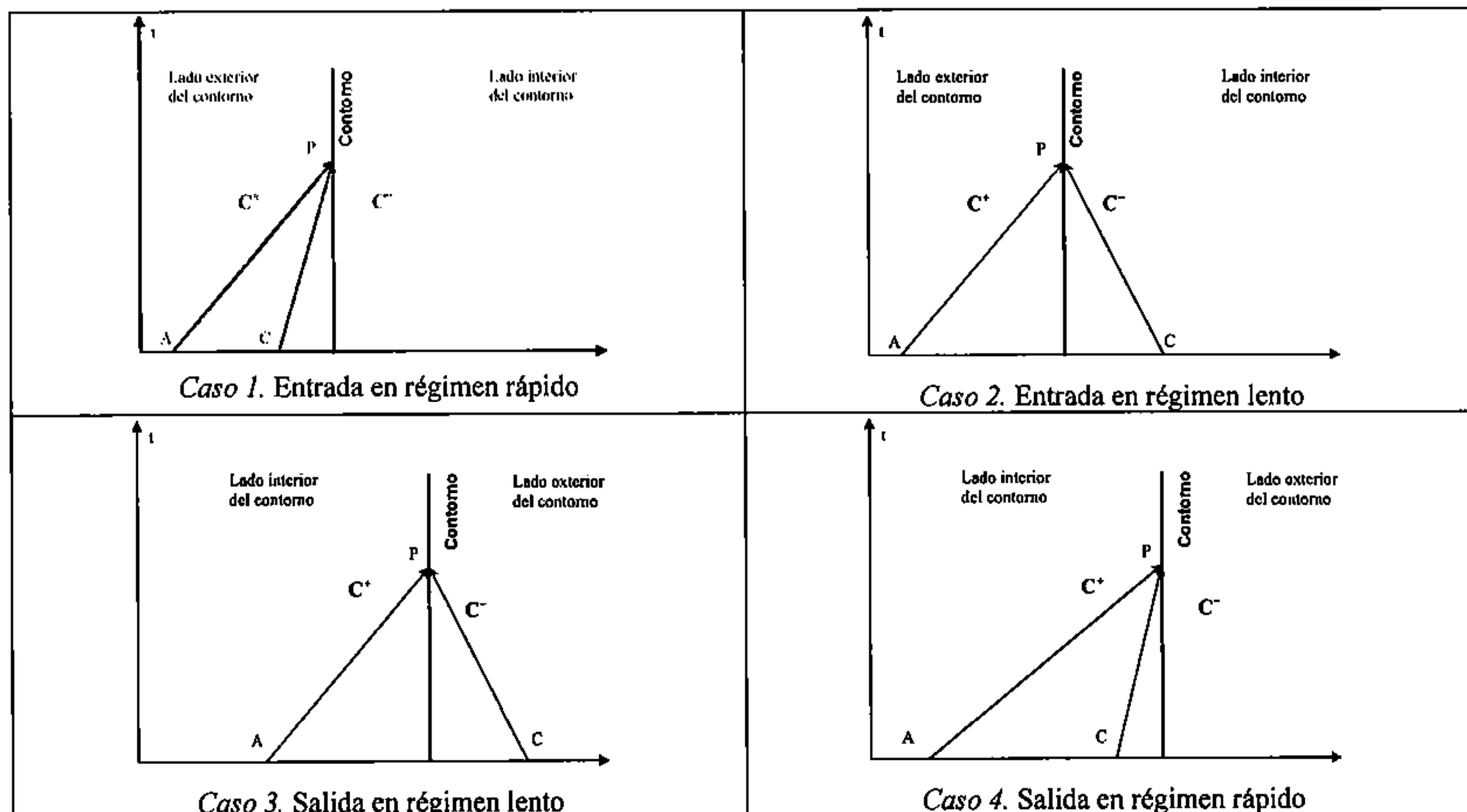


Figura 5.4. Características entrantes y salientes para distintos tipos de régimen

A continuación se detallan las ecuaciones que se utilizan en cada caso:

Caso 1. Entrada en régimen rápido

En ese caso se deben imponer dos condiciones en el contorno. En este trabajo se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 1a: Se impone caudal (Q) y calado (y). U_p^{n+1} se obtiene directamente mediante la expresión:

$$U_p^{n+1} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

teniendo en cuenta que hay una relación biunívoca entre el calado y y el área A dada por la geometría de la sección.

- Caso 1b. Se impone velocidad (v) y calado (y): U_p^{n+1} se obtiene igualmente con (5.90) teniendo en cuenta que $Q = v \cdot A$

En ambos casos no se requiere de más ecuaciones.

Caso 2. Entrada en régimen lento

En ese caso se debe imponer una condición. Se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 2a: Se impone el caudal Q .
- Caso 2b. Se impone la velocidad v
- Caso 2c. Se impone el calado y .

La condición que falta se obtiene particularizando la ecuación (2.105) sobre la línea C^+ :

$$(u + \omega)_p^{n+1} = (u + \omega)_A^n + g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right)_A^n \quad (5.91)$$

Con ésta y la ecuación que relaciona ω con el calado (2.107) se puede obtener U_p^{n+1} .

Caso 3. Salida en régimen lento

En ese caso también se debe imponer una condición:

- Caso 3a: Se impone el caudal Q .
- Caso 3b. Se impone la velocidad v
- Caso 3c. Se impone el calado y .
- Caso 3d. Se impone una relación entre caudal y calado (por ejemplo tipo vertedero).

Ahora, la ecuación (2.105) sobre la línea C^- conduce a:

$$(u - \omega)_p^{n+1} = (u - \omega)_C^n + g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right)_C^n \quad (5.92)$$

En cualquiera de los cuatro casos, con esta ecuación ya se dispone del mismo número de ecuaciones que incógnitas, y por lo tanto se puede encontrar U_p^{n+1} .

Caso 4. Salida en régimen rápido

En ese caso no se puede imponer el valor de ninguna variable en el contorno, por lo que U_p^{n+1} se obtiene de resolver simultáneamente las ecuaciones (5.91) y (5.92).

En cualquiera de las situaciones anteriores, la posición espacial de los puntos A y C se puede encontrar conociendo las ecuaciones de las líneas características (2.95), y el valor de la solución en dichos puntos

interpolando con los valores en los elementos próximos o bien suponer que el valor en A y C coincide con el valor en el elemento junto al contorno.

Como se ha dicho, para poder aplicar el método de los volúmenes finitos es necesario conocer el valor a cada lado de un contorno. Para ello se consideran dos *elementos de contorno*, y se imponen en ellos unos valores de A y Q tales que los valores que el esquema numérico considere en cada contorno a la hora de evaluar el flujo numérico coincidan con los calculados con las ecuaciones características.

5.5. Preservación del régimen permanente

El caso de régimen permanente es un caso particular del régimen variable, y por tanto cualquier esquema numérico para la resolución del régimen variable, con unas condiciones de contorno constantes, debería ser capaz de reproducir correctamente el régimen permanente. Esto, sin embargo, no es evidente con el tipo de esquemas explícitos en volúmenes finitos utilizados en este trabajo.

En este sentido destaca el trabajo de Hubbard y García-Navarro (2000) en que se plantea un correcto balance para la situación de agua parada en canal rectangular de geometría variable. En Burguette y García-Navarro (2004) se presentan variaciones de los esquemas de Lax-Friedrichs, y Roe que convergen a una solución estacionaria para cauces irregulares, con verificación para secciones rectangulares o constantes.

El esquema numérico debe ser capaz de resolver cualquier flujo estacionario, y además converger a la solución correcta, es decir, conservar la energía entre secciones, siempre y cuando no haya un resalto hidráulico. En este caso, los esquemas de primer orden y de alta resolución deben converger a la misma solución que se obtiene mediante un cálculo en régimen permanente gradualmente variado a partir de la ecuación de conservación de la energía.

En cualquier flujo estacionario, se cumple $U_i^{n+1} = U_i^n$, por lo que, en el caso de no considerar por el momento los términos de fricción, la expresión general del esquema numérico (5.32), con (5.35), queda:

$$F_{i-1/2}^* - F_{i+1/2}^* + H_{i,i-1/2}^* + H_{i,i+1/2}^* = 0 \quad (5.93)$$

con las expresiones de F^* y H^* dadas respectivamente por (5.51) y (5.38) para el esquema de primer orden y (5.86) y (5.89) para alta resolución.

Un primer caso de flujo estacionario es el de agua parada, para el cual se tiene $Q = 0$, $\bar{u} = 0$, $\Delta h = -\Delta z$ y $S_f = 0$. Sustituyendo estas igualdades en las expresiones de F^* y H^* y a su vez éstas en (5.93) se tras operar se obtiene directamente:

$$(\Delta z - \Delta h)_{i+1/2} = 0 \quad (5.94)$$

por lo que el esquema planteado permite la correcta simulación de agua en reposo.

Otro caso de flujo estacionario es el correspondiente a régimen permanente, para el cual debe cumplirse también el mismo balance entre el término independiente y la diferencia de flujo (5.93). En este caso sustituyendo estas las expresiones de F^* y H^* en (5.93) se llega a:

$$\frac{Q^2}{\bar{A}_{i+1/2}} \left(\frac{A_{i+1} - A_i}{A_{i+1} A_i} \right) = g(\Delta z + \Delta h)_{i+1/2} \quad (5.95)$$

Por otro lado, en régimen permanente gradualmente variado se debe cumplir la ecuación de conservación de la energía entre dos secciones del río, que con la notación utilizada hasta ahora y despreciando la fricción con el contorno ($S_f = 0$) se puede escribir, entre dos secciones i e $i+1$ como

$$(\Delta z + \Delta h)_{i+1/2} = \frac{1}{g} \left(\frac{Q^2}{2A_i^2} - \frac{Q^2}{2A_{i+1}^2} \right) \quad (5.96)$$

La expresión anterior indica que la diferencia en la cota de la lámina de agua entre las dos secciones es la diferencia entre energía de velocidad, siendo Q el caudal en cualquier punto del río. Utilizando esta ecuación en (5.95), resulta que la expresión para la aproximación del valor del área en los contornos de los volúmenes finitos unidimensionales debe ser la media armónica:

$$\tilde{A} = \frac{2A_i A_{i+1}}{A_i + A_{i+1}} \quad (5.97)$$

Con (5.97) se consigue que el esquema converja a la solución en régimen permanente compatible con la ley de física de conservación de la energía.

6. Esquemas numéricos para las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones

Se presentan los esquemas de resolución de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones utilizados en este trabajo, siguiendo el mismo esquema del capítulo anterior para esquemas unidimensionales: desarrollo del esquema de primer orden, extensión a segundo orden, y esquemas de alta resolución. Para cada uno de ellos se presenta el tratamiento del término independiente implementado.

Curiosamente, las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones presentan una formulación más sencilla que en una dimensión (no existe variación del flujo por variación de la geometría) por lo que el balance del término independiente con el vector de flujo se simplifica.

Las ecuaciones a resolver, son las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en forma conservativa (2.47) deducidas en el Capítulo 3. .

6.1. Esquema conservativo de primer orden: Método de Godunov en dos dimensiones

Como se ha visto en el Capítulo 4. , utilizando la discretización en volúmenes finitos, cualquier esquema conservativo para un sistema de ecuaciones hiperbólico homogéneo como

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = 0 \quad (6.1)$$

responderá, en dos dimensiones, a la expresión:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_l} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} \quad (6.2)$$

donde \mathbf{n}_{i,w_l} es la normal exterior al contorno w_l , l_{i,w_l} es su longitud, N_l el número de contornos y \mathbf{F}^* el flujo numérico, que diferencia un esquema de otro. Como en el caso 1D, el método de Godunov considera, en cada contorno de un volumen finito, un problema de Riemann local con un estado constante a cada lado del contorno. Para cada contorno w_l , este problema de Riemann se puede interpretar como un problema de Riemann unidimensional en la dirección perpendicular al contorno, cuya solución en $[t^n, t^{n+1}]$ es $\mathbf{U}(i, w_l, [t^n, t^{n+1}])$, y por lo tanto el flujo numérico del método de Godunov en dos dimensiones es $\mathbf{F}_{i,w_l}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}(i, w_l, [t^n, t^{n+1}])))$, cuya expresión final dependerá de cómo se resuelva el problema de Riemann (solución exacta o aproximada utilizando algún *Riemann solver*).

6.1.1. Approximate Riemann Solver de Roe

Igual que en el caso unidimensional el *Riemann solver* de Roe presenta una serie de ventajas respecto los otros, sobretodo a la hora de incorporar el término independiente en el esquema numérico. El desarrollo del mismo es análogo al caso unidimensional realizado en el capítulo anterior pero considerando la expresión de \mathbf{F} según (3.16). Las matrices jacobianas de \mathbf{F} son, según lo visto en 2.4.1.2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

así que la matriz jacobiana en la dirección perpendicular a un contorno cuya normal exterior es (n_x, n_y) es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}n_x + \mathbf{B}n_y = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x - vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

El *Riemann solver* de Roe en dos dimensiones consiste, igual que en el caso 1D, en reemplazar, en cada contorno del volumen finito, esta matriz jacobiana \mathbf{A} por otra aproximada $\tilde{\mathbf{A}}$ que dependa de los valores de \mathbf{U} a ambos lados del contorno y cumpla tres condiciones, que en 2D son:

1. $\tilde{\mathbf{A}}$ debe tener valores propios $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ reales con sus vectores propios correspondientes $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ linealmente independientes.
2. El sistema debe ser consistente con el sistema original, lo que quiere decir que debe cumplirse $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$.
3. La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ debe asegurar la conservatividad:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j) \quad (6.5)$$

donde i y j denotan elementos a ambos lados de un contorno.

En cada contorno se tiene un problema de Riemann unidimensional. Por analogía con (4.28), la expresión para el flujo numérico para el método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe, en el caso bidimensional, es, para el contorno l -ésimo del elemento i :

$$\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j) \mathbf{n}_{i,w_l} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k |\tilde{\lambda}_k| \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.6)$$

donde j indica el elemento que conecta con el i a través de la pared w_l . Ahora las expresiones para los vectores, y valores propios de $\tilde{\mathbf{A}}$ son:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{u}n_x + vn_y + \tilde{c} \\ \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{u}n_x + vn_y \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{u}n_x + vn_y - \tilde{c} \end{aligned} ; \quad \tilde{\mathbf{e}}_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm \tilde{c}n_x \\ \tilde{u} \pm \tilde{c}n_y \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

De la primera condición para la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ se obtiene

$$\Delta \mathbf{U}_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.8)$$

con los coeficientes:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{1,3} &= \frac{\Delta h_{ij}}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} \left[\Delta(hu)_{ij} n_x + \Delta(hv)_{ij} n_y - (\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y) \Delta h_{ij} \right] \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{1}{\tilde{c}} \left[(\Delta(hv)_{ij} - \tilde{v} \Delta h_{ij}) n_x - (\Delta(hu)_{ij} - \tilde{u} \Delta h_{ij}) n_y \right]\end{aligned}\quad (6.9)$$

y de la 3ª condición se deducen las expresiones que indican los estados promediados en cada contorno:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_i} u_i + \sqrt{h_j} u_j}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \quad (6.10)$$

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{h_i} v_i + \sqrt{h_j} v_j}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \quad (6.11)$$

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_i + h_j}{2}} \quad (6.12)$$

Análogamente al caso 1D, para asegurar un correcto tratamiento de las ondas de depresión transcriticals, se debe aplicar la corrección de entropía de Harten y Hyman consistente en reemplazar $|\tilde{\lambda}_k|$ en (6.6) por φ_k , siendo este:

$$\varphi_k = \begin{cases} |\tilde{\lambda}_k| & \text{si } |\tilde{\lambda}_k| \geq \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \text{si } |\tilde{\lambda}_k| < \varepsilon_k \end{cases} \quad (6.13)$$

con:

$$(\varepsilon_k)_{i,j} = \max \left\{ 0, \left[(\tilde{\lambda}_k)_{i,j} - (\lambda_k)_i \right], \left[(\lambda_k)_j - (\tilde{\lambda}_k)_{i,j} \right] \right\} \quad (6.14)$$

de manera que el flujo numérico del Método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe (también conocido como esquema de Roe) finalmente queda:

$$\mathbf{F}_{i,w_i}^* \mathbf{n}_{i,w_i} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j) \mathbf{n}_{i,w_i} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k \varphi_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.15)$$

6.1.2. Término independiente en el esquema Godunov +Roe 2D

Como ya se ha indicado en el caso unidimensional, el tratamiento del término independiente de las ecuaciones de Saint Venant debe conseguir un correcto balance entre el mismo y el vector de flujo. Por ello, un tratamiento centrado como el indicado en (3.17) no sería correcto: en la situación de agua parada con un fondo no horizontal se obtendría una solución no estacionaria. El equilibrio entre el vector de flujo y el término independiente se debe producir para la parte del mismo que representa la pendiente de fondo, pero puede obviarse para los términos de fricción (Bruffau, 2000). De esta manera, el término independiente \mathbf{H} en (3.16) se puede descomponer como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (6.16)$$

con

$$\mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{ox} \\ ghS_{oy} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

y

$$\mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Sin embargo, en dos dimensiones no existe una componente del vector de flujo con dependencia espacial como ocurría en una dimensión, por lo que en cierta manera el proceso se simplifica.

Al considerar el término independiente en las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales y una discretización en volúmenes finitos, cualquier esquema numérico se puede escribir como:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} + \frac{\Delta t}{V_i} \mathbf{H}_i^* \quad (6.19)$$

donde $\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{*1} + \mathbf{H}_i^{*2}$ representa la integral del término independiente en el volumen finito.

\mathbf{H}^2 se puede aproximar, igual que en una dimensión, de forma centrada por:

$$\mathbf{H}_i^{2*} = V_i \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (6.20)$$

La componente \mathbf{H}^1 del término independiente debe tratarse de acuerdo con el esquema numérico utilizado. En los próximos apartados se analiza su expresión para los distintos esquemas utilizados en este trabajo.

En el esquema de Roe, una descomposición análoga a lo realizado para el vector de flujo requiere considerar \mathbf{H}_i^{*1} como la suma de unas contribuciones en cada contorno del volumen finito:

$$\mathbf{H}_i^{*1} = \sum_{l=1}^{N_i} \mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} \quad (6.21)$$

donde

$$\mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} = \int_{S_{j_l}} \mathbf{H}^1 dV \quad (6.22)$$

siendo j el elemento que conecta con el elemento i por el lado w_l , y S_{j_l} la superficie definida por el centro del elemento i y el lado w_l (Figura 6.1).

Por otro lado, al trabajar con la forma integral de las ecuaciones, el esquema de Roe descompone la integral del vector de flujo en base a los vectores propios de la matriz jacobiana. Hacer lo mismo con el término independiente implica considerar la integral del término independiente en un contorno entre dos elementos i y j , es decir, la integral del término independiente en las dos superficies definidas por el centro de los elementos i y su lado común, es decir:

$$\int_{S_{j_l} + S_{j_l}} \mathbf{H}^1 dV = l_{i,w_l} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.23)$$

Esta última expresión, considerada junto con (6.22), conduce a:

$$\mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} = \frac{1}{2} l_{i,w_l} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\beta}_k (1 - \text{signo}(\tilde{\lambda}_k)) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.24)$$

La expresión compacta del método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe con término independiente es por consiguiente:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \left(\sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} + \sum_{l=1}^{N_i} \mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} \right) + \Delta t \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (6.25)$$

donde $F \cdot n$ responde a (6.15), H^1 a (6.24) y H^2 a (6.18) junto con la fórmula de Manning, considerando en ésta última el radio hidráulico como la relación entre el volumen de agua en el elemento (calado multiplicado por la proyección horizontal de la superficie del elemento) y la superficie del contorno del cauce correspondiente al mismo elemento.

Para la obtención de los coeficientes $\tilde{\beta}_k$, considerando (6.23) junto con (6.17) se tiene:

$$\tilde{\beta}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} + \bar{c}n_x \\ \bar{v} + \bar{c}n_y \end{pmatrix} + \tilde{\beta}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{c}n_y \\ \bar{c}n_x \end{pmatrix} + \tilde{\beta}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} - \bar{c}n_x \\ \bar{v} - \bar{c}n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\bar{h}(\Delta z)_{i,j} n_x \\ -g\bar{h}(\Delta z)_{i,j} n_y \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

de donde

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= -\frac{\bar{c}}{2}(\Delta z)_{i,j} \\ \tilde{\beta}_2 &= 0 \\ \tilde{\beta}_3 &= -\tilde{\beta}_1 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Igual que en el caso unidimensional, puede verse que en la situación de agua parada, debe cumplirse $\tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j = \tilde{\beta}_j$, lo que se produce de forma directa sustituyendo las expresiones de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$.

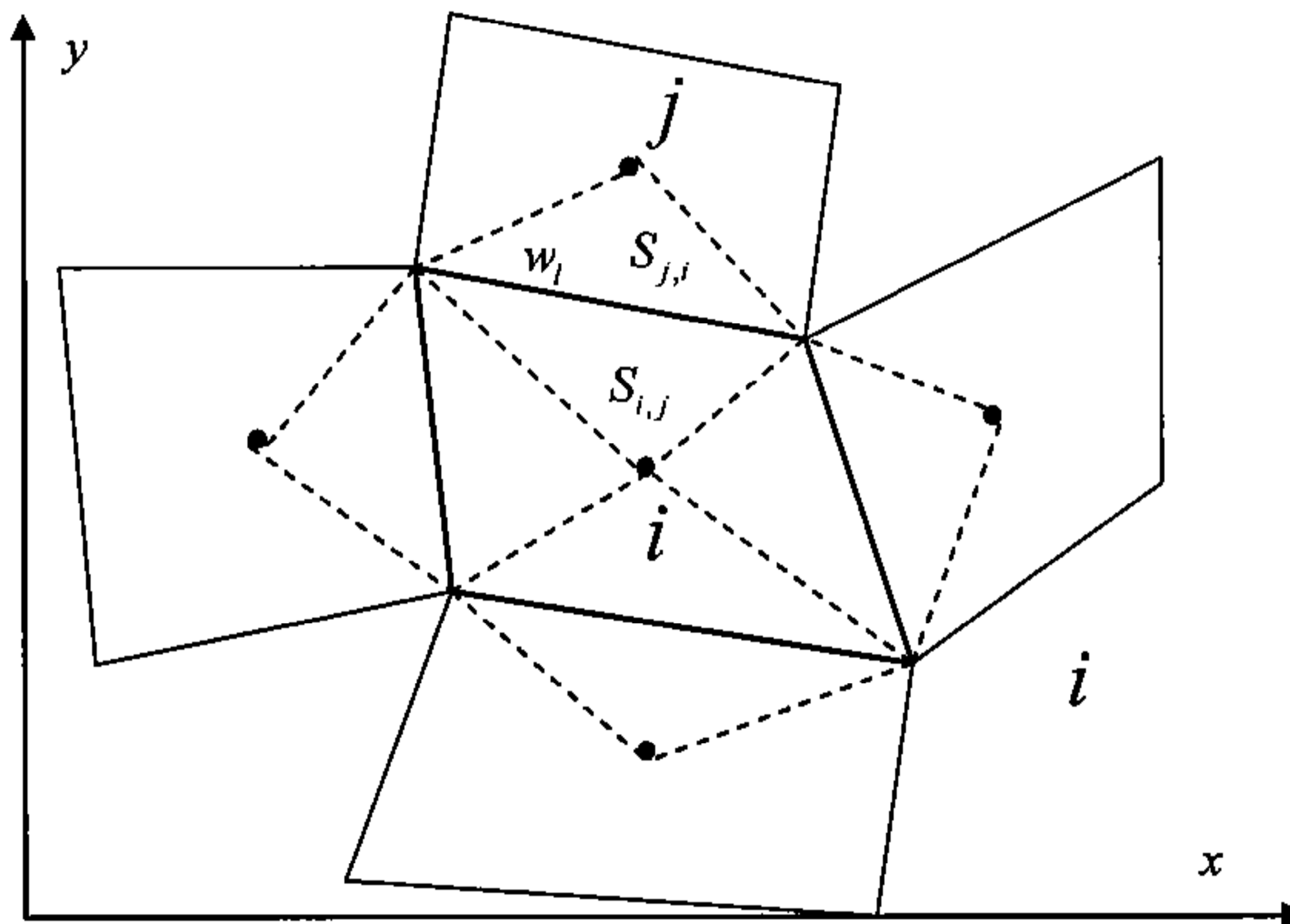


Figura 6.1. Definición de superficies $S_{i,j}$

6.2. Esquemas de segundo orden en dos dimensiones

6.2.1. McCormack en dos dimensiones

El esquema de McCormack en dos dimensiones consta, como en el caso unidimensional, de dos pasos: predictor y corrector:

$$\begin{aligned}
 U_i^P &= U_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_l} (\mathbf{F}_{i,w_l}^{*n} \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} \\
 U_i^C &= U_i^P - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_l} (\mathbf{F}_{i,w_l}^{*P} \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} \\
 U_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (U_i^P + U_i^C)
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

En cada paso se debe evaluar el flujo numérico en cada uno de los contornos de un elemento, o bien como el flujo en el mismo elemento, o bien como el flujo en el elemento contiguo por dicho contorno, e ir alternando en cada paso de tiempo. Al haber dos direcciones espaciales la alternancia dependerá del número de lados de cada elemento. En el caso de cuadriláteros se ha utilizado la alternancia descrita en la Tabla 6.1 con la notación de la Figura 4.2:

	Predictor	Corrector
1	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w1}}^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w2}}^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_i^n$	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w3}}^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w4}}^n$
2	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w2}}^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w3}}^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_i^n$	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w1}}^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w4}}^n$
3	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w1}}^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w4}}^n$	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w2}}^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w3}}^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_i^n$
4	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w3}}^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w4}}^n$	$\mathbf{F}_{i,1}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w1}}^n, \mathbf{F}_{i,2}^{*n} = \mathbf{F}_{e_{w2}}^n, \mathbf{F}_{i,3}^{*n} = \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_{i,4}^{*n} = \mathbf{F}_i^n$

Tabla 6.1. Alternancia en el esquema de McCormack 2D para cuadriláteros

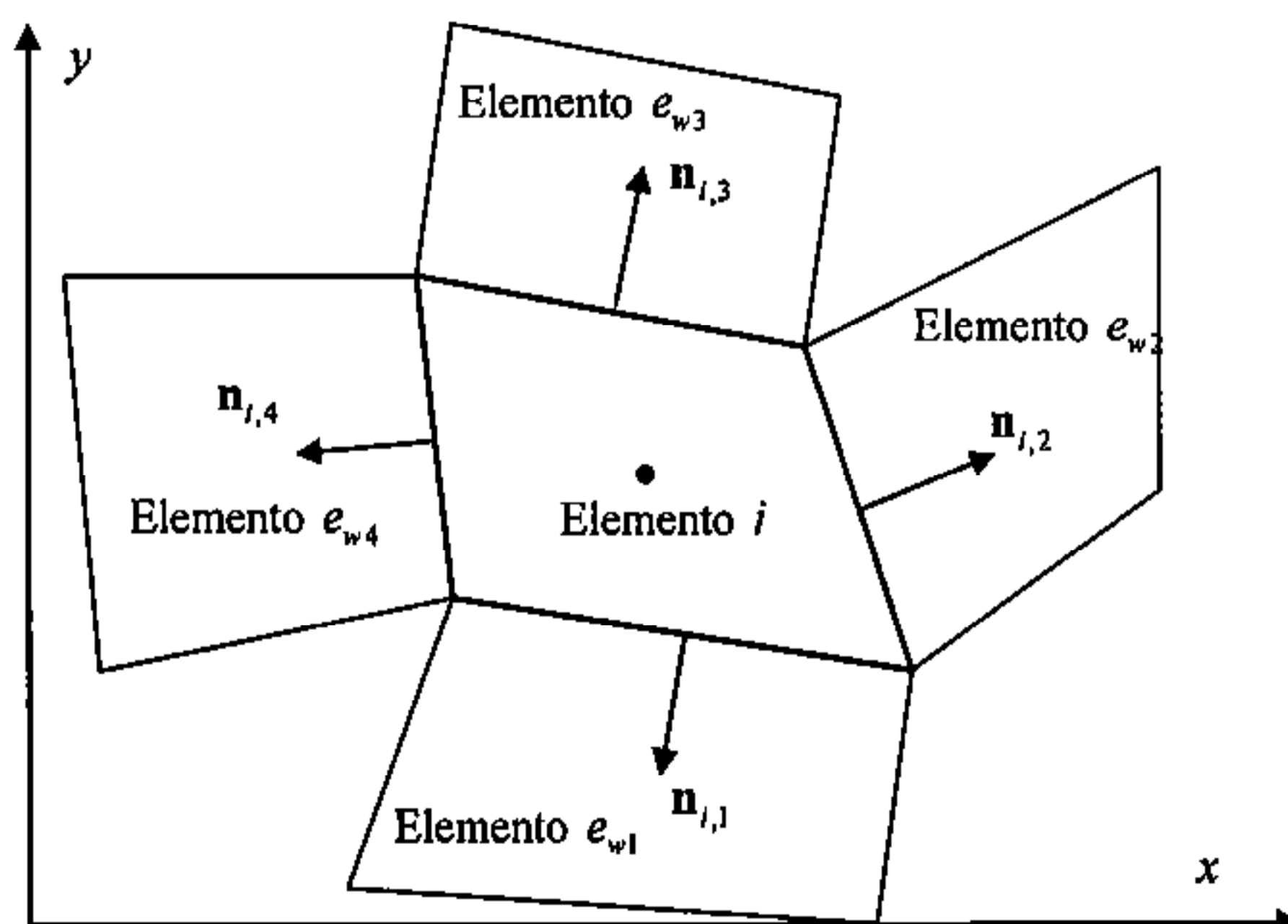


Figura 6.2. Notación en elementos cuadriláteros para el esquema de McCormack

En el caso de triángulos, por no existir en cada elemento lados opuestos que determinan una dirección en el espacio, la alternancia es más compleja. Se ha utilizado un ciclo de ocho instantes de tiempo (Tabla 6.2 y Figura 6.3).

	Predictor	Corrector
1	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n,$	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n$
2	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n,$	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n,$
3	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n,$	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n,$
4	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n,$	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n,$
5	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n$	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w4}}^n$
6	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n$	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n$
7	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n$	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n,$
8	$F_{i,1}^{*n} = F_i^n, F_{i,2}^{*n} = F_i^n, F_{i,3}^{*n} = F_i^n$	$F_{i,1}^{*n} = F_{e_{w1}}^n, F_{i,2}^{*n} = F_{e_{w2}}^n, F_{i,3}^{*n} = F_{e_{w3}}^n$

Tabla 6.2. Alternancia en el esquema de McCormack 2D para triángulos

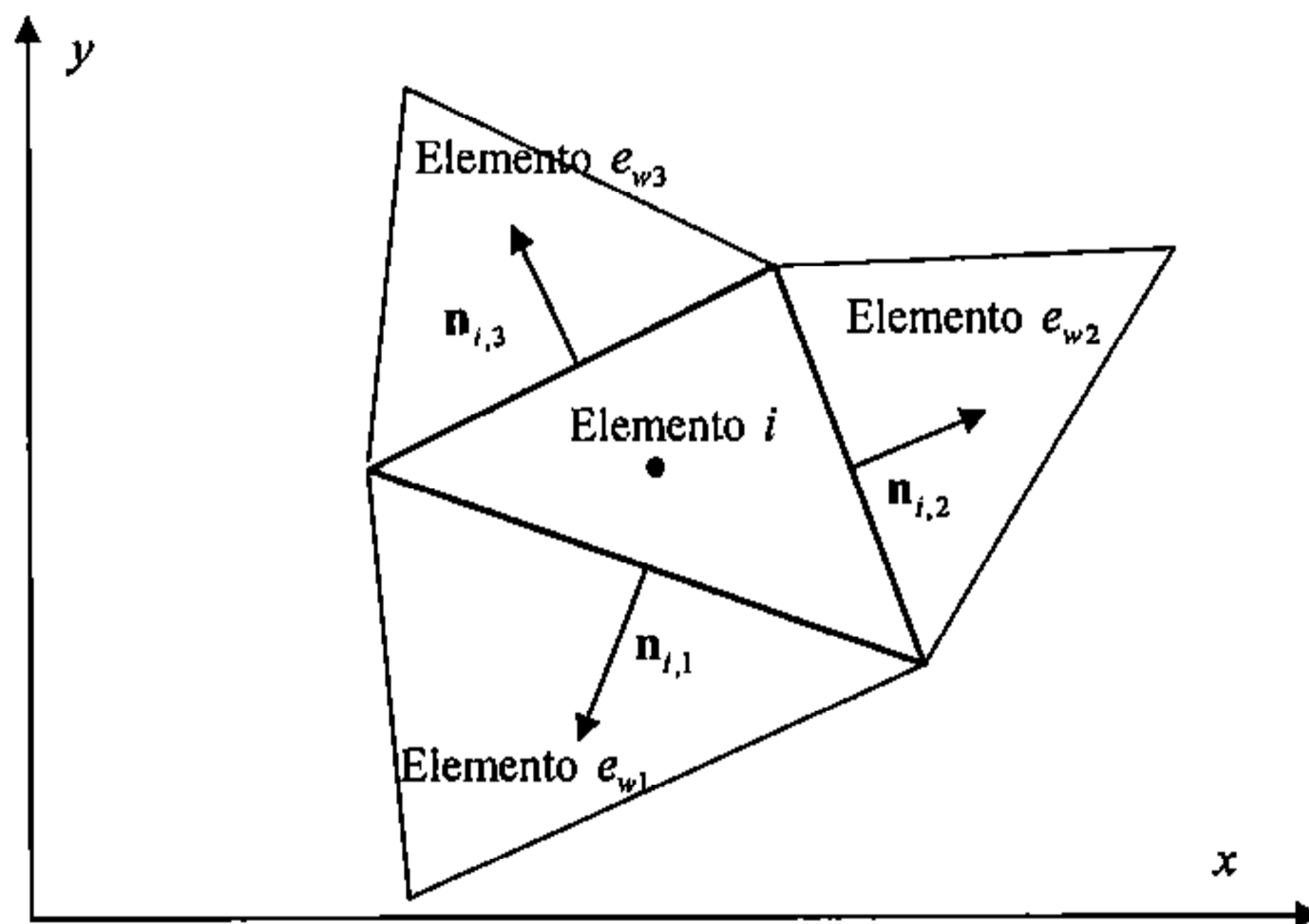


Figura 6.3. Notación en triángulos para el esquema de McCormack

6.3. Esquemas de alta resolución en dos dimensiones

La extensión del esquema de Godunov a segundo orden de precisión y variación total decreciente es análoga en dos dimensiones a lo realizado en el caso unidimensional, existiendo también dos familias de esquemas: esquemas tipo *WAF* y esquemas tipo *MUSCL*. No se presentan los esquemas de segundo orden sin variación total decreciente, por no tener interés práctico para los objetivos de este trabajo, ya que producen oscilaciones espurias, y se pueden obtener a partir de la versión TVD si se utiliza una función de limitación igual a la unidad.

6.3.1. WAF TVD en dos dimensiones

Exactamente de la misma manera que en el caso 1D, partiendo de la idea de ponderación de flujo se obtiene el esquema WAF TVD en dos dimensiones, cuyo flujo numérico es:

$$\mathbf{F}_{i,w_i}^* \mathbf{n}_{i,w_i} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j) \mathbf{n}_{i,w_i} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k \varphi_k (1 - \psi_k (1 - |v_k|)) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.29)$$

o, expresado como el esquema de primer orden (6.15) más unas correcciones a segundo orden:

$$\mathbf{F}_{i,w_i}^* \mathbf{n}_{i,w_i} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j) \mathbf{n}_{i,w_i} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k \varphi_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \psi_k \tilde{\alpha}_k \varphi_k (1 - |v_k|) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.30)$$

con $v_k = \tilde{\lambda}_k \Delta t / \Delta x$ como en el caso unidimensional, φ_k responde a (6.13). La función de limitación responderá a alguna de las expresiones presentadas en Capítulo anterior y:

$$(\psi_k)_{i,j} = \Psi \left[(r_k)_{i,j} \right] \quad (6.31)$$

donde r_k , que indica el salto que sufre la componente k de la solución en un contorno de un elemento respecto del salto en el contorno (del mismo elemento o no) situado en la dirección *upwind*, es:

$$(r_k)_{i,j} = \frac{(\tilde{\alpha}_k \varphi_k (1 - |v_k|))_{m,n}}{(\tilde{\alpha}_k \varphi_k (1 - |v_k|))_{i,j}} \quad (6.32)$$

m es el elemento *upwind* de i y n el elemento *upwind* de j . La dirección *upwind* la indica la normal al contorno, y el sentido el signo de $\tilde{\lambda}_k$. En la *Figura 6.4* y la *Figura 6.5* se representan cuales serían los elementos m y n , para cuadriláteros y triángulos, en el caso de $\tilde{\lambda}_k > 0$ y $\tilde{\lambda}_k < 0$.

6.3.1.1 Término independiente en el esquema WAF TVD 2D

El mismo proceso visto para el esquema de primer orden puede hacerse para segundo orden de precisión y Variación Total Decreciente, discretizando \mathbf{H}^* de acuerdo con el vector de flujo. En ese caso, la expresión para \mathbf{H}_{i,w_i}^{*1} es:

$$\mathbf{H}_{i,w_i}^{*1} = \frac{1}{2} l_{i,w_i} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\beta}_k (1 - \text{signo}(\tilde{\lambda}_k) (1 - \psi_k (1 - |v_k|))) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i,j} \quad (6.33)$$

El esquema numérico se obtiene sustituyendo esta última expresión (6.25) junto con la expresión del flujo numérico (6.29).

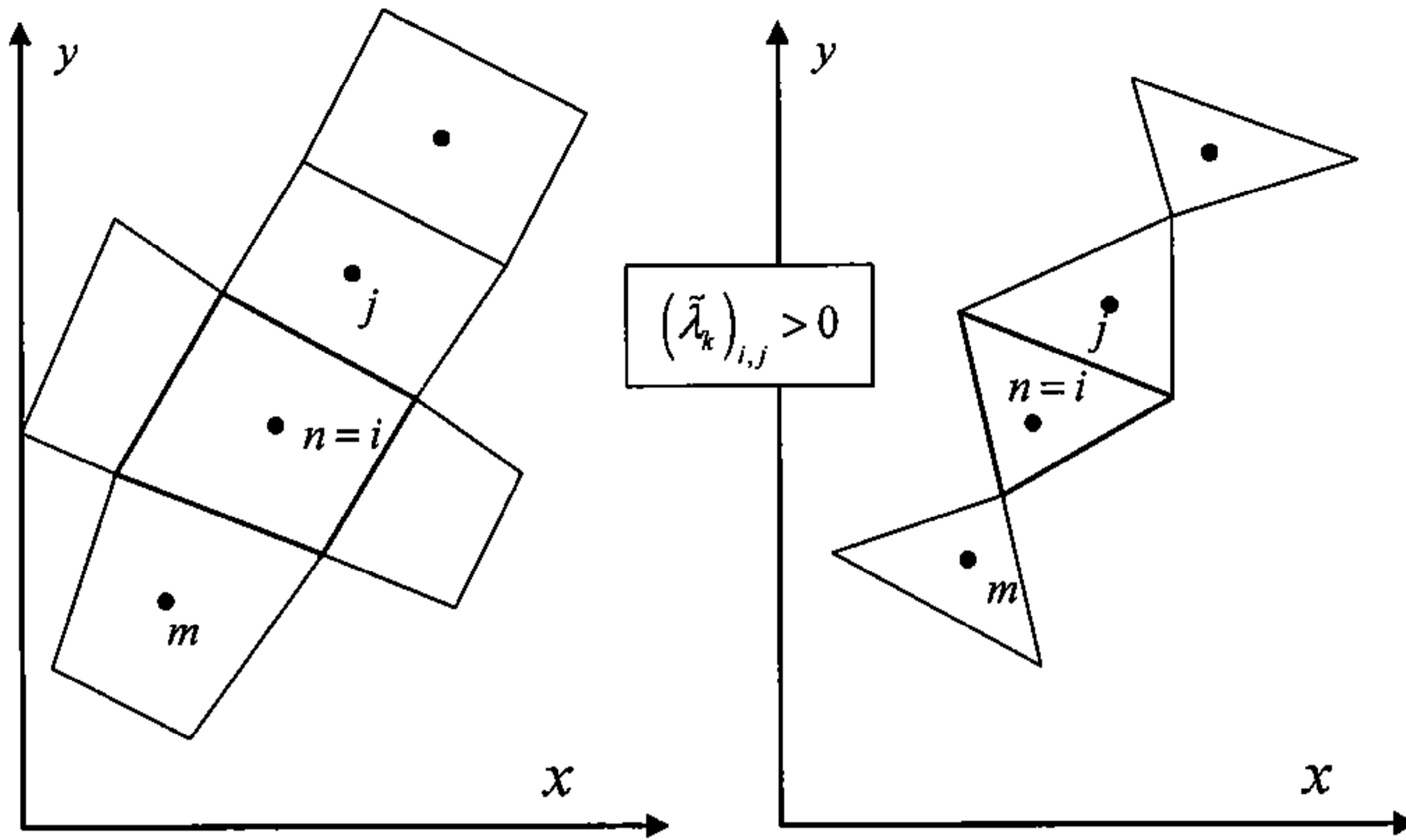


Figura 6.4. Elementos (m y n) que determinan el contorno upwind del (i,j) para $(\tilde{\lambda}_k)_{i,j} > 0$

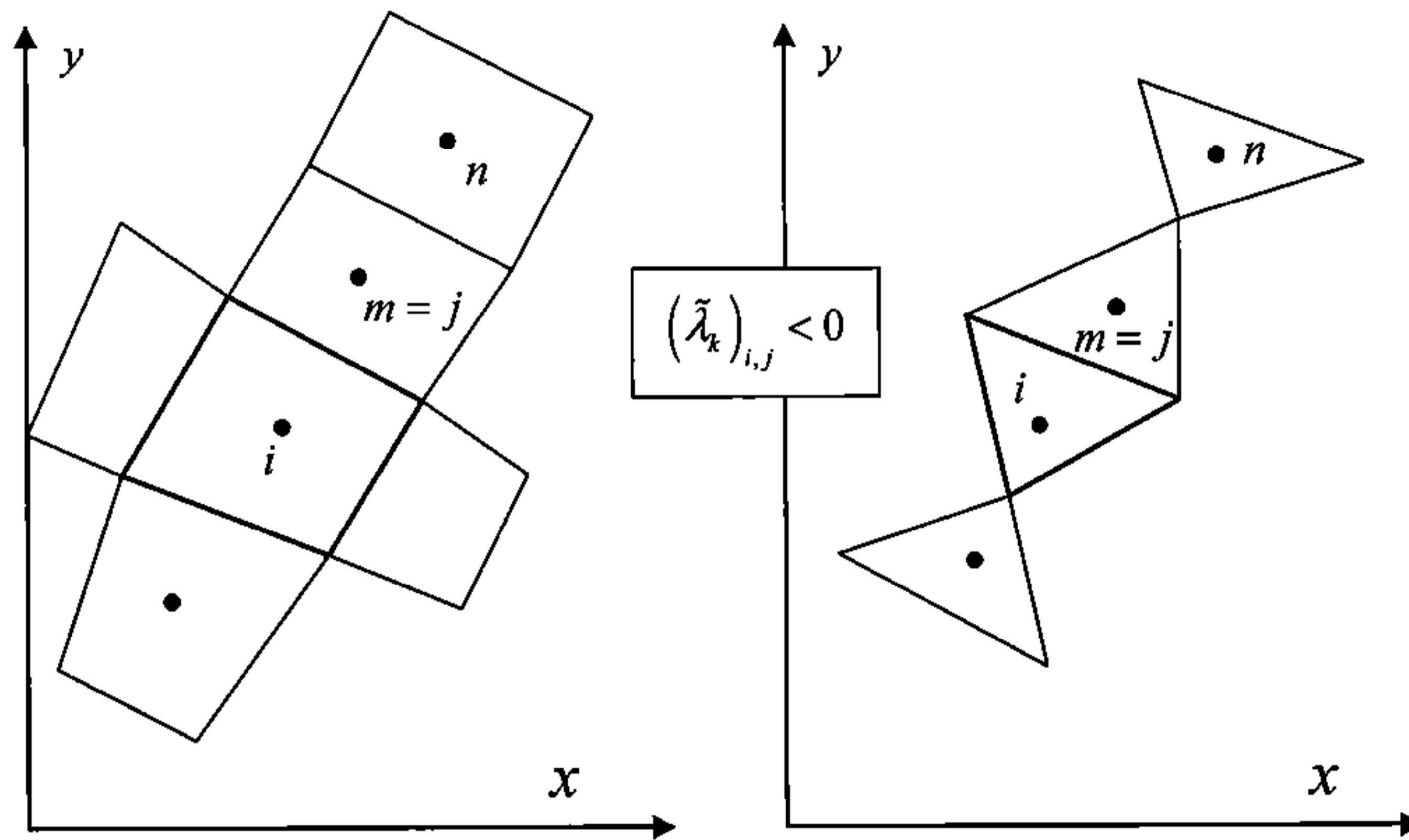


Figura 6.5. Elementos (m y n) que determinan el contorno upwind del (i,j) para $(\tilde{\lambda}_k)_{i,j} < 0$

6.4. Condiciones de contorno en dos dimensiones

Los esquemas de cálculo presentados utilizan una discretización en volúmenes finitos. En este tipo de esquemas se obtiene la solución como un valor promedio en cada elemento de volumen, evaluando el flujo numérico en cada lado del elemento. En los elementos interiores del dominio esta evaluación se realiza con alguna de las expresiones vistas en los apartados anteriores, a partir de la solución en los elementos adyacentes a cada contorno. Sin embargo en los límites del dominio de cálculo habrá unos contornos que, por el lado exterior no tendrán elemento adyacente. En ese caso, se debe evaluar el flujo en el contorno de alguna otra manera, y para ello se utiliza la teoría de las bicaracterísticas presentada en el Capítulo 3.

La teoría de las bicaracterísticas proporciona información de cómo se propaga la información en el espacio y el tiempo (cual es el dominio de dependencia y de influencia de un punto), y por lo tanto que condiciones se pueden, o deben, imponer en cada contorno según el tipo de flujo. Para un punto cualquiera habrá tres ecuaciones de compatibilidad (alternativas a las ecuaciones de Saint Venant) para calcular el valor de la solución en un instante a partir del valor en un instante anterior.

Dado un punto del contorno, es posible que su dominio de dependencia caiga todo fuera del dominio de cálculo (en una entrada en régimen rápido), parte fuera y parte dentro (entrada o salida en régimen lento), o todo dentro (salida en régimen rápido). Para calcular el valor de la solución utilizando las bicaracterísticas en dicho punto, sólo se pueden usar las ecuaciones de compatibilidad sobre aquellas bicaracterísticas que vienen de un punto del dominio, por lo que según el caso se tienen tres, dos, una o ninguna condición sobre las características. Como siempre se requieren 3 ecuaciones, las que faltan deben ser impuestas. Habría otro caso en el que el contorno es una pared material, para el cual la velocidad en la dirección normal al contorno sería nula. En la Figura 6.6 se representan las cuatro posibles situaciones entre las superficies características y el contorno del dominio de cálculo, y queda patente el número de condiciones de compatibilidad y condiciones impuestas que se deben utilizar según el régimen hidráulico (Tabla 6.3):

Caso	Número de condiciones de compatibilidad	Número de condiciones a imponer
1. Entrada en régimen rápido	0	3
2. Entrada en régimen lento	1	2
3. Salida en régimen lento	2	1
4. Salida en régimen rápido	3	0
5. Pared material	2	1

Tabla 6.3. Condiciones de contorno en 2D

A continuación se detallan cuales son las ecuaciones que se deben utilizar en cada caso:

Caso 1. Entrada en régimen rápido

En ese caso se deben imponer tres condiciones en el contorno. Se indica por u_n y u_t las componentes de la velocidad en la dirección normal y tangencial al contorno, q_n y q_t las componentes del caudal específico (producto de velocidad por calado), y h el calado:

- Caso 1a: Se imponen: u_n , u_t y h . U^{n+1} se obtiene directamente:

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ h(u_n n_x - u_t n_y) \\ h(u_n n_y + u_t n_x) \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

donde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ es la normal exterior al contorno

- Caso 1b. Se imponen q_n , q_t y h . U^{n+1} se obtiene con (6.34) y $u_n = q_n \cdot h$, $u_t = q_t \cdot h$.

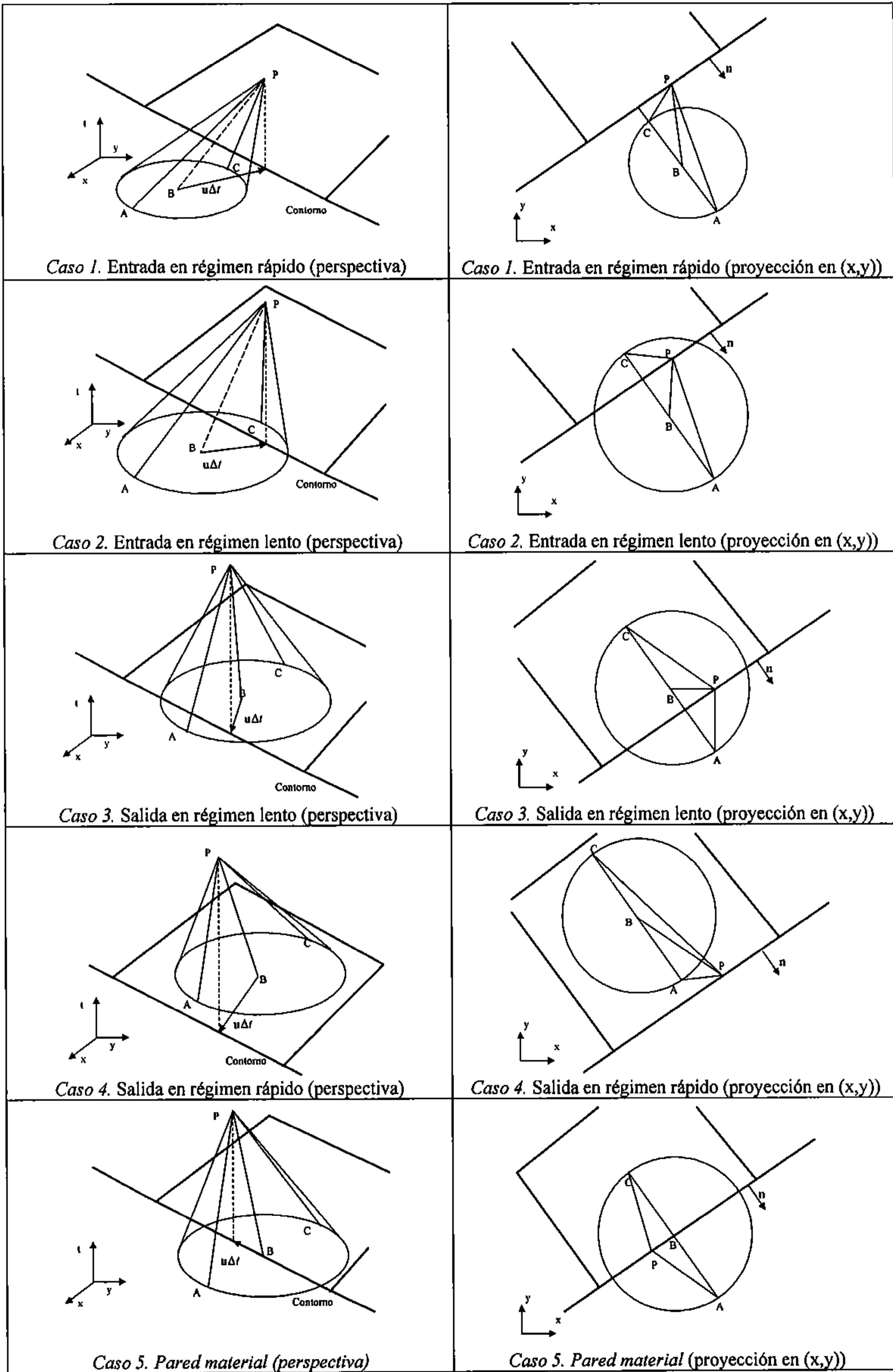


Figura 6.6. Biaracterísticas para distintos tipos de régimen

Caso 2. Entrada en régimen lento

En ese caso se deben imponer dos condiciones en el contorno. Se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 2a: Se imponen: u_n y u_t .
- Caso 2b. Se imponen q_n y q_t .
- Caso 2c. Se imponen h y u_t .

En cualquiera de los tres casos es necesaria una ecuación para calcular la tercera variable. Para ello se utiliza la ecuación de compatibilidad (2.149), que aplicada entre los puntos C y P (bicaracterística procedente del interior del dominio de cálculo) de la Figura 6.6 queda:

$$(u_n + 2c)_P^{n+1} = (u_n + 2c)_C^n + \Delta t \left[-\frac{\partial u_t}{\partial \theta} + g(S_{0x} - S_{fx})n_x + g(S_{0y} - S_{fy})n_y \right]_C^n \quad (6.35)$$

En los tres casos 2a, 2b y 2c con (6.35) se puede calcular $(u_n + 2c)_P^{n+1}$ (P es un punto del contorno) y de allí deducir la variable que falta para poder completar U^{n+1} con (6.34)

En una entrada en régimen lento, una condición usual es $u_t = 0$ (velocidad de entrada normal al contorno).

Caso 3. Salida en régimen lento

En ese caso se debe imponer una sola condición en el contorno. En la este trabajo se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 3a: Se impone: h .
- Caso 3b. Se impone una condición entre u_n y h , por ejemplo una condición tipo vertedero..
- Caso 3c. Se impone u_n .
- Caso 3d. Se impone q_n .

En cualquiera de las situaciones anteriores es necesario dos ecuaciones adicionales para calcular la tercera variable. Para ello se utilizan por un lado la misma ecuación (6.35) en CP, y por otro la ecuación (2.156) particularizada a BP:

$$(u_t)_P^{n+1} = (u_t)_B^n + \Delta t \left[-2 \frac{\partial c}{\partial \theta} - g(S_{0x} - S_{fx})n_y + g(S_{0y} - S_{fy})n_x \right]_B^n \quad (6.36)$$

En los casos 3a, 3c y 3d utilizando (6.35)(6.36) y conociendo la variable impuesta, el valor de u_n , u_t y h se calcula fácilmente, y luego con (6.34) se obtiene U^{n+1} .

Para el caso 3b, con (6.36) se obtiene u_t , mientras que u_n y h se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones formado por (6.35) y la relación impuesta entre u_n y h . Un ejemplo del caso 3b podría ser un vertedero con una ecuación como

$$q_n = C_d \cdot (h - h_0)^\alpha \quad (6.37)$$

donde C_d es un coeficiente de desagüe y h_0 la altura del vertedero sobre la solera. En caso de vertedero rectangular se tiene $\alpha = 1.5$. Si en (6.37) sustituimos $q_n = h \cdot u_n$, esta ecuación junto con (6.35) forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas de donde se puede obtener u_n y h .

Caso 4. Salida en régimen rápido

En ese caso se debe obtener toda la información de las ecuaciones de compatibilidad sobre las bicaracterísticas, que discretizadas se traducen en las ecuaciones (6.35)(6.36) y (2.149) en AC que queda:

$$(-u_n + 2c)_p^{n+1} = (-u_n + 2c)_A^n + \Delta t \left[-\frac{\partial u_t}{\partial \theta} - g(S_{0x} - S_{fx})n_x - g(S_{0y} - S_{fy})n_y \right]_C^n \quad (6.38)$$

Caso 5. Pared material

En ese caso se utilizan las ecuaciones de compatibilidad sobre CP (6.35) y BP (6.36), junto con la condición $u_n = 0$.

En cualquiera de las situaciones anteriores, la posición de los puntos A , B y C se puede encontrar conociendo las ecuaciones de las bicaracterísticas (2.125) y (2.126). El valor de la solución en dichos puntos se puede obtener interpolando con los valores en los elementos próximos.

Con lo que se acaba de ver, se obtienen los valores de las variables justo en los lados exteriores de los elementos de volumen situados junto al contorno del dominio de cálculo. Sin embargo, el método de los volúmenes finitos requiere conocer la solución a ambos lados de cada contorno para el cálculo de su flujo numérico y la contribución del término independiente. Por ello, en los contornos del dominio, se han supuesto unos volúmenes finitos ficticios fuera del dominio de cálculo, denominados elementos de contorno, y en ellos se ha impuesto un valor de la solución para que las variables $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c}$, que son variables promediadas en el contorno correspondiente coincidan exactamente con los valores de las variables calculadas por el método de las bicaracterísticas.

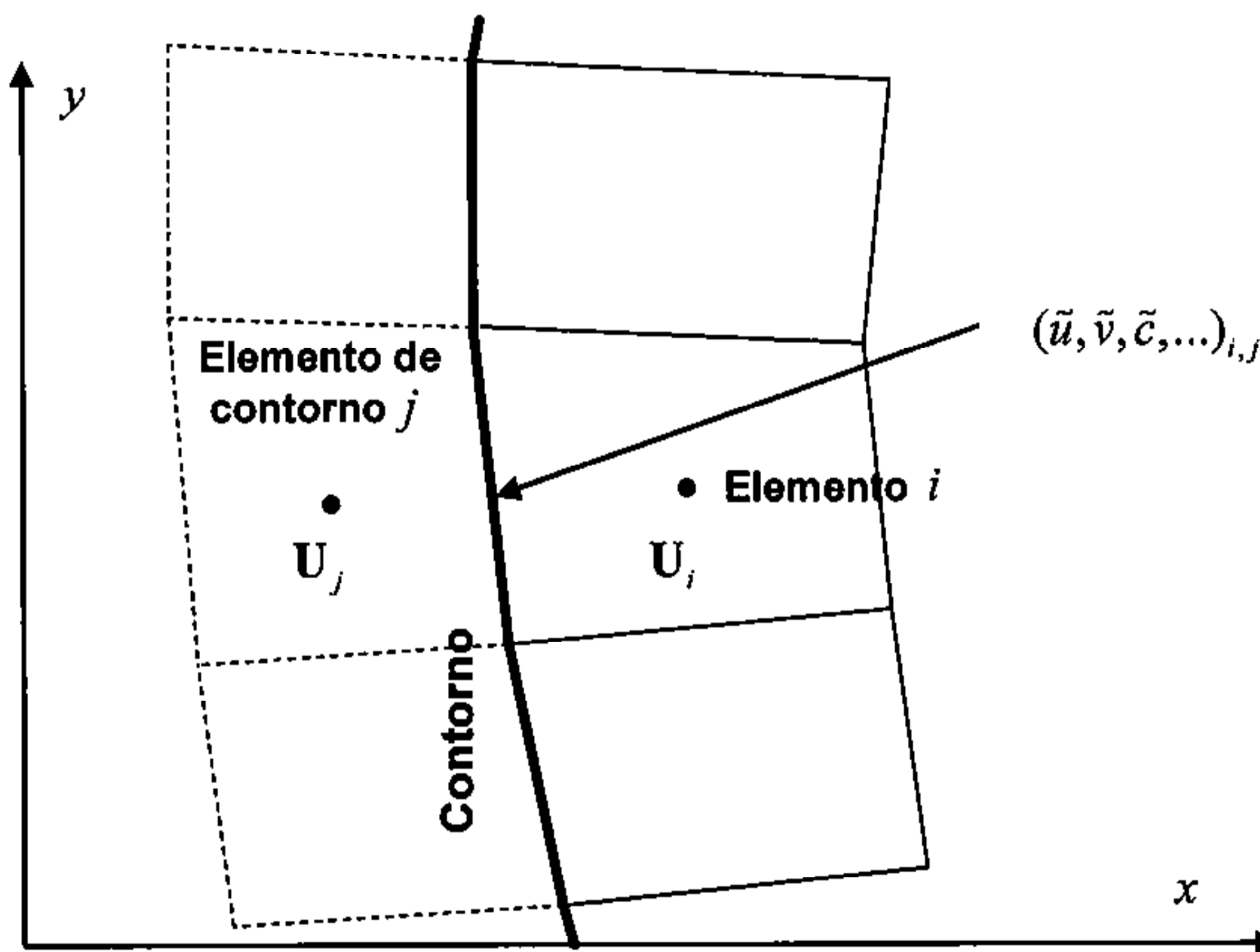


Figura 6.7. Definición de los elementos de contorno

7. Descripción del modelo CARPA

7.1. Estructura del modelo

El modelo CARPA (Cálculo en Alta Resolución de Propagación de Avenidas) permite una modelación conjunta en una y dos dimensiones de una red fluvial y sus llanuras de inundación. El área de estudio se puede dividir en distintas zonas, y en cada una de ellas utilizar una aproximación unidimensional o bidimensional según sean las condiciones reales del flujo, la precisión que se desee y el coste computacional asumible.

El modelo resuelve las ecuaciones de Saint Venant con alguno de los métodos expuestos en los capítulos anteriores, dadas unas condiciones iniciales, unas condiciones de contorno, una rugosidad y unos parámetros de cálculo (incremento de tiempo de cálculo, umbral de secado-mojado).

En este capítulo se describe el algoritmo utilizado en el proceso de secado y mojado, que consigue mantener exactamente el volumen incluso con geometrías irregulares (pendiente de fondo variable). Se explica también la incorporación en el esquema de aportaciones procedentes de precipitación, lo que integra al modelo hidráulico un modelo hidrológico distribuido, que utiliza las ecuaciones de Saint Venant para la modelación de la transformación lluvia-caudal.

A continuación se describen las distintas posibilidades de esquemas numéricos, capacidades del modelo, y herramientas de pre y post proceso implementadas, que convierten el modelo en una herramienta potente, práctica y amigable para aplicar a casos reales. Debido a que algunas de las capacidades del modelo se implementaron en primer lugar en dos dimensiones, y posteriormente se añadieron al cálculo unidimensional, en primer lugar se describe el módulo 2D, y posteriormente el 1D. Para algunos procesos, como en el caso de secado-mojado de elementos, una vez implementado en 2D la simplificación a 1D es inmediata.

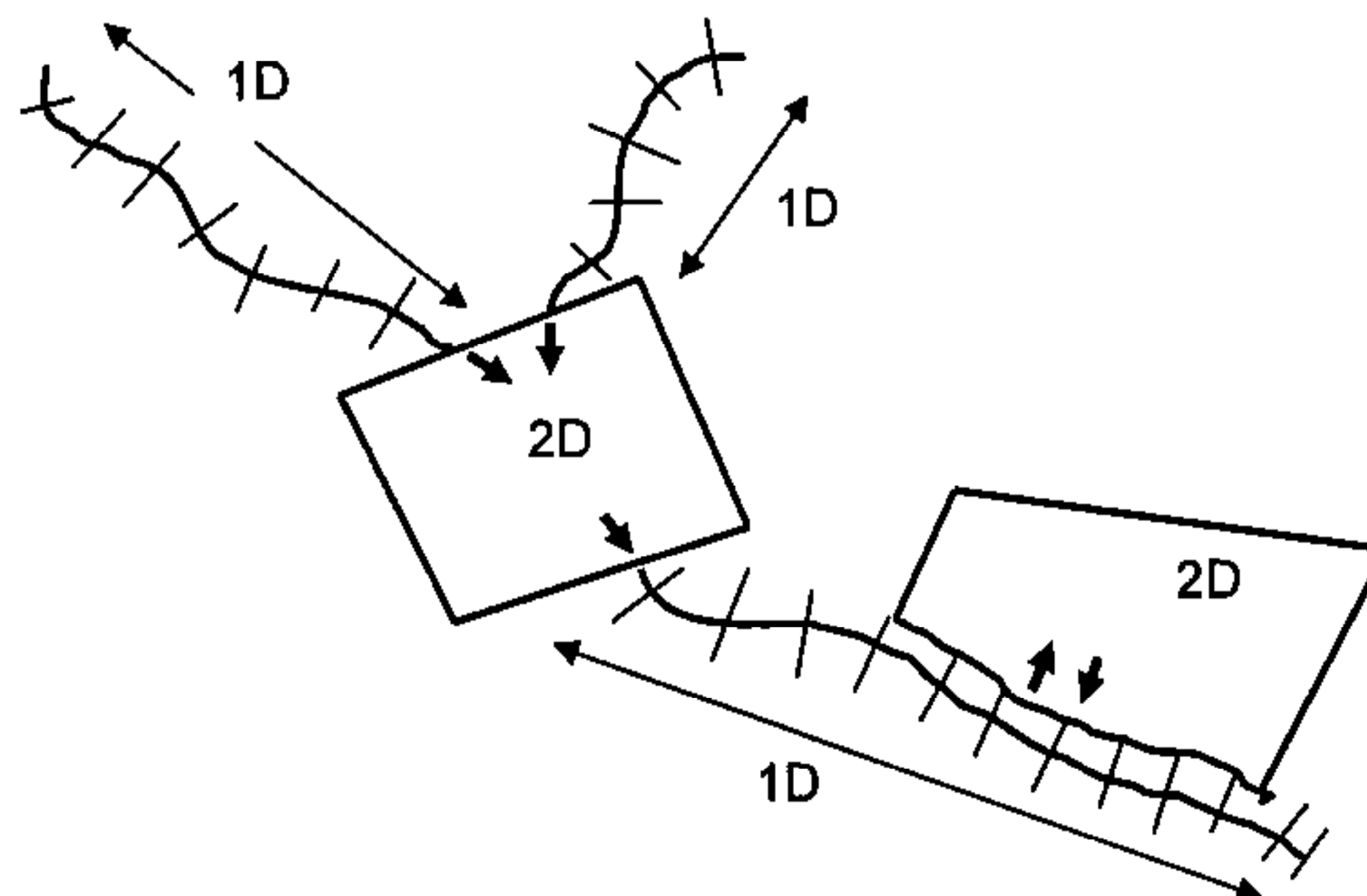


Figura 7.1. Descomposición del área de estudio en dominios unidimensionales o bidimensionales

7.2. Módulo bidimensional

El módulo bidimensional del modelo CARPA resuelve las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en un dominio discretizado por una malla de cálculo irregular y no estructurada con los esquemas numéricos descritos. En los esquemas de alta resolución se puede optar por cualquiera de las funciones de limitación presentadas: *Van Leer*, *Minmod*, *Superbee*, *Van Albada* o *Ultrabee*. Incorpora asimismo la posibilidad de considerar el efecto de la precipitación con distintas funciones de pérdidas, siendo por lo tanto también un modelo hidrológico de transformación lluvia-escorrentía

Como se ha comentado en el capítulo anterior, los volúmenes finitos pueden ser, para cualquiera de los esquemas numéricos implementados, cuadriláteros o triángulos, o combinaciones de ambos. Para ellos se puede utilizar una malla regular o irregular y, en este caso, puede ser estructurada o no estructurada. En la Figura 7.2 se puede ver el detalle de cuatro mallas utilizadas en distintas aplicaciones (cruce de calles, río Segre, río Llobregat y río Francolí).

En la modelación bidimensional, como condición inicial se deben imponer, en cada elemento de volumen, el calado (o alternatively la cota de la lámina de agua), y las dos componentes de la velocidad. El modelo permite empezar el cálculo con todo el dominio, o una parte del mismo, seco. Para los elementos secos se considera que el valor del calado y de las componentes de la velocidad son nulos.

Las condiciones de contorno que se pueden utilizar son las descritas en el apartado 4.3.5 y que se resumen en la Tabla 7.1. Por supuesto se pueden imponer distintas condiciones de contorno en distintos instantes de tiempo para dar condiciones variables como hidrogramas de entrada, o niveles de agua variables en la salida, entre los instantes dados el programa interpola linealmente.

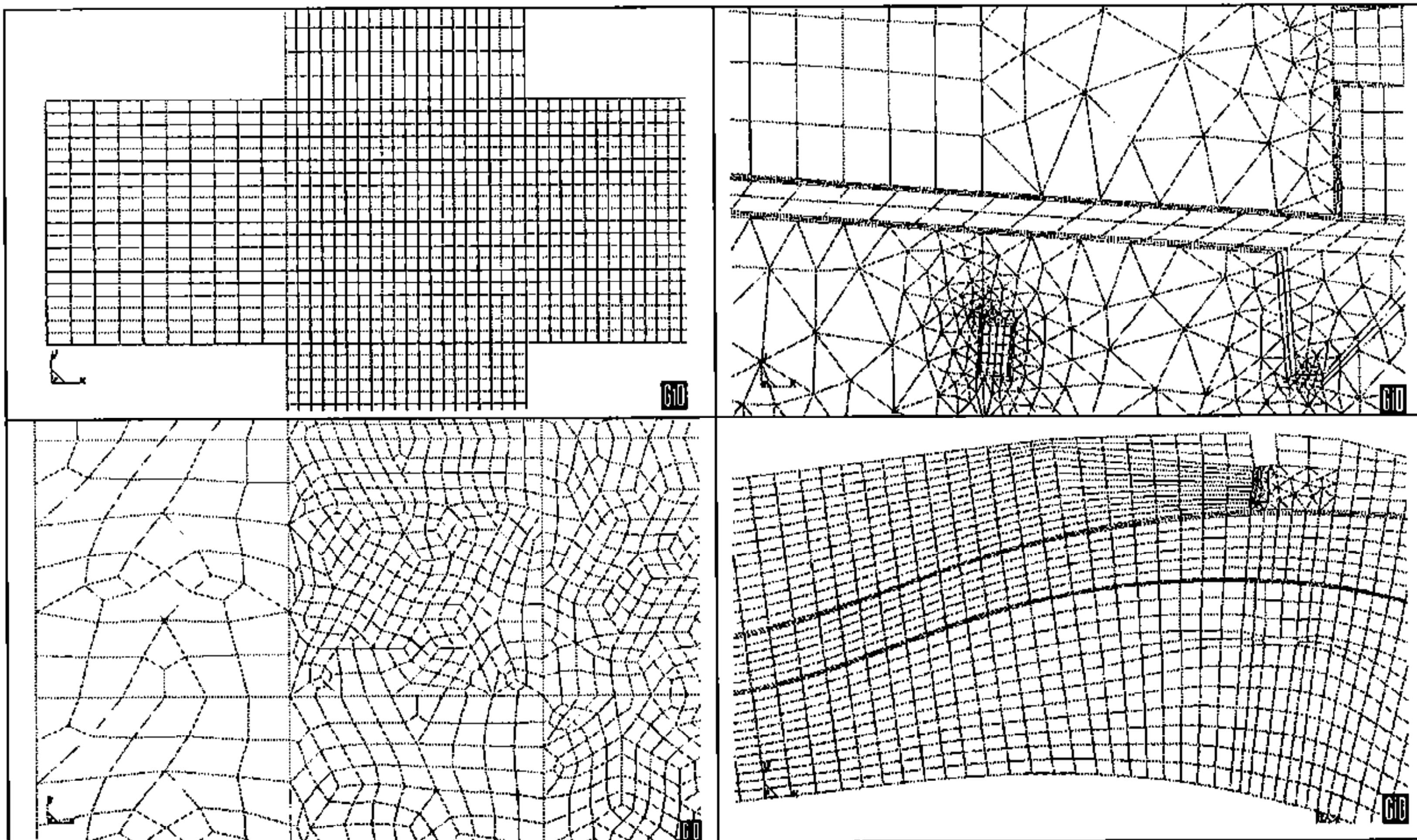


Figura 7.2. Detalle de distintas mallas utilizadas en las aplicaciones.

Extremo	Régimen hidráulico	Condición impuesta
Entrada	Rápido	1a. Calado y componentes de la velocidad según las direcciones normal y tangente al contorno. 1b. Calado y caudal específico según las direcciones normal y tangente al contorno.
	Lento	2a. Componentes de la velocidad según las direcciones normal y tangente al contorno. 2b. Caudal específico según las direcciones normal y tangente al contorno. 2c. Calado y componente de la velocidad en la dirección tangente al contorno.
Salida	Lento	3a. Calado 3b. Velocidad normal al contorno 3c. Caudal específico normal al contorno 3d. Relación caudal normal al contorno -calado
	Rápido	
Pared material		
Conexión con una zona modelada mediante aproximación unidimensional		

Tabla 7.1. Condiciones de contorno posibles en los límites de un dominio bidimensional

7.2.1. Mojado y secado

La correcta simulación del proceso de secado y mojado de elementos es fundamental para asegurar la conservación de la masa. Tradicionalmente la aproximación más utilizada para considerar este proceso consiste en dividir los elementos en dos categorías, secos y mojados, según la profundidad de agua en cada uno de ellos sea respectivamente menor o mayor que una cierta cantidad prefijada. Si el elemento está seco, no interviene en el cálculo. La diferencia entre los distintos métodos recae principalmente en cómo se detecta que un elemento vuelve a estar mojado. Por lo general se suele hacer o bien en función de los niveles de agua en elementos contiguos, o bien considerando en los elementos secos pero junto a un mojado la ecuación de continuidad pero no la de conservación de la cantidad de movimiento.

Sin embargo, estas metodologías presentan grandes problemas de conservación de la masa, acrecentados aun más si el fondo no es plano, por el efecto del término independiente de las ecuaciones.

En este trabajo se ha abordado el problema considerando tres posibles estados para cada elemento: *seco no mojado*, *seco mojado* o *mojado*, y según el estado del elemento se aborda su cálculo de una manera distinta:

- Se considera elemento *seco no mojado* aquel que tiene una profundidad de agua por debajo de cierta tolerancia, y además está rodeado por elementos secos (mojados o no). La tolerancia puede ser cero, aunque suele ser recomendable utilizar un valor algo mayor para evitar problemas con el término de fricción que pueden aparecer con profundidades muy pequeñas. En los elementos secos no mojados, las dos componentes de la velocidad son nulas y no se realiza ningún cálculo de propagación. El único cálculo que se realiza corresponde al posible aumento del volumen almacenado en el elemento por efecto de la precipitación, o disminución del mismo por efecto de las pérdidas consideradas en el modelo hidrológico.
- Se considera elemento *seco mojado* aquel que tiene una profundidad de agua inferior a la tolerancia (cuyo valor puede ser cero) y por alguno de sus lados conecta con un elemento mojado. Las dos componentes de la velocidad son nulas. Para cada lado del elemento, si el elemento contiguo está seco (mojado o no), el flujo numérico y el término independiente se consideran nulos. En cada incremento de tiempo, se permite que el volumen de agua en un elemento *seco mojado* aumente o disminuya por efecto de la precipitación o las pérdidas, pero a través de los contornos que conectan con un elemento mojado sólo se permite que entre agua, nunca que salga. Si a través de dicho lado el volumen de agua tiende a disminuir, el flujo numérico y término independiente se igualan a cero, pues no tiene sentido que un elemento seco se seque más. De esta manera sólo habrá flujo a través de los contornos que conecten con un elemento mojado, y sólo en el caso que el flujo sea entrante.

- Se considera elemento *mojado* aquel que tiene una profundidad de agua mayor que una cierta tolerancia. En los lados de un elemento mojado comunes a otro elemento mojado, el cálculo se realiza normalmente según lo expuesto en el capítulo anterior. En los lados que conectan con un elemento seco (que será *seco mojado* por estar al lado de un mojado) puede haber flujo saliente, pero naturalmente no puede haber flujo entrante desde un elemento seco.

Para calcular el flujo en un contorno entre elemento mojado y otro seco, y asegurar la conservación de la masa, se aplica la idea presentada por Brufau, (2000) distinguiendo según $(h + z_0)$ sea menor en el elemento seco que en el mojado, o a la inversa Figura 7.3.

En el caso $(h + z_0)_{seco} < (h + z_0)_{mojado}$ el cálculo se realiza normalmente según lo expuesto en el capítulo anterior. En cambio, en el caso $(h + z_0)_{seco} > (h + z_0)_{mojado}$ hay que considerar una corrección en el cálculo de la pendiente de fondo (que interviene en el cálculo de $\tilde{\beta}$ en (4.163)) para asegurar la conservación de la masa (y evitar por ejemplo que, en la situación de agua en reposo, el cálculo produzca flujo hacia el elemento mojado por efecto de la pendiente de fondo).

Si denotamos con i al elemento mojado y con j al seco, la corrección para el cálculo de Δz_{ij} queda:

$$\begin{aligned} \Delta z_{ij} &= z_j - z_i & \text{si } (h + z_0)_j < (h + z_0)_i \\ \Delta z_{ij} &= h_i - h_j & \text{si } (h + z_0)_j > (h + z_0)_i \end{aligned} \tag{7.1}$$

De esta manera, en un estado estacionario con lámina de agua horizontal, la pendiente de fondo en el término independiente compensará exactamente el gradiente de calados, y el estado de agua en reposo se mantendrá. Esto no ocurriría sin la corrección mencionada.

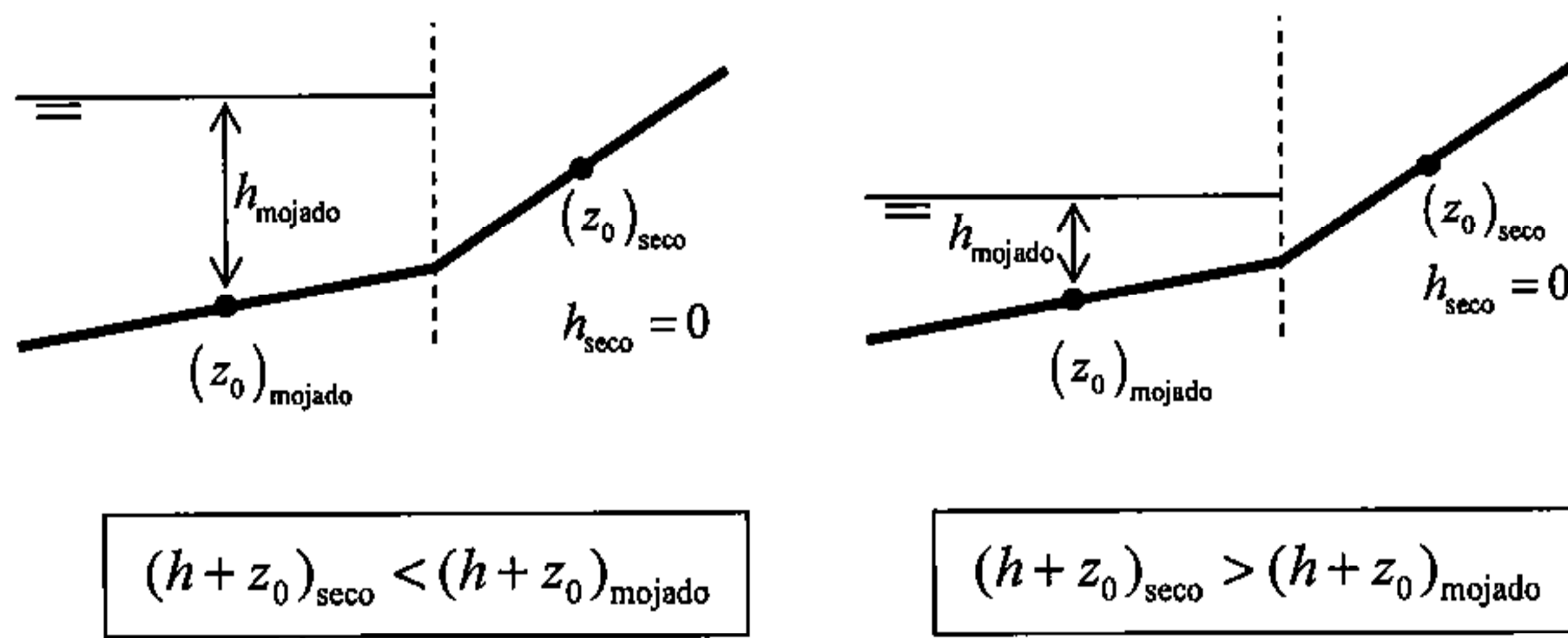


Figura 7.3. Mojado y secado de elementos

7.2.2. Modelo hidrológico

Aunque el objetivo del trabajo no es el de la modelación hidrológica, debido a que la formulación en volúmenes finitos permite implementar de fórmula muy simple una aportación o detracción de volumen en cada elemento de la malla, se ha implementado en el módulo bidimensional del modelo CARPA la posibilidad de considerar el efecto de la precipitación, así como un modelo de pérdidas simple para considerar la infiltración de agua en el terreno, u otros procesos (evapotranspiración, interceptación, acumulación en pequeñas depresiones). Para ello se deben modificar las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (2.47) alterando el término independiente H , que queda como:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I - L \\ gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

siendo I la intensidad de precipitación y L las pérdidas, ambas en volumen por unidad de tiempo y unidad de área. Con la discretización en volúmenes finitos utilizada, la inclusión de estos términos, que afectan tan solo la ecuación de continuidad, en el esquema numérico es inmediata. La descomposición del término independiente (5.18) quedará ahora

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^3 \quad (7.3)$$

con \mathbf{H}^1 y \mathbf{H}^2 dados por (5.19) y (5.20) y

$$\mathbf{H}^3 = \begin{pmatrix} I - L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

De esta manera, \mathbf{H}_i^* en (5.21) quedará como $\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{*1} + \mathbf{H}_i^{*2} + \mathbf{H}_i^{*3}$ con $\mathbf{H}_i^{*3} = V_i \mathbf{H}_i^3$.

Para la definición de la precipitación es necesario dar el valor de la intensidad en una serie de instantes de tiempo en cada uno de los elementos de la malla de cálculo. En los instantes intermedios, el modelo interpola linealmente con los valores dados. De esta manera, es posible definir una precipitación variable tanto temporalmente como espacialmente.

Las funciones de pérdidas implementadas en el modelo consisten en el modelo lineal (que considera una abstracción inicial P_0 que debe satisfacerse para que empiece la esorrentía, y a continuación unas pérdidas continuas ϕ constantes, el método del Número de Curva del SCS, el de Horton y el de Green-Ampt para infiltración.

Se dispone pues de una herramienta para transformación lluvia-caudal de onda completa, que se puede utilizar como alternativa a los métodos clásicos (hidrograma unitario en subcuencas y propagación por Muskingum). Al no tener que recurrir a hidrogramas unitarios sintéticos los resultados pueden reflejar mucho mejor la geometría de la cuenca, para la propagación no hace falta estimar parámetros sino que se realiza a partir de la geometría y rugosidad de la cuenca y cauce, se pueden modelar precipitaciones variables temporal y espacialmente, y mediante el software de pre y post proceso utilizado (GiD) se puede incorporar fácilmente la información topográfica a partir de modelos digitales de terreno y representar gráficamente los resultados (hidrológicos e hidráulicos).

7.3. Módulo unidimensional

El módulo unidimensional resuelve las ecuaciones del régimen variable en lámina libre en una dimensión, pudiéndose escoger para un cauce de geometría cualquiera y coeficiente de rugosidad variable dentro de una misma sección transversal. Se puede escoger entre el esquema de primer orden o el de alta resolución (WAF TVD) y, con este último, al igual que en el caso 2D, se puede optar por las siguientes funciones de limitación: *Van Leer, Minmod, Superbee, Van Albada* o *Ultrabee*. Se permite asimismo la simulación del avance sobre fondo seco, así como el secado completo del cauce. En el módulo 1D no tiene demasiado sentido la incorporación de un modelo hidrológico de transformación lluvia-escorrentía, ni se ha implementado un modelo de pérdidas.

Como condiciones iniciales se requiere conocer el valor del caudal y calado en cada una de las secciones de estudio. Para ello, con el valor del caudal y las condiciones de contorno en el primer instante de tiempo, el modelo realiza un cálculo en régimen permanente gradualmente variado para determinar el resto de variables hidráulicas en cada sección. El cálculo se realiza integrando la ecuación de conservación de la energía con el conocido método paso a paso, considerando secciones compuestas, según el método explicado en (DEHMA, 1996).

La distintas posibilidades de condiciones de contorno implementadas en el modelo, y que se pueden imponer en cada extremo de los tramos de río tratados unidimensionalmente, se han descrito en detalle en el apartado 4.5 del *Capítulo 5*. y se resumen en la Tabla 7.2. Estas condiciones se imponen en unos instantes de tiempo determinados. En el resto, las condiciones de contorno se obtienen por interpolación lineal.

Extremo	Régimen hidráulico	Condición impuesta
Entrada	Rápido	1a. Caudal y calado 1b. Velocidad y calado
	Lento	2a. Caudal 2b. Velocidad 2c. Calado
Salida	Lento	3a. Caudal 3b. Velocidad 3c. Calado 3d. Relación caudal-calado
	Rápido	
Conexión con una zona modelada mediante aproximación bidimensional		

Tabla 7.2. Condiciones de contorno posibles en un extremo de un tramo unidimensional

7.3.1. Mojado y secado

En el módulo 1D se ha implementado un proceso de secado análogo al del caso bidimensional, considerando tres posibles estados para cada elemento: *seco no mojable, seco mojable* o *mojado*:

- Se considera elemento *seco no mojable* aquel que tiene una profundidad de agua por debajo de cierta tolerancia (cuyo valor puede ser cero), y además no tiene al lado ningún elemento mojado. En ellos el caudal es nulo y no se realiza ningún cálculo.
- Se considera elemento *seco mojable* aquel que tiene una profundidad de agua inferior a la tolerancia y al menos en un lado tiene un elemento mojado. El caudal es nulo. Si por un lado conecta con un elemento seco (mojable o no), el flujo numérico y el término independiente en dicho lado se consideran nulos. En un elemento mojable sólo se permite que entre agua, nunca que salga.
- Se considera elemento *mojado* aquel que tiene una profundidad de agua mayor que una cierta tolerancia. En los lados comunes a otro elemento mojado, el cálculo se realiza normalmente según lo

expuesto en el capítulo anterior. En los lados que conectan con un elemento seco puede haber flujo saliente.

En un contorno entre elemento seco y mojado, se aplica el mismo procedimiento visto en el cálculo bidimensional para asegurar la conservación de la masa, distinguiendo según $(y+z_0)$ sea menor en el elemento seco que en el mojado, o a la inversa. En el caso $(h+z_0)_{\text{seco}} < (h+z_0)_{\text{mojado}}$ el cálculo se realiza normalmente, pero si $(h+z_0)_{\text{seco}} > (h+z_0)_{\text{mojado}}$ hay que considerar la corrección de la pendiente de fondo (que interviene en $\bar{\beta}$ (en (4.48)):

$$\begin{aligned} \Delta z_{ij} &= z_j - z_i & \text{si } (h+z_0)_j < (h+z_0)_i \\ \Delta z_{ij} &= h_i - h_j & \text{si } (h+z_0)_j > (h+z_0)_i \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde i indica el elemento mojado y j el seco. De esta manera, en un estado estacionario con lámina de agua horizontal, la pendiente de fondo en el término independiente compensará el gradiente de calados y el estado de agua en reposo se mantendrá.

7.3.2. Cauces compuestos

El modelo considera que una sección transversal del río está constituida por un cauce central y una llanura de inundación (que puede existir o no) a cada lado. Asimismo, cada una de estas tres zonas puede estar formada por subzonas con distinta rugosidad. En cada una de las tres zonas (I: llanura izquierda, C: cauce central y D: llanura derecha) el coeficiente de rugosidad de Manning, n_I , n_C , n_D se puede calcular a partir del coeficiente de rugosidad en las subzonas que la constituyen:

$$n_I = \frac{A_I R_{h,I}^{2/3}}{\sum_i \frac{1}{n_{I_i}} A_{I_i} R_{h,I_i}^{2/3}} ; \quad n_C = \frac{A_C R_{h,C}^{2/3}}{\sum_j \frac{1}{n_{C_j}} A_{C_j} R_{h,C_j}^{2/3}} ; \quad n_D = \frac{A_D R_{h,D}^{2/3}}{\sum_k \frac{1}{n_{D_k}} A_{D_k} R_{h,D_k}^{2/3}} \quad (7.6)$$

donde A indica área, R_h radio hidráulico y n el coeficiente de rugosidad de Manning. Los subíndices I , C y D indican respectivamente la llanura izquierda, el cauce central y la llanura derecha, mientras que los subíndices I_i , C_j y D_k indican los tramos de distinta rugosidad de cada una de estas zonas. A su vez, el coeficiente de rugosidad de la sección (coeficiente de rugosidad equivalente n_{eq}) se calcula como:

$$n_{eq} = \frac{A R_h^{2/3}}{\frac{1}{n_I} A_I R_{h,I}^{2/3} + \frac{1}{n_C} A_C R_{h,C}^{2/3} + \frac{1}{n_D} A_D R_{h,D}^{2/3}} \quad (7.7)$$

Esta formulación (fórmula de Lotter (Chaudhry, 1993)), se deduce a partir de la hipótesis que el caudal en toda la sección es la suma del caudal en cada subzona, y que en toda la sección existe una única pendiente motriz.

Otra posible formulación, también implementada en el modelo, es el método de Horton que propone una única velocidad media en toda la sección. A partir de esta hipótesis el equivalente a las ecuaciones (7.6) y (7.7) es:

$$n_I = \left(\frac{\sum_i P_{I_i} n_{I_i}^{3/2}}{P} \right)^{2/3} ; \quad n_C = \left(\frac{\sum_j P_{C_j} n_{C_j}^{3/2}}{P} \right)^{2/3} ; \quad n_D = \left(\frac{\sum_k P_{D_k} n_{D_k}^{3/2}}{P} \right)^{2/3} \quad (7.8)$$

$$n_{eq} = \left(\frac{P_I n_I^{3/2} + P_C n_C^{3/2} + P_D n_D^{3/2}}{P} \right)^{2/3} \quad (7.9)$$

donde P indica el perímetro mojado.

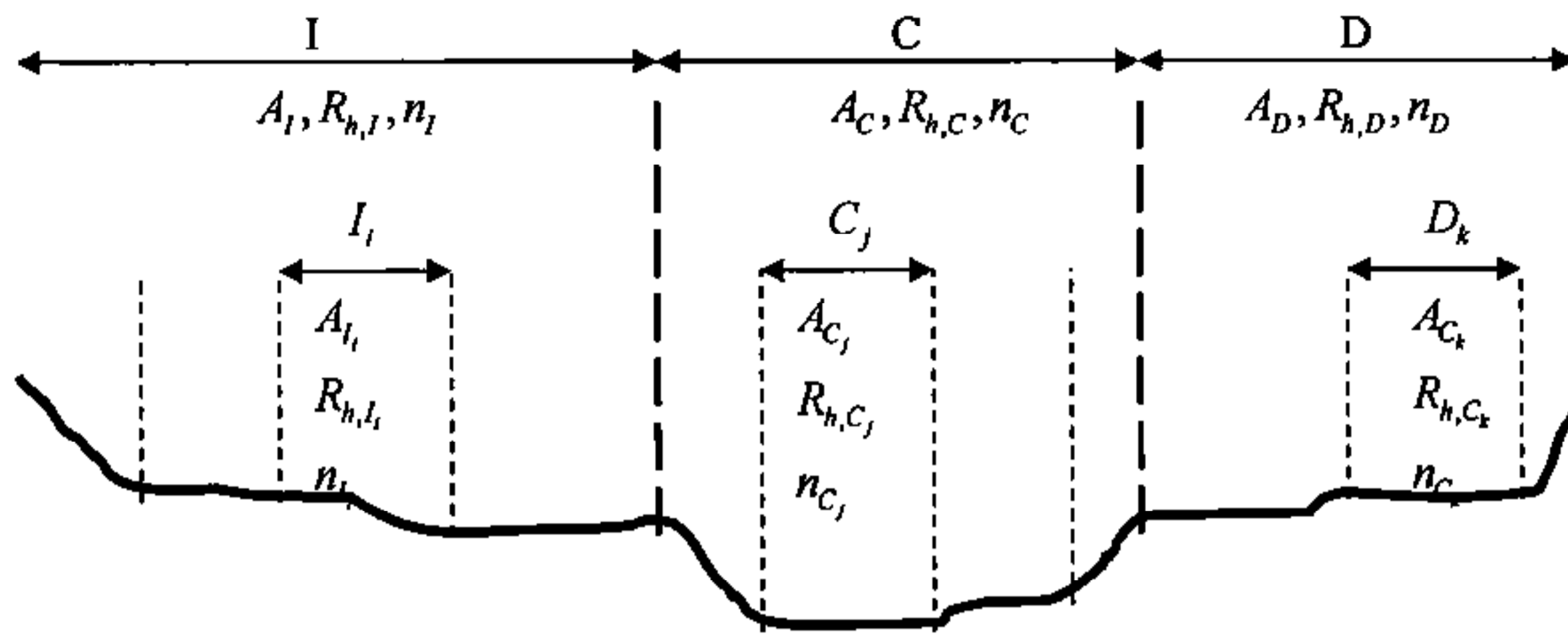


Figura 7.4. Sección compuesta

7.4. Ensamblaje módulos 1D y 2D

CARPA integra la resolución de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales y bidimensionales en un único modelo. En el capítulo anterior se han descrito los modelos numéricos en los dominios unidimensionales y bidimensionales, así como las capacidades del modelo realizado. En los próximos apartados se describe como se lleva a cabo el cálculo en las fronteras entre dominio unidimensional y bidimensional. Se han considerado dos tipos de frontera distintos (Figura 4.1):

1. Cambio de dominio en el sentido del flujo.
2. Desbordamiento lateral del río

7.4.1. Cambio de dominio en el sentido del flujo

Se produce en el extremo aguas abajo o aguas arriba de un tramo unidimensional en contacto con una zona de flujo bidimensional, como una confluencia, un encauzamiento que finaliza en una gran llanura, un tramo de río con estructuras que alteran la unidimensionalidad del flujo, etc. Como la aproximación unidimensional implica que la velocidad del agua tiene la dirección normal a una sección transversal, se supone que el flujo es normal al contorno de entrada del dominio bidimensional.

En un contorno 1D-2D en el sentido del flujo, habrá una serie de elementos del dominio 2D que conectarán con el tramo 1D y, más concretamente, con el cauce central, la llanura izquierda, o la llanura derecha (Figura 7.5). La discretización en volúmenes finitos en una dimensión implica que cada sección es representativa de un tramo de río o celda 1D, y los valores de las variables en la sección se pueden entender como los valores promedio en la celda.

La base del esquema de cálculo consiste en considerar en el modelo el cambio de dominio como un contorno más. Al ser el esquema explícito, para calcular las variables dentro del dominio 2D en un instante de tiempo se requiere el valor de las variables en el instante anterior dentro del dominio y en los elementos ficticios que conforman su contorno. Para una entrada a la zona 2D desde un tramo 1D se utilizará, como condición de contorno, el valor de las variables en el último tramo de río modelado unidimensionalmente, mientras que para una salida se utilizarán como condición de contorno las variables del primer tramo del río 1D aguas abajo.

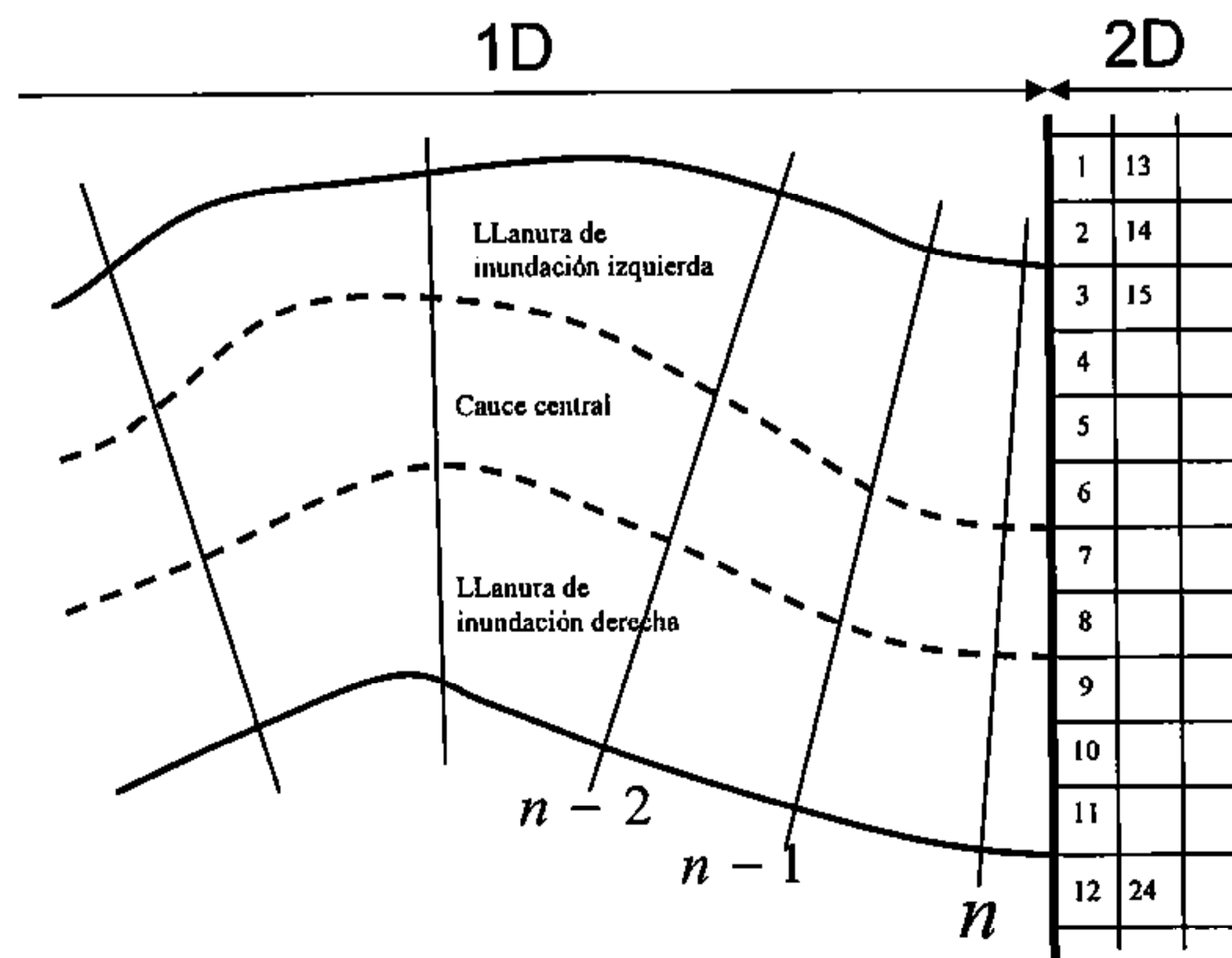


Figura 7.5. Esquema de conexión 1D-2D

Así, las condiciones de contorno que se imponen en el contorno 2D son la cota de la lámina de agua, la velocidad, y que la corriente sea perpendicular al contorno. La cota de la lámina de agua y la velocidad se obtienen directamente de la última sección del tramo 1D: la primera es un resultado directo del cálculo mientras que para la segunda se considera la velocidad en la llanura izquierda, cauce central, o llanura derecha, dependiendo de con cual de estas tres zonas esté en contacto el elemento en cuestión. La velocidad en cada una de las tres zonas se obtiene como el cociente del caudal de cada zona dividida por el área, y el caudal se obtiene con la hipótesis de igual pendiente motriz en cauce y llanuras:

$$v_I = \frac{Q_I}{A_I} ; Q_I = Q \frac{\frac{1}{n_I} A_I R_{h,I}^{2/3}}{\frac{1}{n_{eq}} A R_h^{2/3}} \quad (7.10)$$

$$v_C = \frac{Q_C}{A_C} ; Q_C = Q \frac{\frac{1}{n_C} A_C R_{h,C}^{2/3}}{\frac{1}{n_{eq}} A R_h^{2/3}} \quad (7.11)$$

$$v_D = \frac{Q_D}{A_D} ; Q_D = Q \frac{\frac{1}{n_D} A_D R_{h,D}^{2/3}}{\frac{1}{n_{eq}} A R_h^{2/3}} \quad (7.12)$$

donde v_I , v_C y v_D son respectivamente la velocidad en la llanura izquierda, cauce central y llanura derecha.

En los dominios 1D la condición de contorno aguas arriba se obtiene de los elementos de la zona 2D en contacto con este extremo, y lo mismo para el extremo aguas abajo. Para ello es necesario determinar una cota de agua y un caudal en el elemento de contorno a partir de los valores en el dominio 2D. El caudal se obtiene integrando el caudal unitario en todo el contorno común a los dominios 1D y 2D, y la cota de la lámina de agua con un promedio, ponderado según la longitud de los lados de los elementos, de la cota de la lámina de agua en los elementos 2D:

$$Q_{n+1} = \sum_{k=1}^{n_e} h_k u_{n,k} l_k \quad (7.13)$$

$$z_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n_e} z_k l_k}{\sum_{k=1}^{n_e} l_k} \quad (7.14)$$

siendo Q_{n+1} y z_{n+1} el caudal y la cota de la lámina de agua en el elemento de contorno 1D, y h_k , $u_{n,k}$, l_k y z_k el calado, la velocidad normal al contorno, la longitud de contorno y la cota de la lámina de agua de cada elemento del dominio 2D en contacto con el dominio 1D.

En la Figura 7.6 se puede apreciar la situación relativa de los elementos de contorno 1D y 2D en relación a los límites de los dominios. Se aprecia que el elemento de contorno 1D cae dentro del dominio 2D, concretamente se solapa con los elementos bidimensionales más próximos al contorno, y por lo tanto en él se impondrán como condiciones los valores de las variables en estos elementos 2D. Análogamente, los elementos de contorno 2D se solapan con el elemento unidimensional adyacente al contorno, de manera que en ellos las variables tomarán el valor de la última sección 1D.

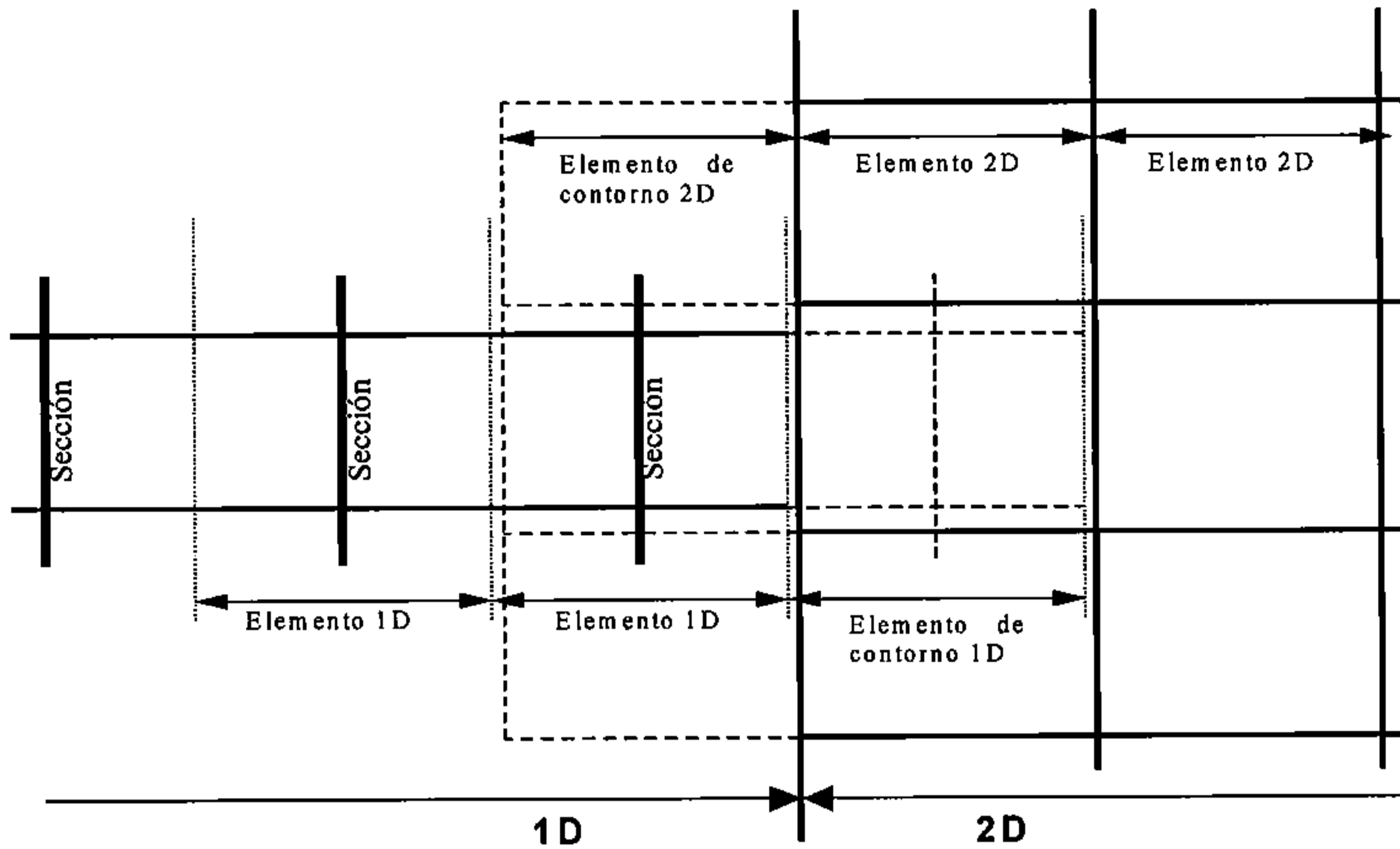


Figura 7.6. Situación relativa de elementos de contorno 1D-2D

7.4.2. Desbordamiento lateral del río

Se produce un desbordamiento lateral del río cuando la cota de la lámina de agua supera los límites de la sección que define el cauce, y pasa a inundar la llanura adyacente. En este caso, se han considerado dos tipos de conexión entre el río y la llanura adyacente: conexiones tipo vertedero y conexiones tipo río (Bladé et al. 1994).

1. **Conexión tipo vertedero.** Indicada cuando el desbordamiento se produce por encima de una mota o elevación, natural o artificial, y modelada con la ecuación de un vertedero de pared delgada, con caída libre o sumergida. Si z_w es la cota del vertedero, z_1 la cota de la lámina de agua en el lado aguas arriba del vertedero (dominio 1D o 2D) y z_2 la cota de la lámina de agua en el otro dominio, la ecuación utilizada para calcular el caudal unitario de transferencia, considerando la posible sumergencia del vertedero, es:

$$\begin{cases} q = Cd(z_1 - z_w)^{3/2} & \text{si } \frac{2}{3}(z_1 - z_w) > (z_2 - z_w) \\ q = \frac{3^{3/2}}{2} Cd(z_2 - z_w)(z_1 - z_2)^{1/2} & \text{si } \frac{2}{3}(z_1 - z_w) < (z_2 - z_w) \end{cases} \quad (7.15)$$

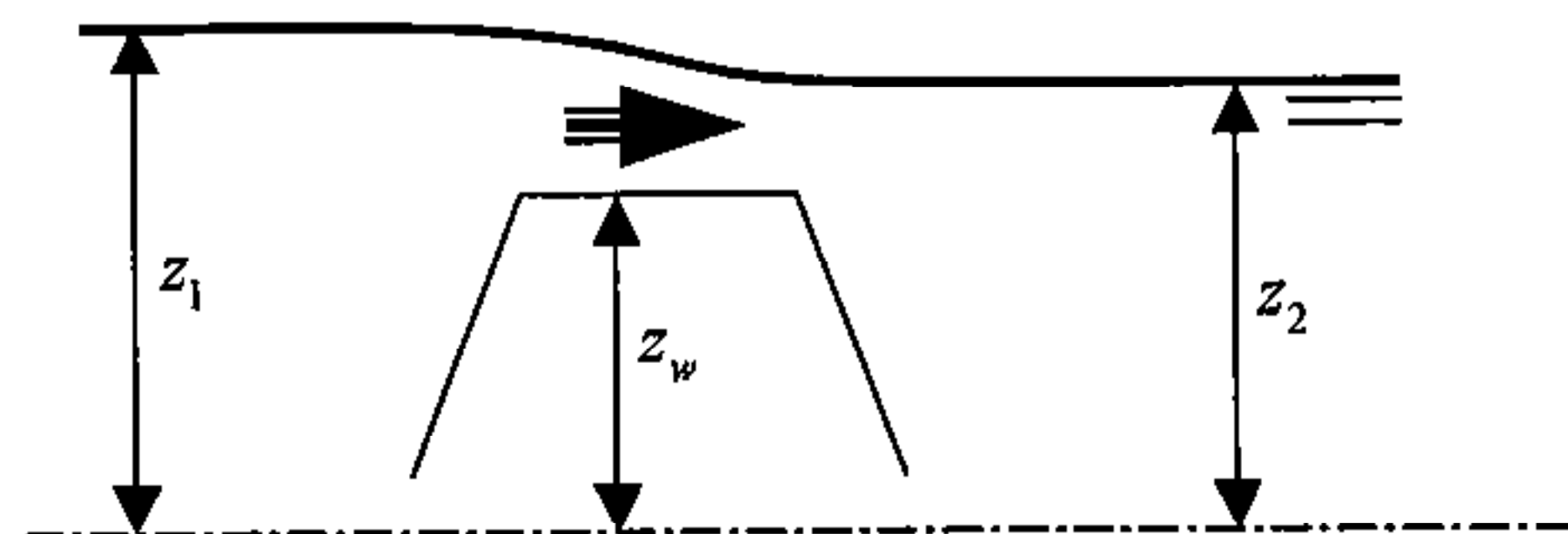


Figura 7.7. Conexión tipo vertedero entre dominios 1D y 2D

2. **Conexión tipo río.** Indicada cuando la llanura de inundación es una prolongación del cauce, sin existir un claro obstáculo entre una y otro. El caudal de transferencia viene condicionado principalmente por la rugosidad del fondo, y se evalúa con la fórmula de Manning:

$$q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} i^{1/2} \quad (7.16)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning, A el área de la sección de transferencia, R_h su radio hidráulico e i la pendiente de la lámina de agua entre el centro del elemento 2D (z_2) y el río (z_1).

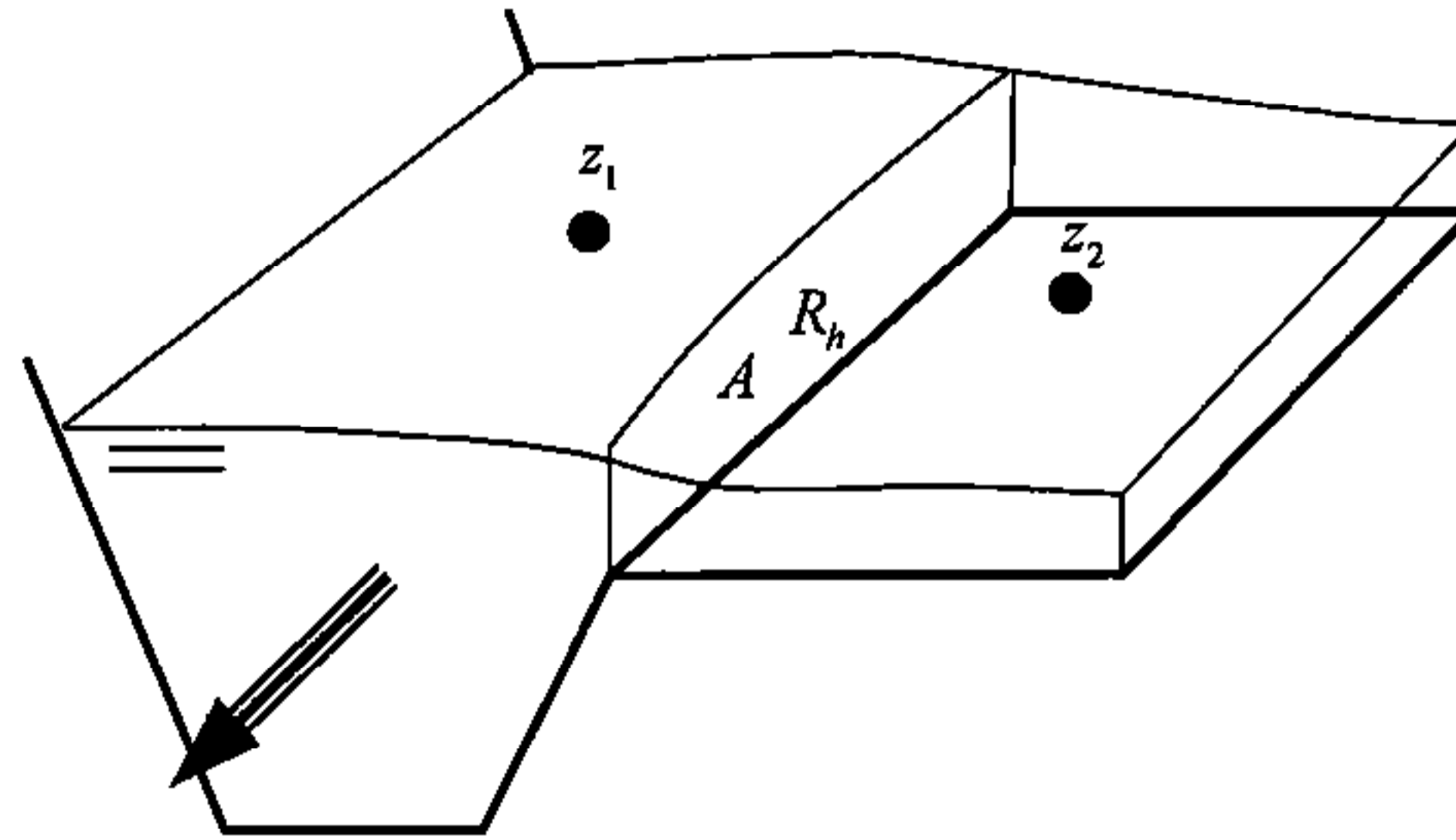


Figura 7.8. Conexión tipo río entre dominios 1D y 2D

7.4.2.1 Desbordamiento lateral del río en el dominio unidimensional

El hecho de considerar el desbordamiento lateral del río modifica el término independiente en las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales (2.51)(2.52), quedando (Chaudrhy, 1993):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} q_l \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) + v_x q_l \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

donde q_l es el caudal lateral por unidad de longitud de entrada al río, y v_x es la componente de la velocidad de dicho caudal en la dirección del eje del río. En este trabajo se ha supuesto que la dirección del flujo lateral es perpendicular al eje del río, por lo que $v_x = 0$. De esta manera el desbordamiento lateral modifica únicamente la ecuación de continuidad. Con esta modificación, el tratamiento del término independiente de la ecuación (4.84) debería modificarse según:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^3 \quad (7.18)$$

con

$$\mathbf{H}^3 = \begin{pmatrix} q_l \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Así, la ecuación (4.94) quedaría

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{1*} + \mathbf{H}_i^{2*} + \mathbf{H}_i^{3*} \quad (7.20)$$

con

$$\mathbf{H}_i^{3*} = \Delta x \mathbf{H}_i^3 \quad (7.21)$$

El valor de q_l se calcula con (7.15) o (7.16) según sea el caso si el flujo es de río a llanura. Con un flujo de la llanura hacia el río el caudal de transferencia se obtiene del cálculo bidimensional imponiendo la cota de agua en

el río si el régimen es lento, suponiendo calado crítico si la llanura funciona en régimen lento pero el nivel de agua en el río está por debajo de la sección de transferencia, o directamente del cálculo bidimensional si ésta funciona en régimen rápido.

7.4.2.2 Desbordamiento lateral del río en el dominio bidimensional

Para el dominio bidimensional, en un contorno correspondiente a un desbordamiento lateral del río habrá que imponer un caudal de transferencia y una cota de lámina de agua en los elementos del contorno.

Para una conexión tipo río, la ecuación (7.16) se emplea siempre que exista un flujo del río hacia la llanura, pero, en caso de que el flujo sea en sentido inverso, dicha ecuación sólo se utiliza en el caso en que el régimen hidráulico en la sección de transferencia calculado con (7.16) sea subcrítico. Si el cálculo indica flujo supercrítico, la condición que se utiliza en el contorno 2D es de calado crítico (como el modelo automáticamente utiliza el número de condiciones necesarias según el tipo de flujo, en el caso en que el flujo de la llanura a río sea supercrítico por la topografía de la propia llanura, el programa no requiere de ninguna condición de contorno y por lo tanto no utiliza la condición de calado crítico mencionada).

Así, para una conexión tipo río, las condiciones impuestas en cuanto a caudal y calado en cada caso son las detalladas en la Tabla 7.3.

Sentido del Flujo	Régimen hidráulico	Condiciones de contorno
Río a Llanura	Lento	Se impone el caudal según (7.16)
	Rápido	Se impone el caudal y la cota de agua: caudal según (7.16) y cota de agua igual a la del río
Llanura a río	Lento	1. Si la cota de agua en el río es mayor que la cota del calado crítico en la sección de transferencia: se impone la cota de agua en el río. 2. En caso contrario: Relación caudal-cota de agua dada por el calado crítico en la sección de transferencia
	Rápido	No es necesario imponer condición de contorno

Tabla 7.3. Condiciones de contorno en el dominio bidimensional en una conexión tipo río.

7.5. Preproceso y postproceso

Para la simulación de la propagación de una avenida por una red de cauces, realizando en algunas zonas un cálculo unidimensional y en otras un cálculo bidimensional, se requiere un considerable esfuerzo para la gestión de la información (topográfica y de usos del suelo), para preparar las mallas de cálculo (sección es transversales en zonas 1D, cuadriláteros o triángulos en zonas 2D), así como para asignar condiciones iniciales, condiciones de contorno, rugosidades, parámetros para la estimación de pérdidas de precipitación, etc. Para ello, y para la visualización de resultados, ha resultado muy útil el programa GiD (www.gidhome.com) desarrollado por el CIMNE (Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria). GiD consiste en una interfaz para el tratamiento de datos de geometría, generación de mallas de cálculo y visualización de resultados que puede ser adaptado a cualquier programa de cálculo basado en elementos finitos, volúmenes finitos o diferencias finitas, y personalizado al gusto del usuario.

La adaptación de GiD para CARPA se ha realizado dentro del proyecto Ramflood, subvencionado por el 5º Programa Marco de la Comunidad Europea. Tanto el CIMNE como la UPC forman parte del consorcio del proyecto. CARPA ha sido el modelo utilizado en las simulaciones hidráulicas realizadas en el proyecto. Para la adaptación se ha creado nuevo código específico para GiD, así como herramientas auxiliares para tratar con los formatos utilizados por los Sistemas de Información Geográfica (GIS).

Finalmente, CARPA ha quedado como un paquete totalmente integrado, desde el cual se puede importar la geometría, definir zonas de estudio 1D y zonas 2D, construir respectivamente secciones transversales y mallas de cálculo, asignar condiciones iniciales, rugosidades, condiciones de contorno, datos de precipitación y pérdidas, ejecutar los cálculos y visualizar los resultados, tanto numéricamente como gráficamente.

7.5.1. Importación de geometría a partir de modelos digitales del terreno

Para la importación de geometría a partir de modelos digitales del terreno se ha implementado la importación a partir de dos formatos muy extendidos: archivos DXF y archivos en formato *grid ASCII* de Arc/Info. El objetivo de la importación es, a partir de los datos topográficos en uno de estos formatos, construir una superficie, o varias conectadas entre ellas, que reproduzcan de la forma más fiel posible la superficie del terreno. A continuación, el mallado y asignación de condiciones y propiedades a estas superficies permitirá generar los archivos de entrada para CARPA. GiD ya incorpora por defecto la importación a partir de archivos DXF, por lo que el trabajo se ha centrado en la importación de archivos Arc/Info en formato *grid ASCII*, llamados también archivos DTM (de *Digital Terrain Model*).

Los archivos DTM, en formato *grid ASCII* de Arc/Info, constan de una cabecera y, a continuación, los valores (en nuestro caso de cota) en una malla rectangular equiespaciada. Para importar la información en GiD se ha escrito nuevo código (en lenguaje *tcl*) que básicamente lee los archivos DTM, construye líneas paralelas con los puntos con misma coordenada *y* para, a partir de dichas líneas, construir una superficie para cada archivo importado. Para que la importación sea útil para generar una malla de cálculo, las distintas superficies creadas deben tener un contorno común. También es conveniente poder decidir el tamaño de superficie a importar ya que en la generación de malla se podrá escoger un tipo de elemento (triángulo o cuadrilátero) y un tamaño del mismo para cada superficie, pero no se pueden crear elementos de distinto tipo y tamaño en una única superficie.

Los archivos DTM suministrados por los servicios cartográficos tienen unos tamaños predeterminados y se suelen solapar entre ellos, por lo que no sirven directamente para generar mallas de cálculo. Por ello se ha realizado una pequeña aplicación (*DTM_maker*), también integrada en GiD, que a partir de una lista de archivos DTM crea otro conjunto de archivos, del tamaño que se especifique y eliminando solapes entre ellos.

Por otro lado, los archivos DTM tienen un cierto paso de malla. En algunos casos este paso puede ser muy pequeño (por ejemplo 1 m) y, si el área de estudio es grande (cientos de km^2), la cantidad de información si se importan los archivos completos puede ser excesiva (en el sentido que la malla de cálculo tendrá un paso mucho mayor y no aprovechará toda la información importada) y puede llegar a saturar la memoria del ordenador. Por este motivo, la importación de archivos DTM en GiD se ha implementado con la posibilidad de escoger un cierto paso de malla para la importación, de manera que se realiza ya un filtrado de la cantidad de información con que se trabajará.

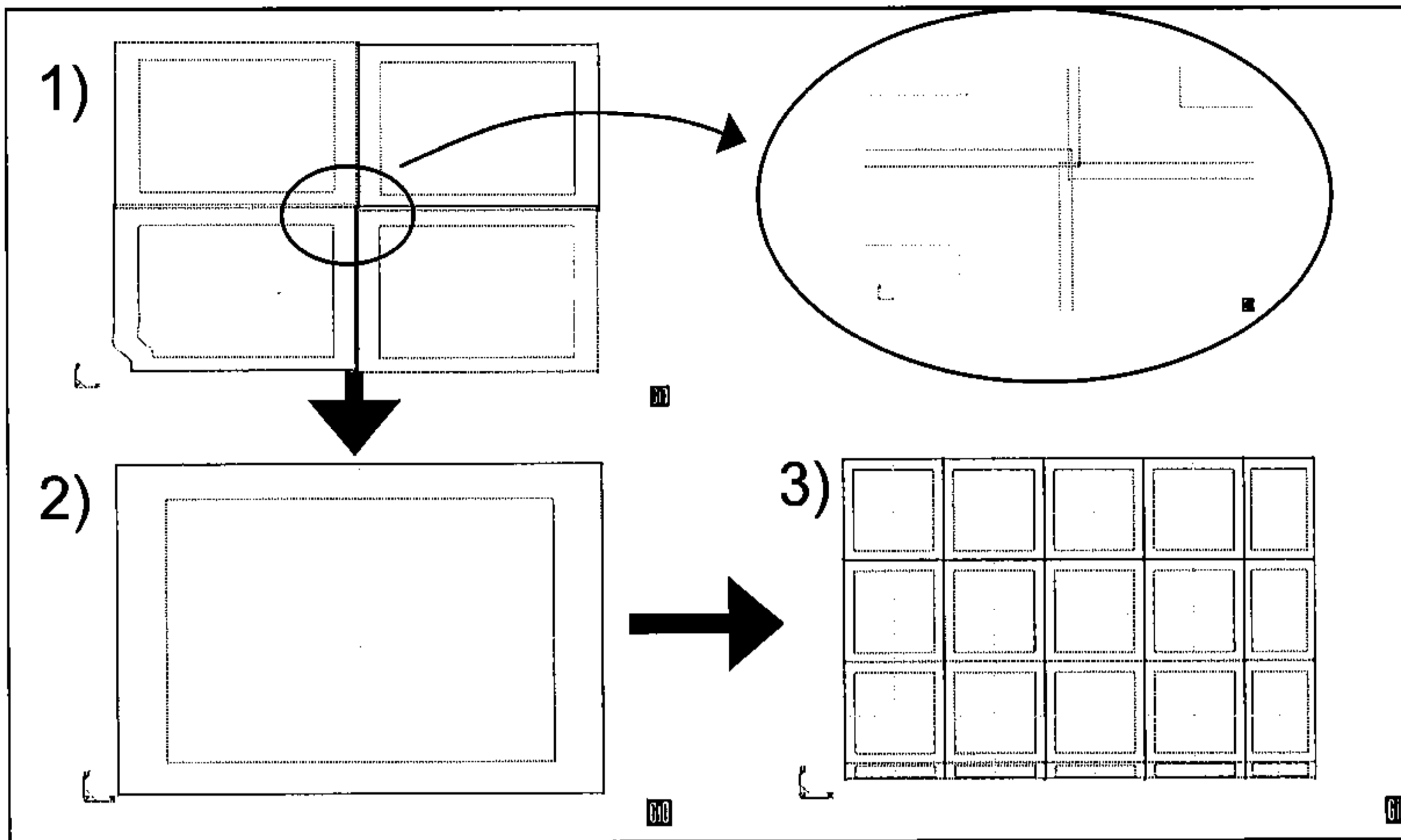


Figura 7.9. Pasos para importar archivos DTM: 1)Archivos originales, 2)Eliminación de solapes, 3)Importación con dimensiones especificadas

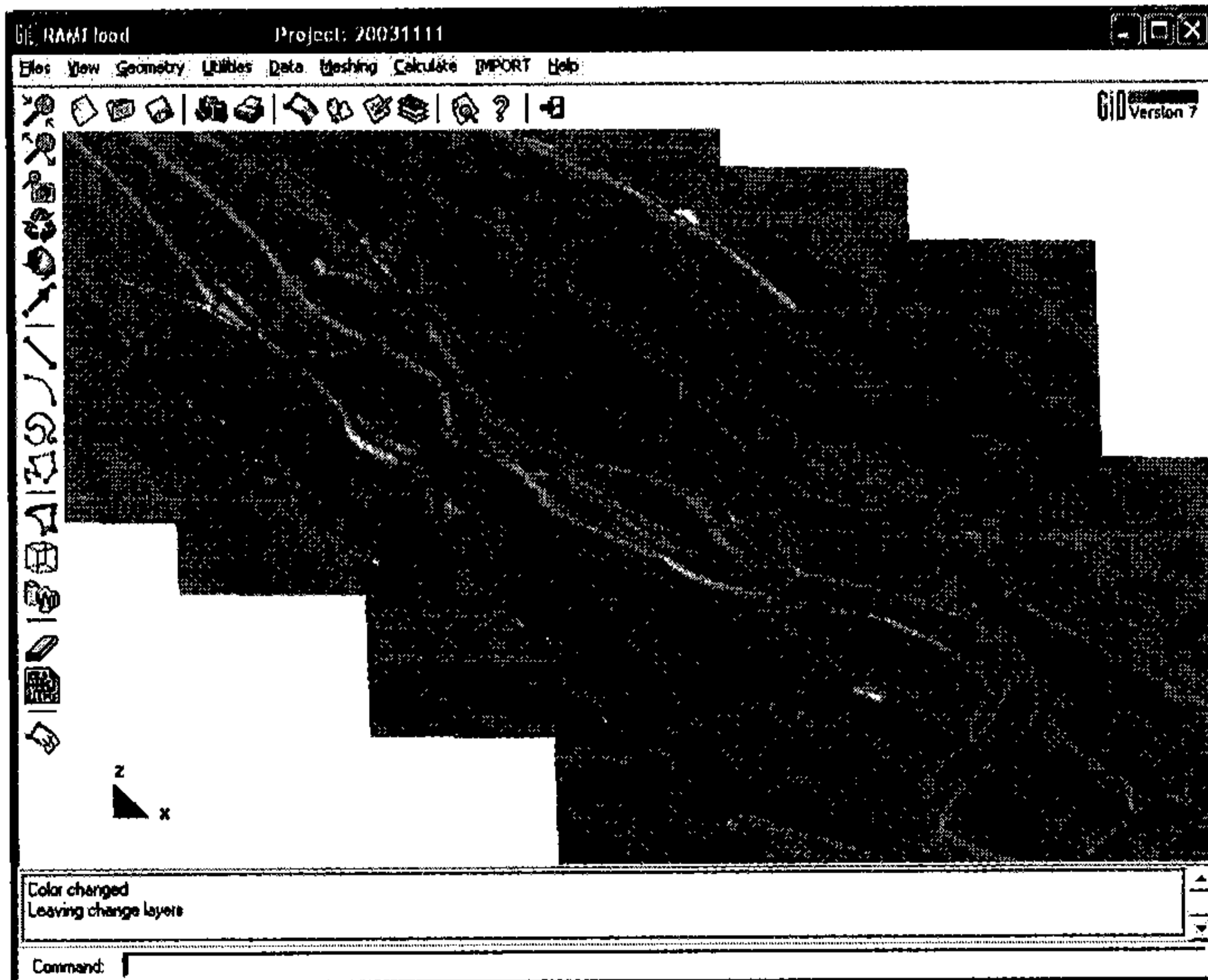


Figura 7.10. Interfaz GiD para CARPA con la visualización de una geometría importada a partir de archivos DTM en formato grid ASCII de Arc/Info

Es de destacar que la importación de archivos DTM en formato *grid ASCII* de Arc/Info produce, para una zona determinada, mejores superficies que la importación de archivos DXF, debido a la mayor regularidad espacial de puntos importados. En los archivos DXF la información topográfica suele venir como curvas de nivel, por lo que habrá zonas con mucha densidad de información, y zonas llanas con puntos muy separados. A la hora de construir una superficie que se aproxime de la mejor manera posible a todos los puntos, esta falta de regularidad hace que en las zonas con poca densidad de puntos la geometría creada pueda diferir mucho de la realidad.

Naturalmente, en el caso de dominios formados por figuras geométricas simples, la geometría se puede construir directamente en pantalla en base a puntos, líneas y superficies.

7.5.2. Elaboración de mallas de cálculo y asignación de propiedades y condiciones de contorno

Para la elaboración de la malla de cálculo en las zonas 2D se debe especificar el tipo de elemento en cada superficie (triángulo o cuadrilátero), el tamaño del mismo, y si la malla se desea estructurada o no. GiD dispone de tres malladores distintos RFast, RSurf y 2Dumg a escoger.

En los tramos 1D, para obtener las secciones transversales es necesario en primer lugar generar la malla 2D y, a continuación, marcar en planta sobre la misma el eje del río y las secciones transversales que se desean mediante una serie de líneas. El programa automáticamente creará secciones transversales con los puntos de intersección entre lados de elementos 2D y las líneas.

En los capítulos de verificación y aplicaciones se pueden ver tramos unidimensionales discretizados con secciones transversales y distintas mallas de cálculo bidimensionales.

Las condiciones de contorno y demás propiedades (rugosidad, condición inicial) se pueden asignar sobre la geometría o sobre la malla según se desee. Para ello en la personalización de GiD se han incluido una serie de menús específicos para las asignaciones.

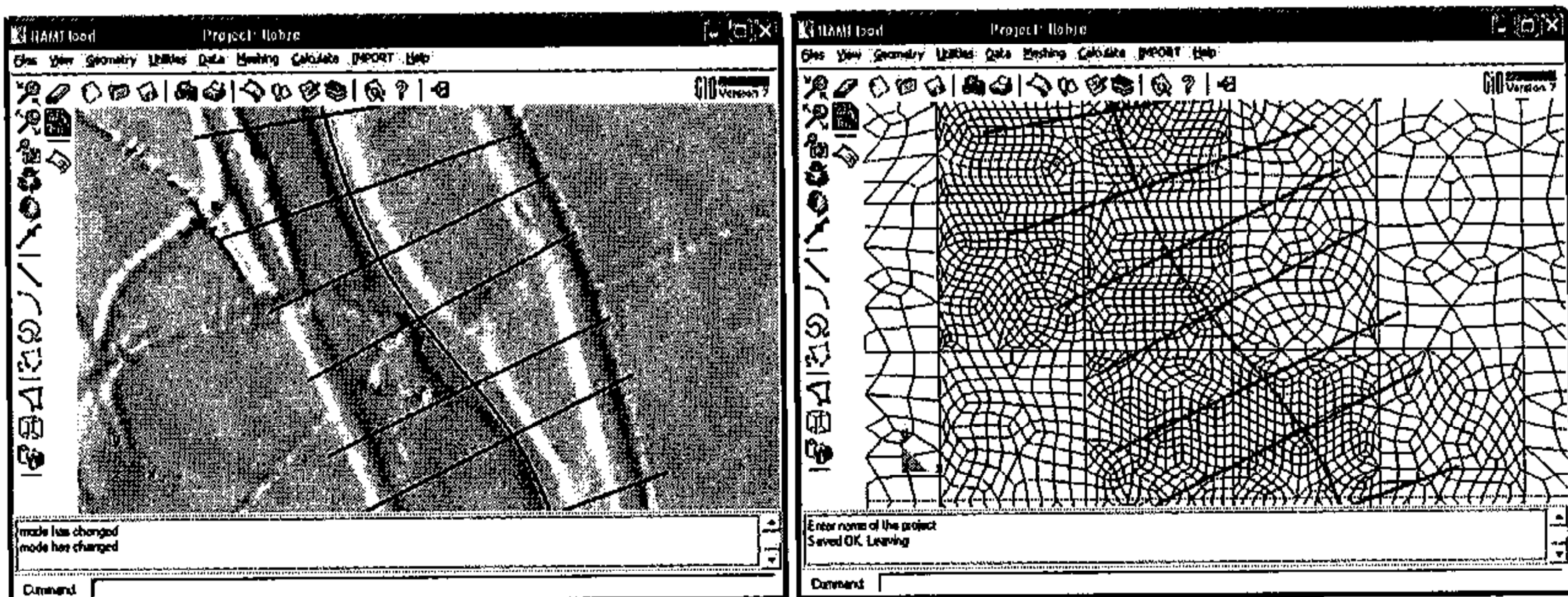


Figura 7.11. Creación de secciones transversales a partir de la malla 2D.

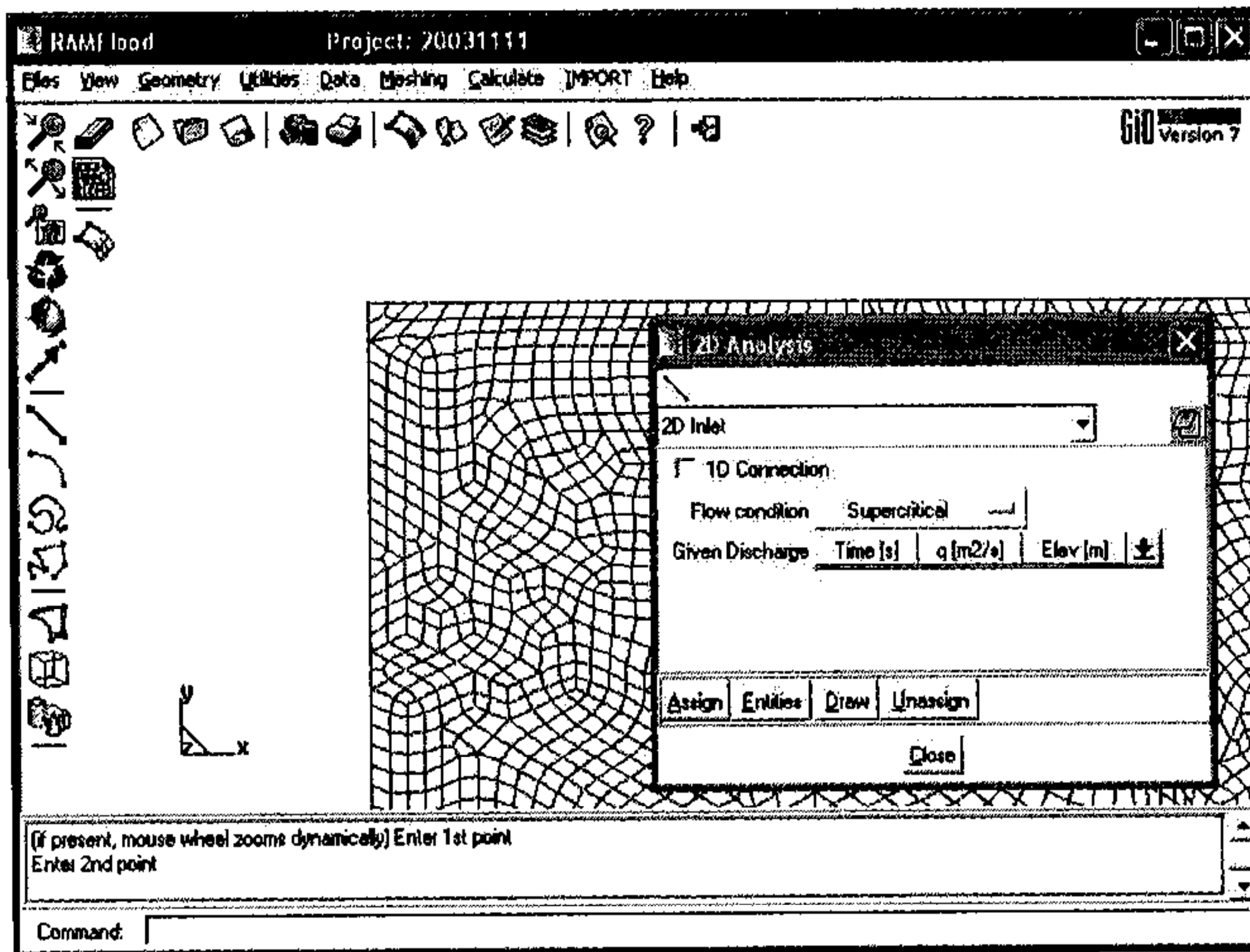


Figura 7.12. Ejemplo de menú desplegable para asignación de condiciones de contorno 2D.

7.5.3. Visualización de resultados

GiD dispone de un gran abanico de posibilidades para visualizar los resultados en dos dimensiones. Para la visualización de un resultado (por ejemplo velocidad) existen las siguientes opciones:

1. Vectores. Se representa el módulo, dirección y sentido en forma de vector.
2. Contornos.
3. Contornos suavizados
4. Isolíneas
5. Rangos
6. Máximo y mínimo

Para las variables vectoriales, se puede escoger la visualización de una componente o del módulo. GiD tiene también la opción de producir animaciones con cualquier visualización.

Los resultados que se obtienen directamente de CARPA son calados y campos de velocidad, sin embargo, en el postproceso se pueden obtener otros resultados derivados de los anteriores. En este sentido, se ha incorporado la posibilidad de visualizar los resultados no como variables hidráulicas, sino según el criterio de riesgo asociado a una inundación utilizado por la Agència Catalana de l'Aigua (ACA 2003). Este criterio clasifica una inundación en un punto como de riesgo elevado, riesgo moderado o sin riesgo según el valor del calado, de la velocidad, y el producto de ambos.

Riesgo	Criterio
Elevado	$v > 1\text{ m/s}$ o $y > 1\text{ m}$ o $vy > 0.5\text{ m}^2/\text{s}$
Moderado	$v > 0.4\text{ m/s}$ o $y > 0.4\text{ m}$ o $vy > 0.08\text{ m}^2/\text{s}$
Sin riesgo	en caso contrario

Tabla 7.4. Criterios de riesgo de la Agència Catalana de l'Aigua.

Las distintas posibilidades de visualización e interpretación de resultados finalmente implementadas en GiD son:

1. Variables geométricas:
 - a. Cota del terreno
2. Variables hidráulicas
 - a. Calado
 - b. Velocidad
 - c. Caudal específico
 - d. Número de Froude
 - e. Cota de la lámina de agua
 - f. Coeficiente de rugosidad de Manning
3. Variables hidrológicas
 - a. Intensidad de precipitación
 - b. Tasa de infiltración
4. Variables de riesgo
 - a. Riesgo
 - b. Tiempo de inundación
5. Mapas de máximos
 - a. Calado
 - b. Velocidad
 - c. Caudal específico

Ejemplos de visualización de resultados se encuentran en los capítulos 8. y 9. .

8. Verificación

8.1. Introducción

En el presente capítulo se realiza la verificación de los esquemas numéricos desarrollados e incorporados en el programa CARPA. Se presentan algunos de los casos utilizados en Bladé (2005) donde se efectúa una verificación exhaustiva en una y dos dimensiones, tanto en régimen permanente como variable.

Como se ha comentado los esquemas numéricos unidimensionales basados en la técnica de los volúmenes finitos encontrados en la bibliografía, suelen ser incapaces de modelar correctamente el régimen permanente gradualmente variado con geometrías irregulares. Por ello, en primer lugar se verifica el esquema numérico unidimensional desarrollado en este trabajo en régimen permanente, comparando los resultados obtenidos utilizando los esquemas de primero orden (método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe, o esquema de Roe) y WAF TVD en una dimensión con los que se obtienen mediante el cálculo en régimen permanente gradualmente variado con el conocido método *paso a paso*, y también, para algunos casos especiales para los que es posible encontrar una solución analítica, con ésta. Los mismos ejemplos se utilizan para la verificación en régimen permanente de los esquemas bidimensionales.

A continuación se comprueba la conservación de volumen en el proceso de secado-mojado en dos dimensiones, con geometrías con fondo no plano, para luego comprobar el buen funcionamiento del esquema numérico en los distintos tipos de conexión entre dominios unidimensionales y bidimensionales.

Para régimen no permanente, se verifica la capacidad de los dos esquemas, unidimensional y bidimensional, para simular el fenómeno de la rotura ideal de una presa. A continuación se comparan los resultados con los del conocido esquema de Preissmann, aplicado a un tramo del río Ebro entre el embalse de Flix y el azud de Xerta.

Finalmente, se realiza una comparación numérico-experimental del esquema bidimensional, utilizando experiencias de laboratorio tanto en régimen variable (concretamente la propagación de un resalto móvil) como en régimen permanente.

8.2. Régimen permanente. Una dimensión

8.2.1. Canal rectangular con ancho y cota de solera variable

Se ha escogido esta geometría utilizada por distintos autores (García-Navarro y Vazquez-Cendón (1999), Villanueva (1999), Hubbard y García-Navarro (2000), Tseng (2004)) debido a la gran variabilidad de la misma. La geometría se presenta en la Figura 8.1. Este ejemplo se utiliza en los tres primeros trabajos mencionados para demostrar que los esquemas numéricos mantienen la situación de agua parada y nivel constante, mientras que en el último se aplica a régimen permanente, aunque con un caudal muy bajo.

Debido a que las características del flujo utilizadas por Tseng (2004) son relativamente poco exigentes, se ha utilizado la misma geometría pero con un caudal mayor, de $200 \text{ m}^3/\text{s}$, una condición de contorno de 12 m de calado y un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.020 , con una separación entre secciones de 2.5 m .

Los resultados con el esquema de primer orden de precisión se presentan en la Figura 8.2 y la Figura 8.3 mientras que en la Figura 8.4 y Figura 8.5 se presentan los resultados con el esquema WAF TVD y la función de limitación Minmood. En la Figura 8.3 y la Figura 8.5 también se hace la comparación con la lámina de agua calculada con método *paso a paso* para régimen permanente gradualmente variado. Se aprecia la capacidad de simulación del régimen permanente de los esquemas. En la Figura 8.2 las láminas de agua con el método *paso a paso* y el esquema de Roe (primer orden) se confunden, por lo que en la Figura 8.3 (derecha) se presenta el detalle de las diferencias entre ambas, que no supera en ningún caso los 3 mm . Los mismos resultados se presentan en la Figura 8.4 y Figura 8.5 para el esquema WAF TVD. En este caso, como en el resto del capítulo si no se dice lo contrario, se ha utilizado la función de limitación Minmood.

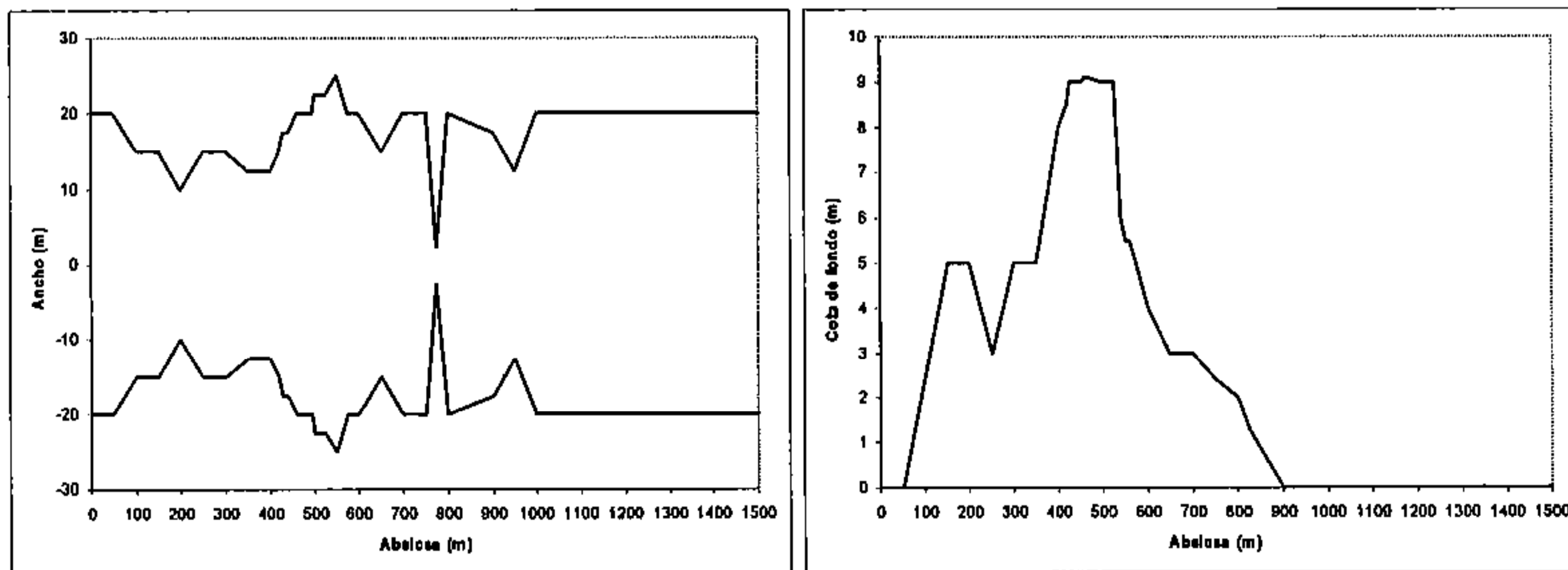


Figura 8.1. Planta y perfil del canal rectangular no prismático.

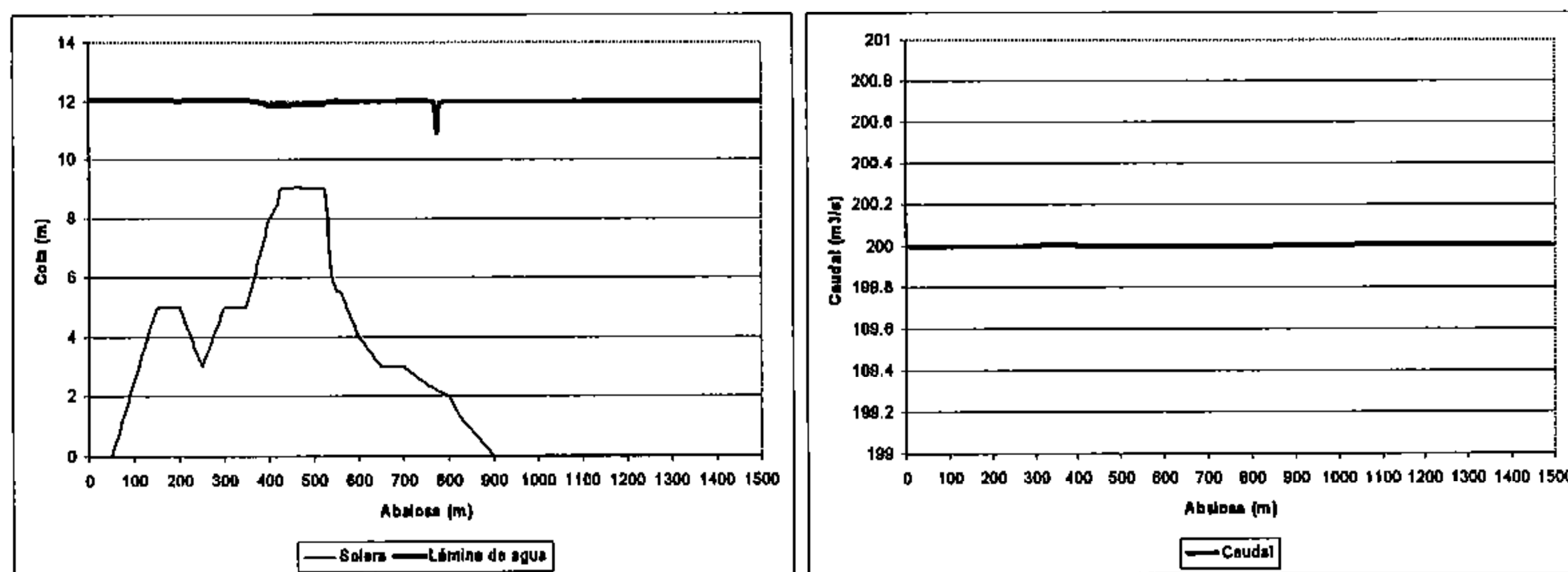


Figura 8.2. Régimen permanente en canal rectangular no prismático. Primer orden de precisión. Caudal de $200 \text{ m}^3/\text{s}$, condición de contorno de 12 m de calado.

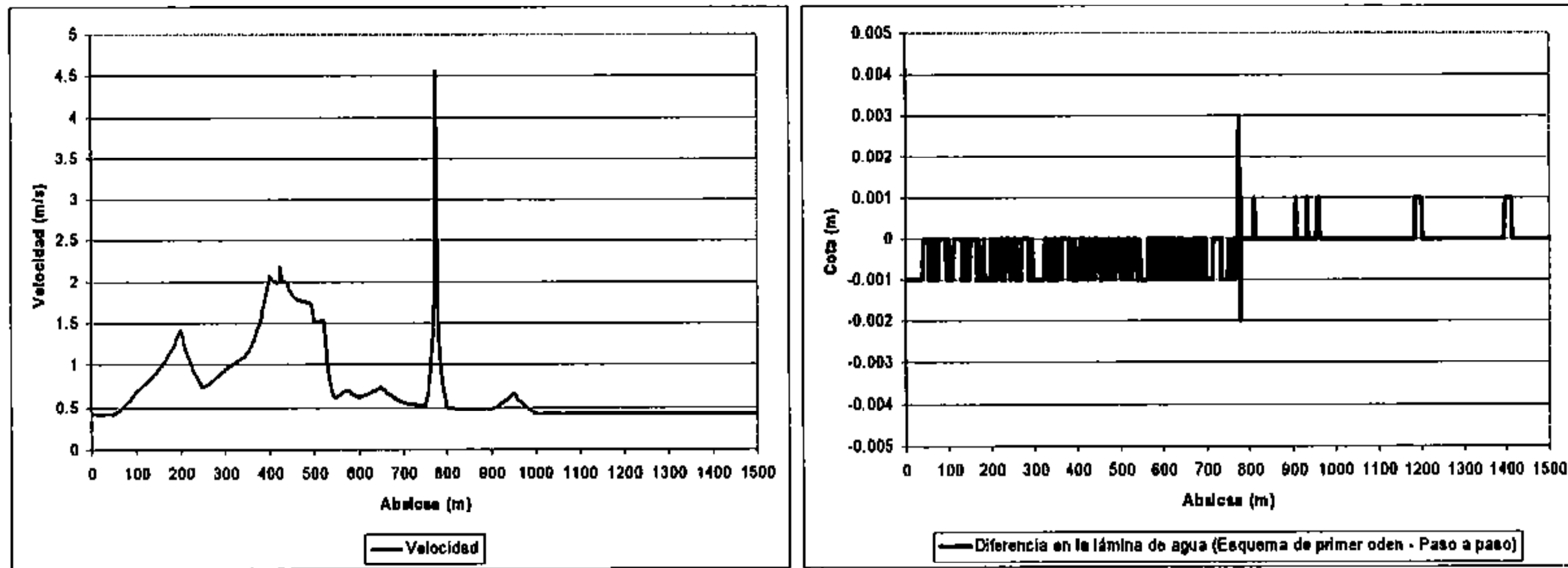


Figura 8.3. Régimen permanente en canal rectangular no prismático. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema de primer orden de precisión y el método paso a paso.

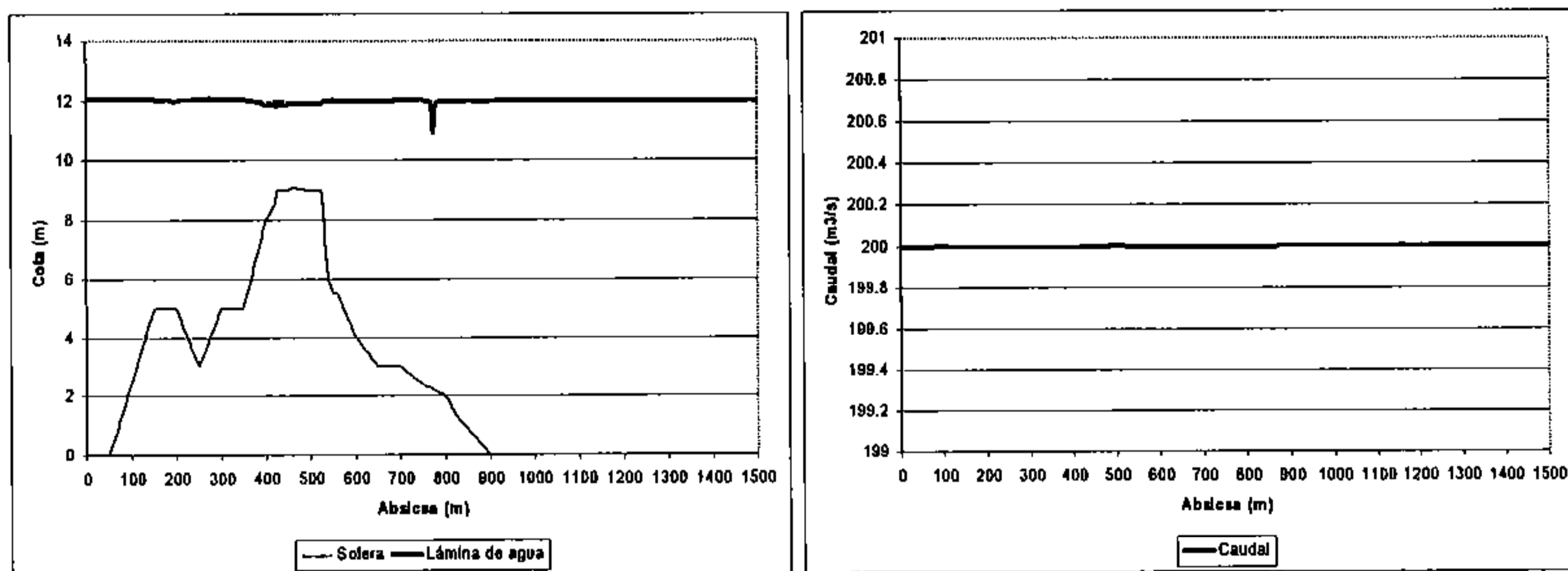


Figura 8.4. Régimen permanente en canal rectangular no prismático. Esquema WAF TVD. Caudal de 200 m³/s, condición de contorno de 12 m de calado.

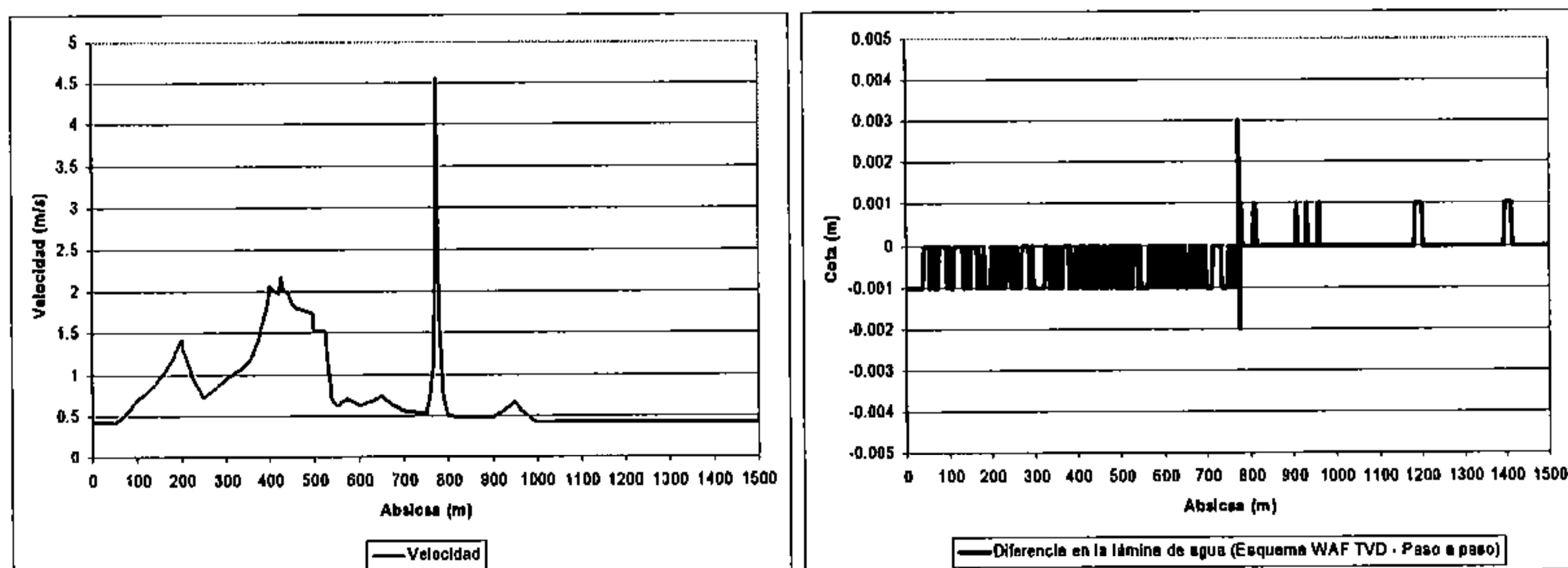


Figura 8.5. Régimen permanente en canal rectangular no prismático. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema WAF TVD y el método paso a paso.

8.2.2. Sobreelevación de solera suave

En este apartado se utiliza un ejemplo tomado de la tesis de Alcrudo (1992), consistente en una sobreelevación suave de la solera de un canal prismático. Utilizando las condiciones de contorno adecuadas, se consigue que el flujo sobre el obstáculo sea en régimen lento, rápido, transcrito de lento a rápido, o transcrito con resalto. En

todos los casos se ha considerado un ancho de canal de 10 m y no se ha considerado fricción. Los resultados se presentan para el esquema WAF TVD por no apreciarse prácticamente diferencias entre éste y el esquema de primer orden. En cada caso se presentan los resultados en cota de lámina de agua, caudal, velocidad, y diferencia entre la cota de la lámina de agua con el esquema WAF TVD y el método *paso a paso*.

Régimen lento

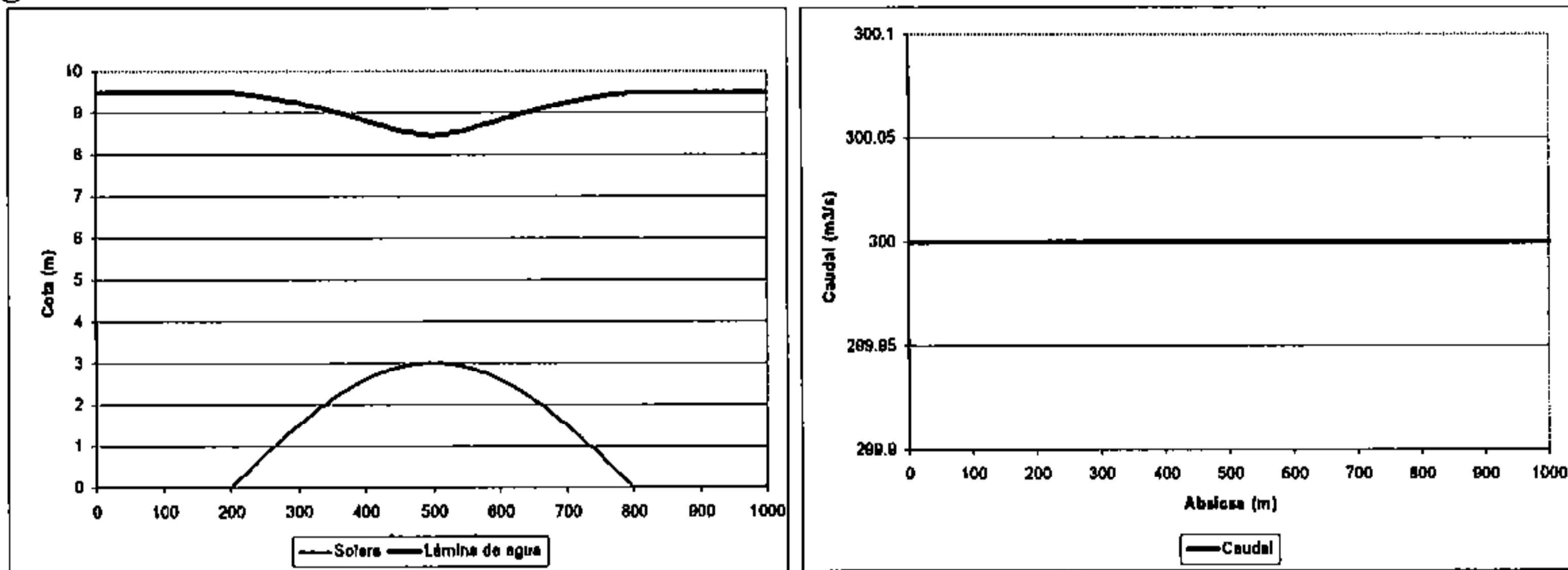


Figura 8.6. Régimen permanente subcrítico en una sobreelevación de solera suave. Esquema WAF TVD. Caudal de 300 m³/s, condición de contorno de 9.5 m de calado.

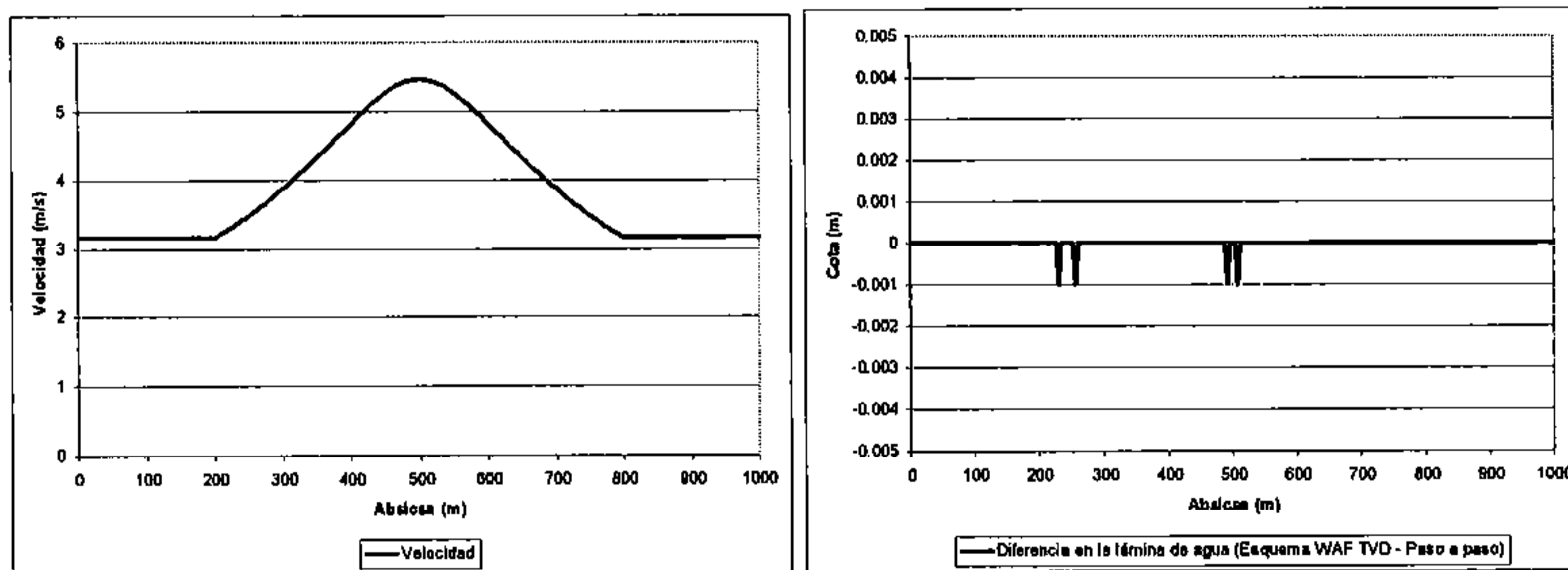


Figura 8.7. Régimen permanente subcrítico en una sobreelevación de solera suave. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema WAF TVD y el método paso a paso.

Régimen rápido

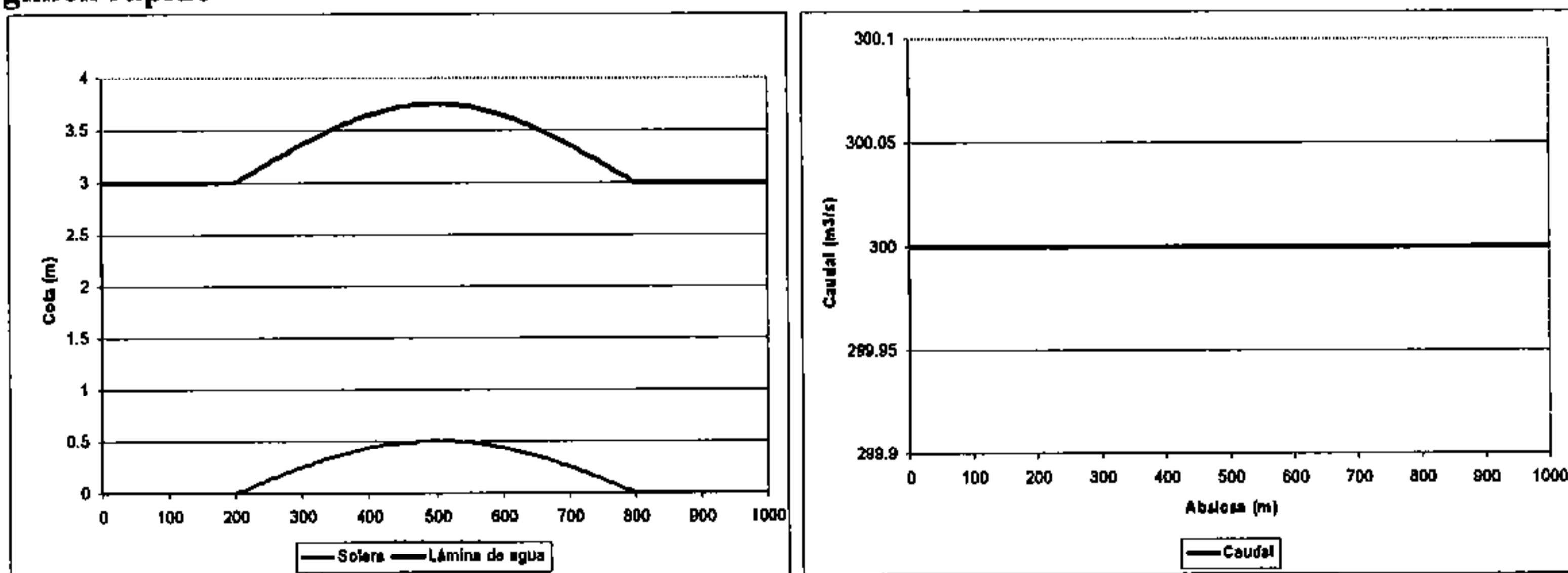


Figura 8.8. Régimen permanente supercrítico en una sobreelevación de solera suave. Esquema WAF TVD. Caudal de 300 m³/s, condición de contorno de 3 m de calado.

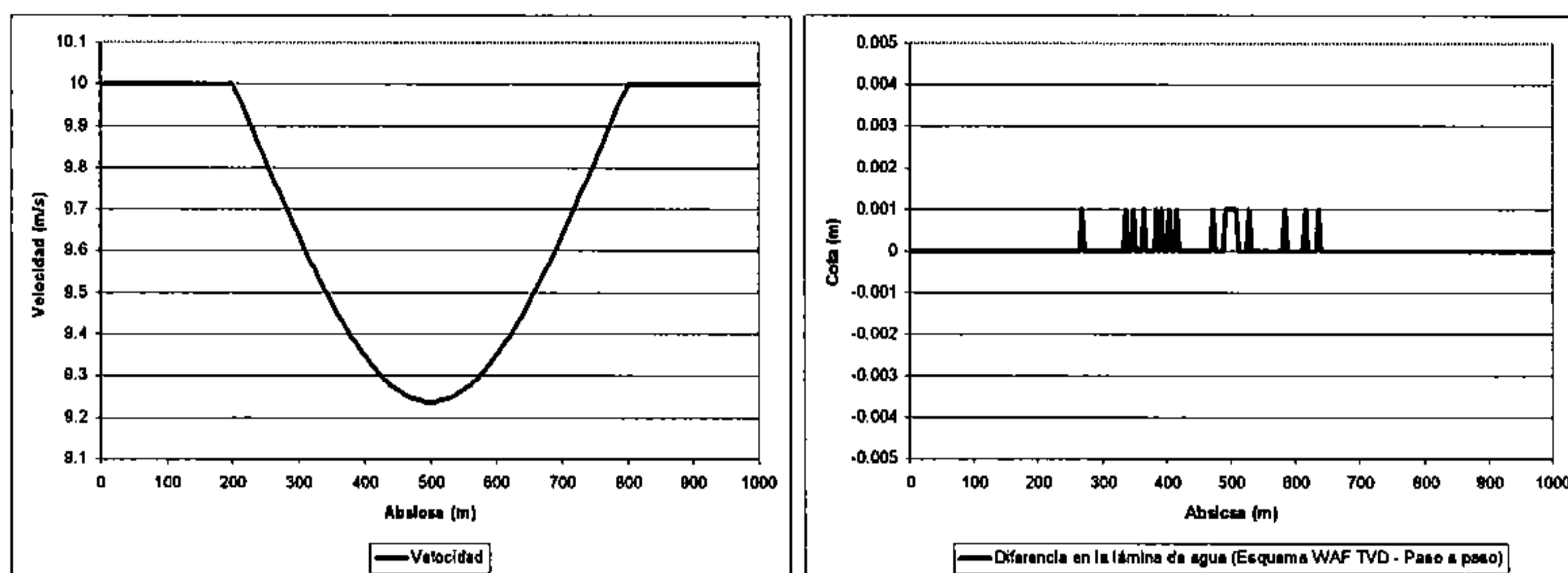


Figura 8.9. Régimen permanente supercrítico en una sobreelevación de solera suave. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema WAF TVD y el método paso a paso.

Régimen transcrito (lento a rápido)

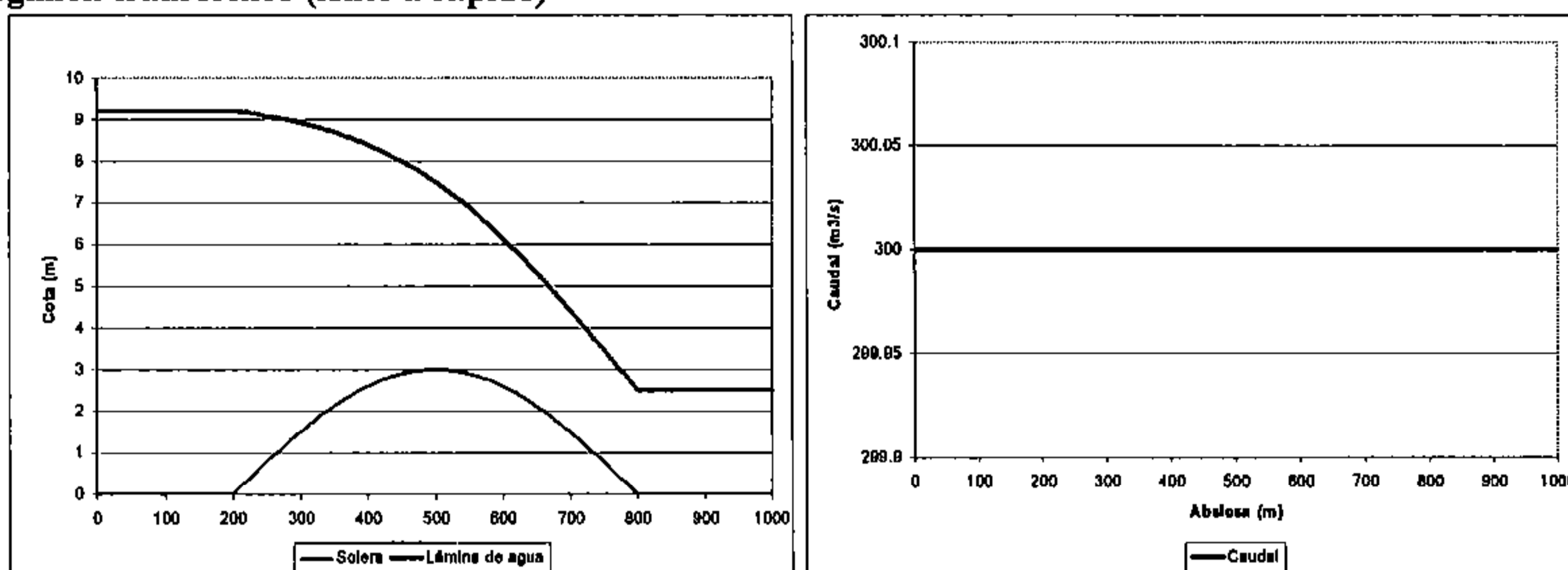


Figura 8.10. Régimen permanente transcrito (lento a rápido) en una sobreelevación de solera suave. Esquema WAF TVD. Caudal de $300 \text{ m}^3/\text{s}$.

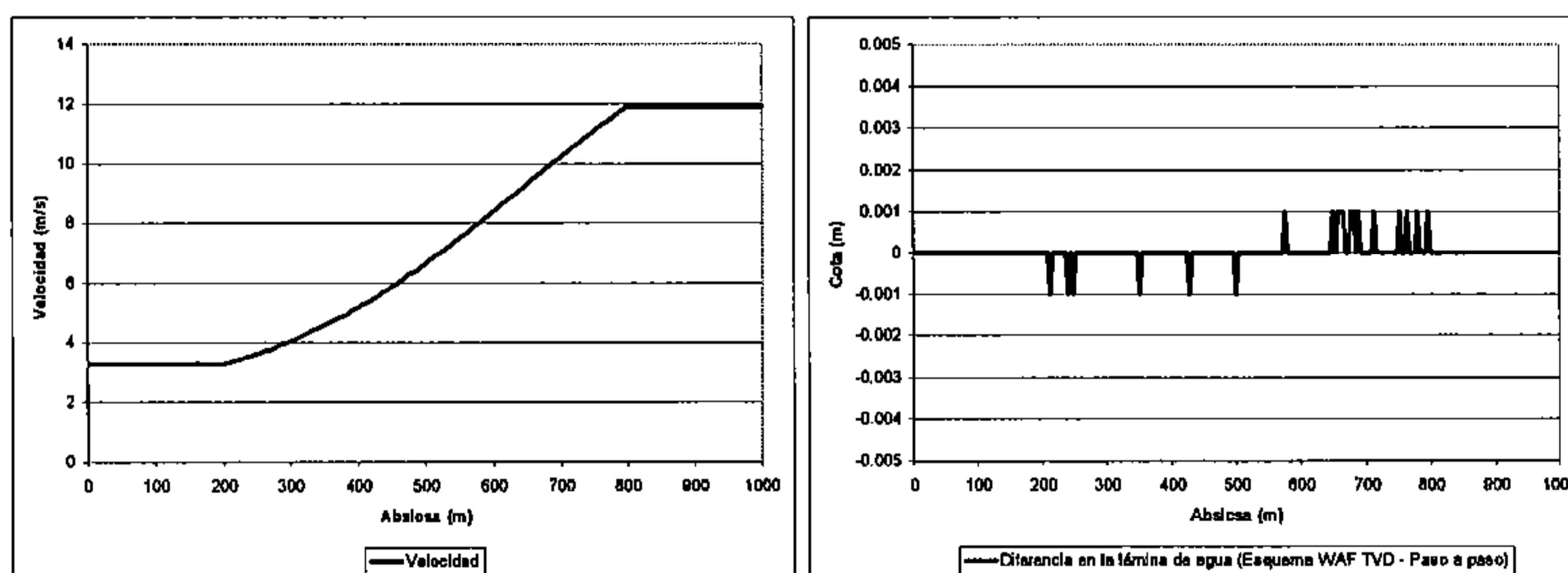


Figura 8.11. Régimen permanente transcrito (lento a rápido) en una sobreelevación de solera suave. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema WAF TVD y el método paso a paso.

Resalto hidráulico

En presencia de un resalto hidráulico, como se ha comentado en el Capítulo 6., el *Riemann solver* de Roe produce un error en el caudal localizado precisamente en la posición del resalto. Por otro lado, con la metodología comúnmente utilizada en el método *paso a paso* (situación del resalto por comparación entre la fuerza específica de las dos posibles soluciones en régimen lento y régimen rápido) el resalto hidráulico se sitúa siempre entre dos secciones contiguas, mientras que con los esquemas de alta resolución el resalto abarca dos elementos de volumen. Por estas dos razones, en la Figura 8.12 se aprecia un pico de caudal en el resalto, y en la

Figura 8.13, en la que se presenta la diferencia de cota de lámina de agua con las dos metodologías, se aprecia una diferencia de cotas justo en la posición del resalto.

Sin embargo, es de destacar que tanto el error localizado en caudal, como la diferencia de cotas quedan restringidos solamente a la posición del resalto, y no tienen repercusión ni en la posición del mismo ni en la lámina de agua aguas arriba o aguas abajo. En la Figura 8.13, la velocidad corresponde al caudal de transferencia entre volúmenes finitos dividido por el área de cada sección.

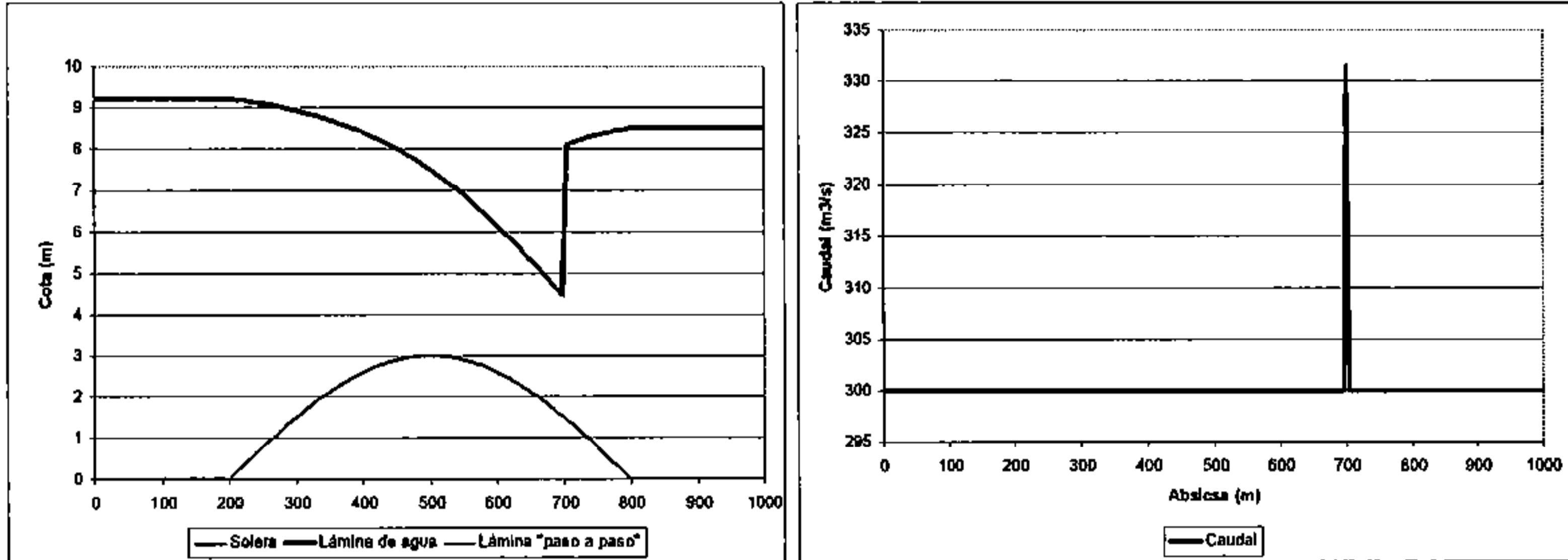


Figura 8.12. Resalto hidráulico aislado en una sobreelevación de solera suave. Esquema WAF TVD. Caudal de 300 m³/s, condición de contorno de 8.5 m de calado.

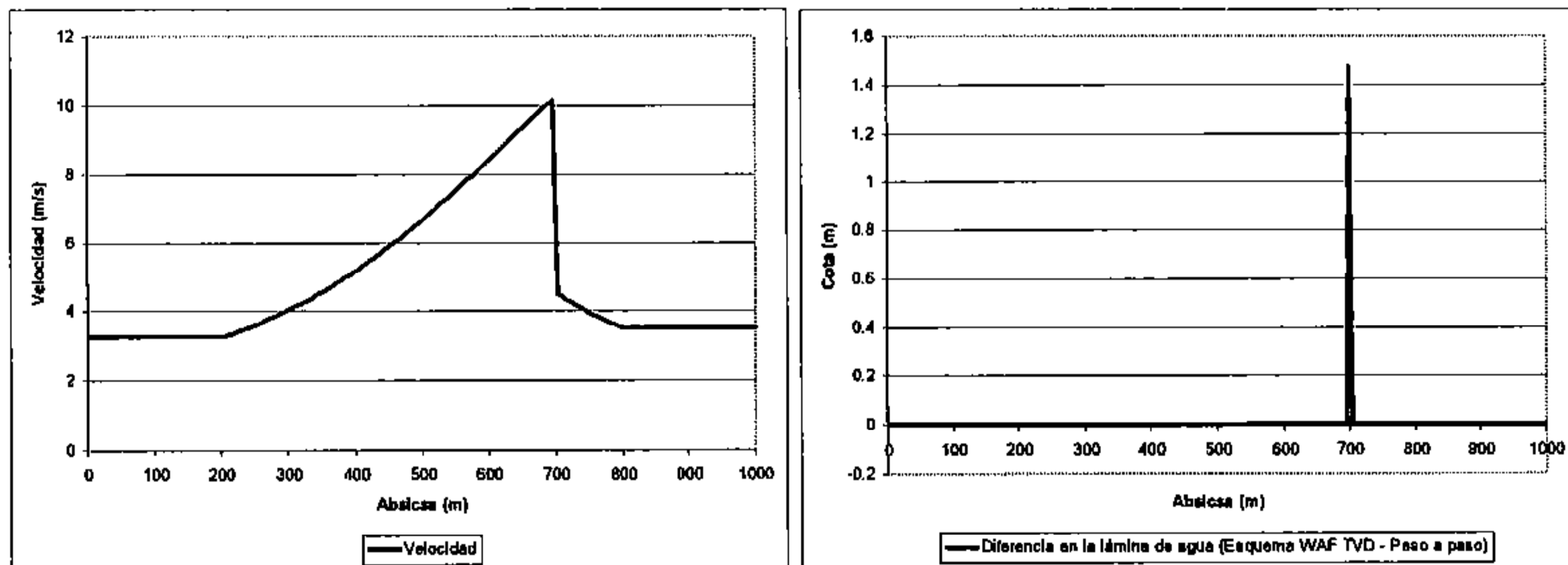


Figura 8.13. Resalto hidráulico aislado en una sobreelevación de solera suave sin fricción. Velocidad y diferencia en la lámina de agua entre el cálculo con el esquema Esquema WAF TVD y el método paso a paso.

8.2.3. Canal no prismático con solución analítica

Un trabajo singular es el presentado en la tesis de MacDonald (1996). En ella se desarrollan distintos métodos de cálculo en régimen permanente en una dimensión, por sobretodo se presenta una metodología para la obtención de geometrías variables para las cuales es posible encontrar los niveles de agua, y por lo tanto las velocidades, mediante solución analítica. En el trabajo mencionado se desarrollan una serie de problemas test para flujo en régimen lento, rápido, transcrito y con resalto, que se utilizan en este capítulo.

8.2.3.1 Régimen lento

El problema test nº9 de MacDonald, para flujo en régimen lento, responde a la geometría en planta de la Figura 8.14, dada por la expresión:

$$B(x) = 10 - 5e^{\left(10\left(\frac{x}{200} - \frac{1}{2}\right)^2\right)} \tag{8.1}$$

Donde $B(x)$ es el ancho del canal. La cota de fondo se encuentra integrando la expresión para la pendiente:

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{Q^2 B(x)}{9.08665 (y(x) B(x))^3} \right) \frac{dy(x)}{dx} + Q^2 n^2 \frac{(B(x) + 2y(x))^{4/3}}{(y(x) B(x))^{10/3}} - \frac{Q^2 \frac{dB(x)}{dx}}{9.08665 (y(x))^2 (B(x))^3} \quad (8.2)$$

donde Q es el caudal, n el coeficiente de rugosidad de Manning, e $y(x)$ el calado. En este problema test se define el calado según:

$$y(x) = 0.9 + 0.3e^{\left(20 \left(\frac{x-1}{200} \right)^2 \right)} \quad (8.3)$$

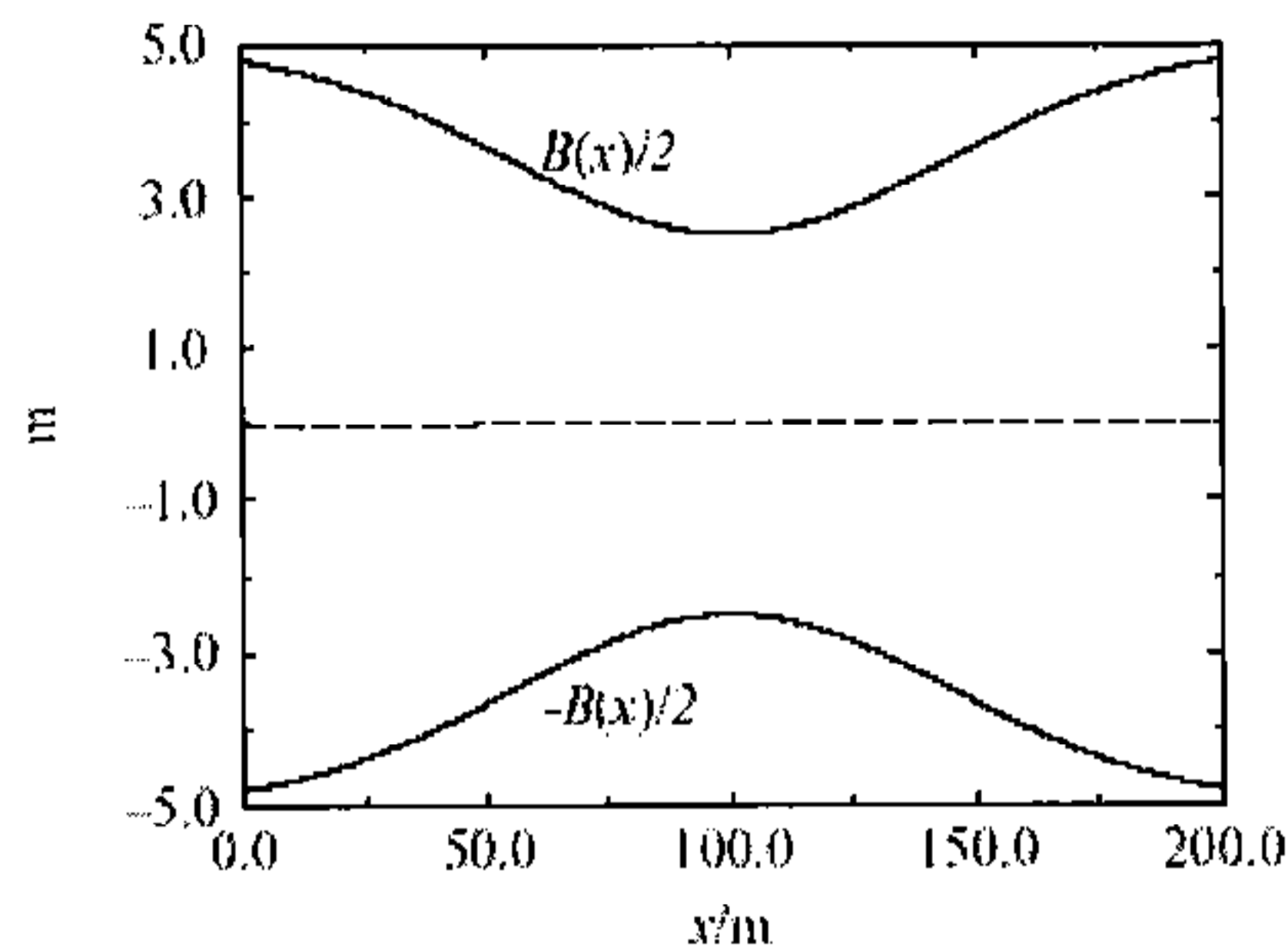


Figura 8.14. Forma en planta del problema test n°9 de MacDonald. Figura tomada de MacDonald (1996).

Las tres últimas expresiones definen completamente la geometría del problema y su solución. Para un caudal de $20 \text{ m}^3/\text{s}$, una longitud del tramo de estudio de 200 m y un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.03 , la solución exacta se presenta en línea continua en la Figura 8.15. En la misma figura se representa mediante puntos la solución numérica obtenida con el esquema WAF TVD. Se observa su coincidencia con la solución analítica.

8.2.3.2 Régimen rápido

El problema test n°10 de MacDonald se obtiene con las expresiones (8.1) y (8.2), por lo tanto la forma en planta es la misma que en el apartado anterior, pero considerando ahora la siguiente expresión para el calado:

$$y(x) = 0.5 + 0.5e^{\left(20 \left(\frac{x-1}{200} \right)^2 \right)} \quad (8.4)$$

Con ello, se obtiene el perfil representado en la Figura 8.16 juntamente con la solución numérica obtenida con el esquema WAF TVD. Como antes, se aprecia la exactitud de la modelación numérica.

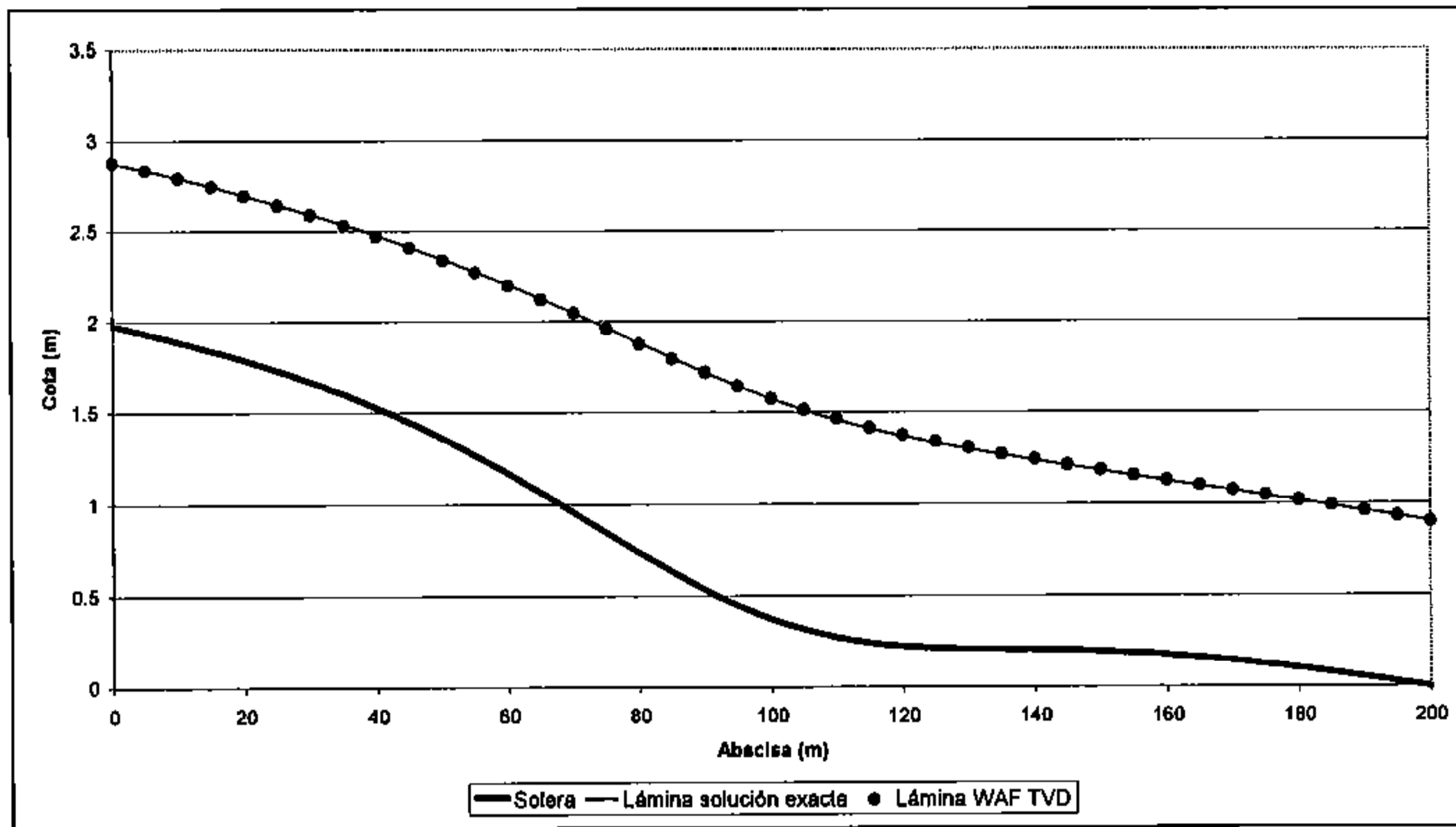


Figura 8.15. Problema test nº9 de MacDonal. Régimen lento.

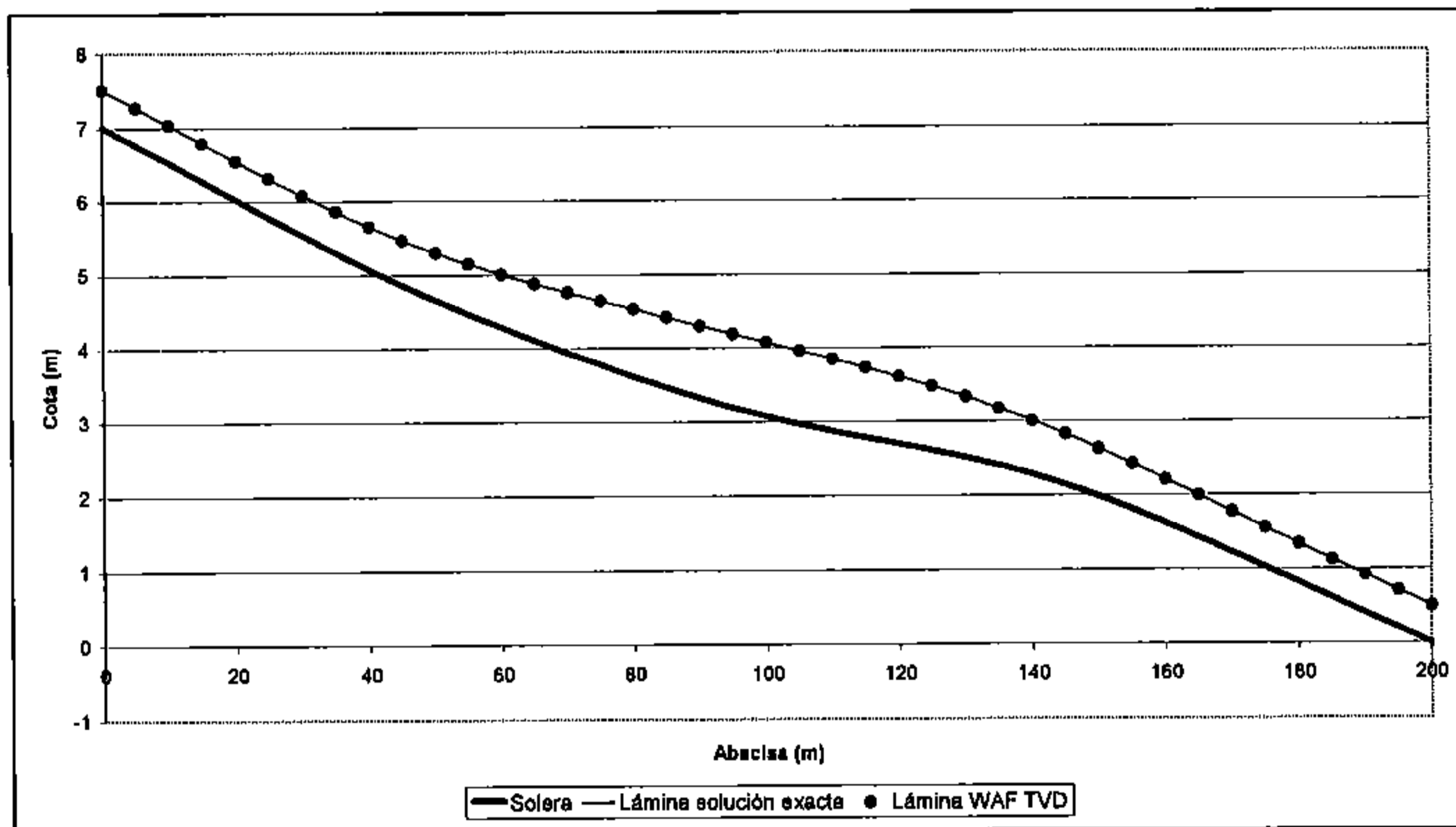


Figura 8.16. Problema test nº10 de MacDonal. Régimen rápido.

8.2.3.3 Régimen transcrito (lento a rápido)

Para conseguir un ejemplo de paso de régimen lento a rápido con solución analítica, en el problema test nº11, MacDonal propone utilizar la expresión

$$y(x) = 1 + 0.3 \tanh \left(4 \left(\frac{x}{200} - \frac{1}{3} \right)^2 \right) \tag{8.5}$$

juntamente con (8.1) y (8.2). El perfil de la lámina de agua obtenido mediante la expresión analítica, se compara con la solución numérica en la Figura 8.17.

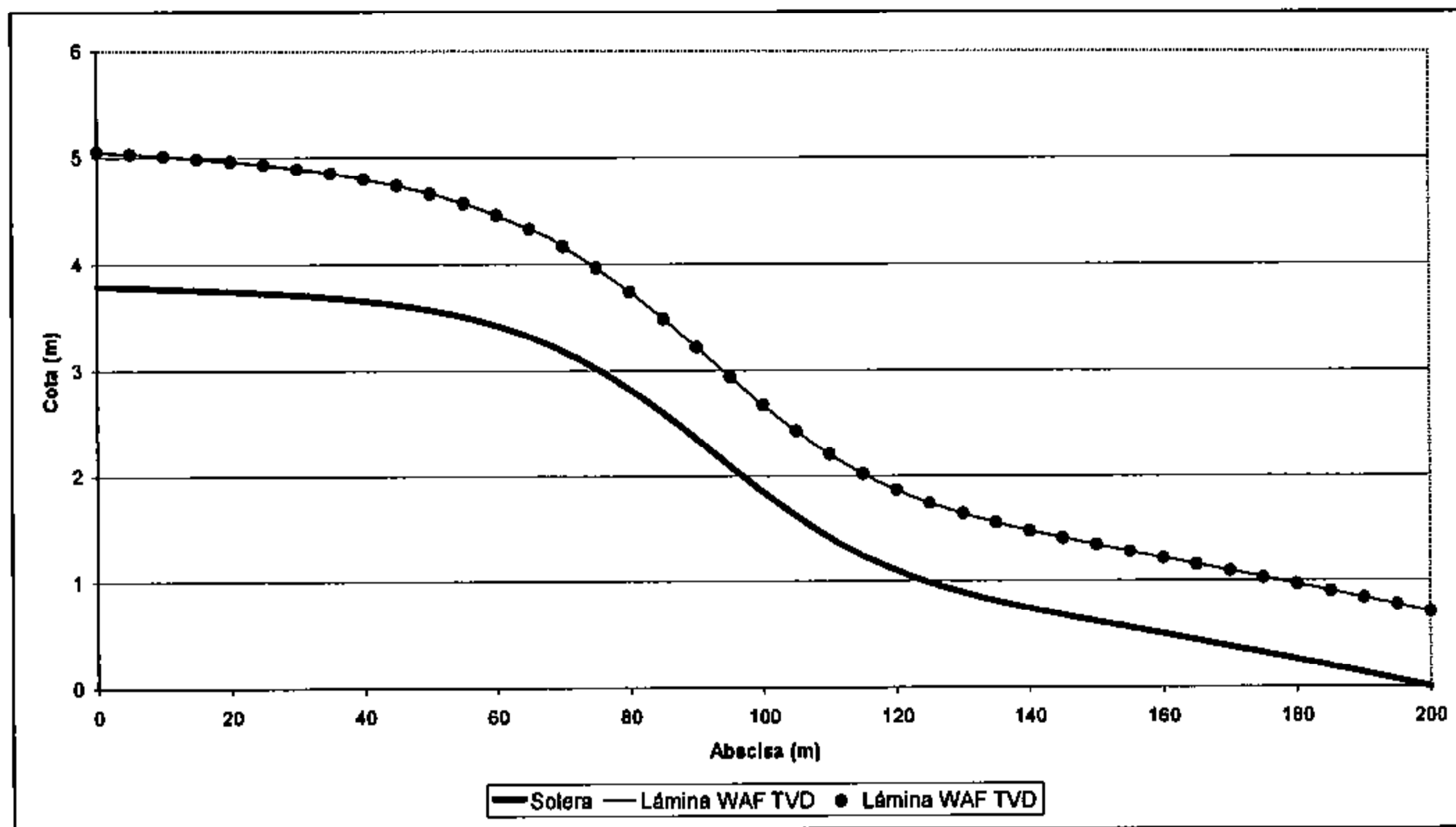


Figura 8.17. Problema test nº11 de MacDonald. Paso de lento a rápido.

8.2.3.4 Resalto hidráulico

Para el caso de resalto hidráulico, MacDonald demuestra que se puede obtener un problema con solución analítica (Problema test nº 12) si se considera un calado dado por:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 0.7 + 0.3(e^{x/200} - 1) & \text{si } x \leq 120 \\
 y(x) &= e^{(-0.1(x-120))} \sum_{i=0}^M k_i \left(\frac{x-120}{200-x}\right)^i + 1.5e^{-0.1\left(\frac{x}{200}-1\right)} & \text{si } x > 120
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

con $M = 2$, $k_0 = -0.154375$, $k_1 = -0.108189$, $k_2 = -2.014310$. Como antes, el ancho y cota de fondo se obtienen de (8.1) y (8.2). En la Figura 8.18 se compara la lámina de agua obtenida mediante la expresión analítica con la solución numérica con el esquema WAF TVD.

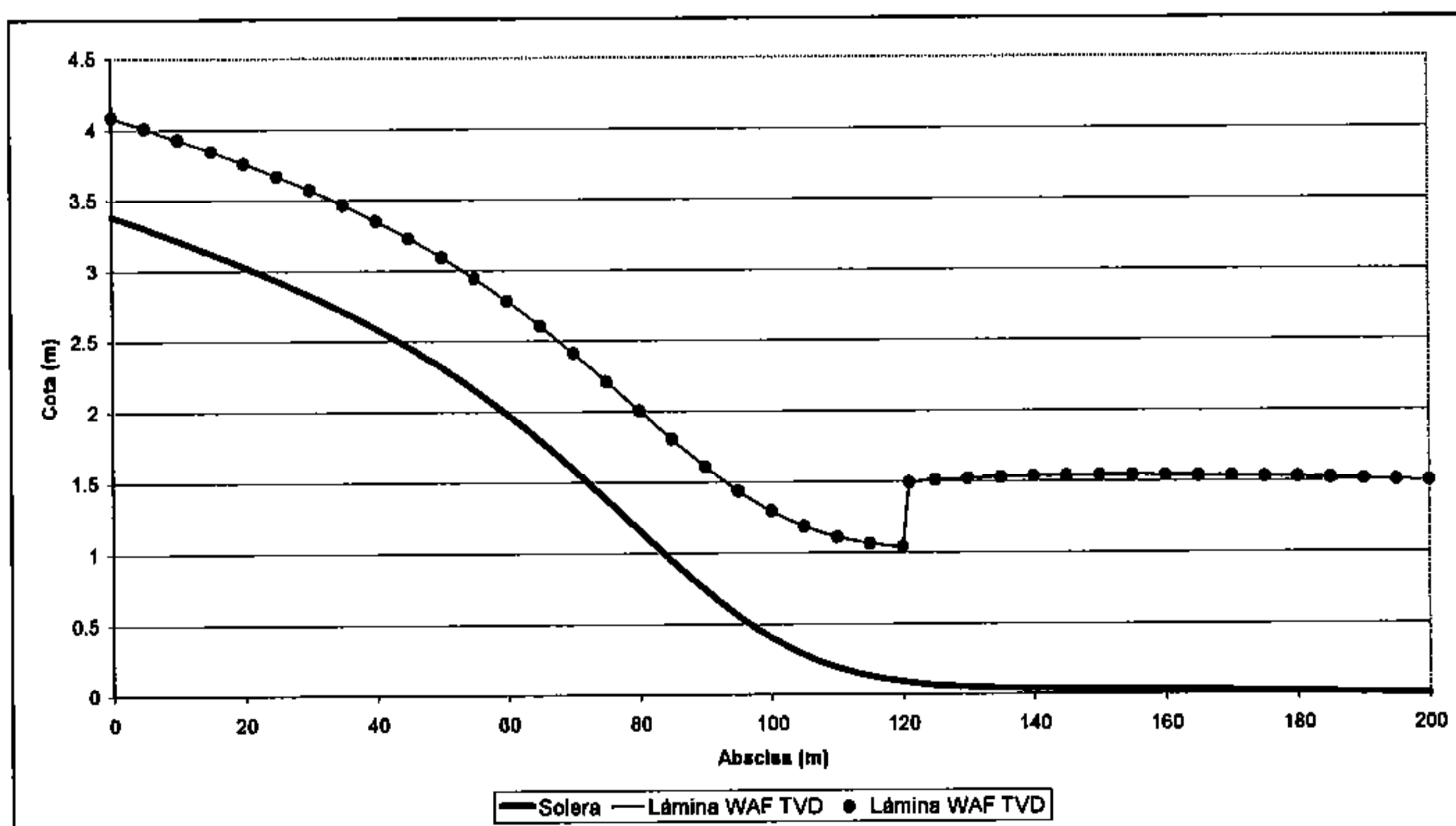


Figura 8.18. Problema test nº12 de MacDonald. Resalto hidráulico.

8.2.4. Canal trapecial no prismático

Para la verificar la capacidad de los esquemas numéricos presentados en este trabajo de modelar correctamente el régimen permanente gradualmente variado con geometrías irregulares, uno de los principales puntos débiles en los esquemas de resolución en volúmenes finitos para las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión, se creyó de interés considerar una geometría irregular, es decir: sección transversal no rectangular y no prismática (cariable de sección a sección). El objetivo es verificar los desarrollos presentados en el capítulo anterior para, por un lado, considerar adecuadamente la variación espacial del vector de flujo por cambios en la geometría, y por otro, el tratamiento de la parte correspondiente a la pendiente de fondo del término independiente. Para ello se utilizó la geometría representada por las 14 secciones de la Figura 8.19 correspondientes a un canal de 13 m de longitud, con un caudal de $2m^3/s$ y una cota de lámina de 2m en el extremo aguas abajo. Para evitar posibles distorsiones de la comparación por efecto de la rugosidad, que en el método *paso a paso* se puede considerar de distintas formas, se ha considerado que no hay fricción.

La sección es siempre trapecial pero van variando la cota de fondo, el ancho de solera y los taludes laterales. En la Figura 8.20 y Figura 8.21 se comparan los resultados obtenidos con una modelación con el esquema *paso a paso* y se manifiesta la capacidad de los esquemas de Roe y WAF TVD para modelar con precisión el régimen permanente. Ambos esquemas producen idénticos resultados, y también idénticos al método *paso a paso*.

Para este mismo caso se ha creído conveniente ilustrar los errores que se producen, en primer lugar, si no se discretiza el término independiente de manera que se asegure la conservación de la energía (como hacen los esquemas en volúmenes finitos basados en el *Riemann solver* de Roe que se conocen), y en segundo lugar si no se considera el efecto de la irregularidad de la geometría en la dependencia espacial del vector de flujo (lo que también es muy común en la bibliografía).

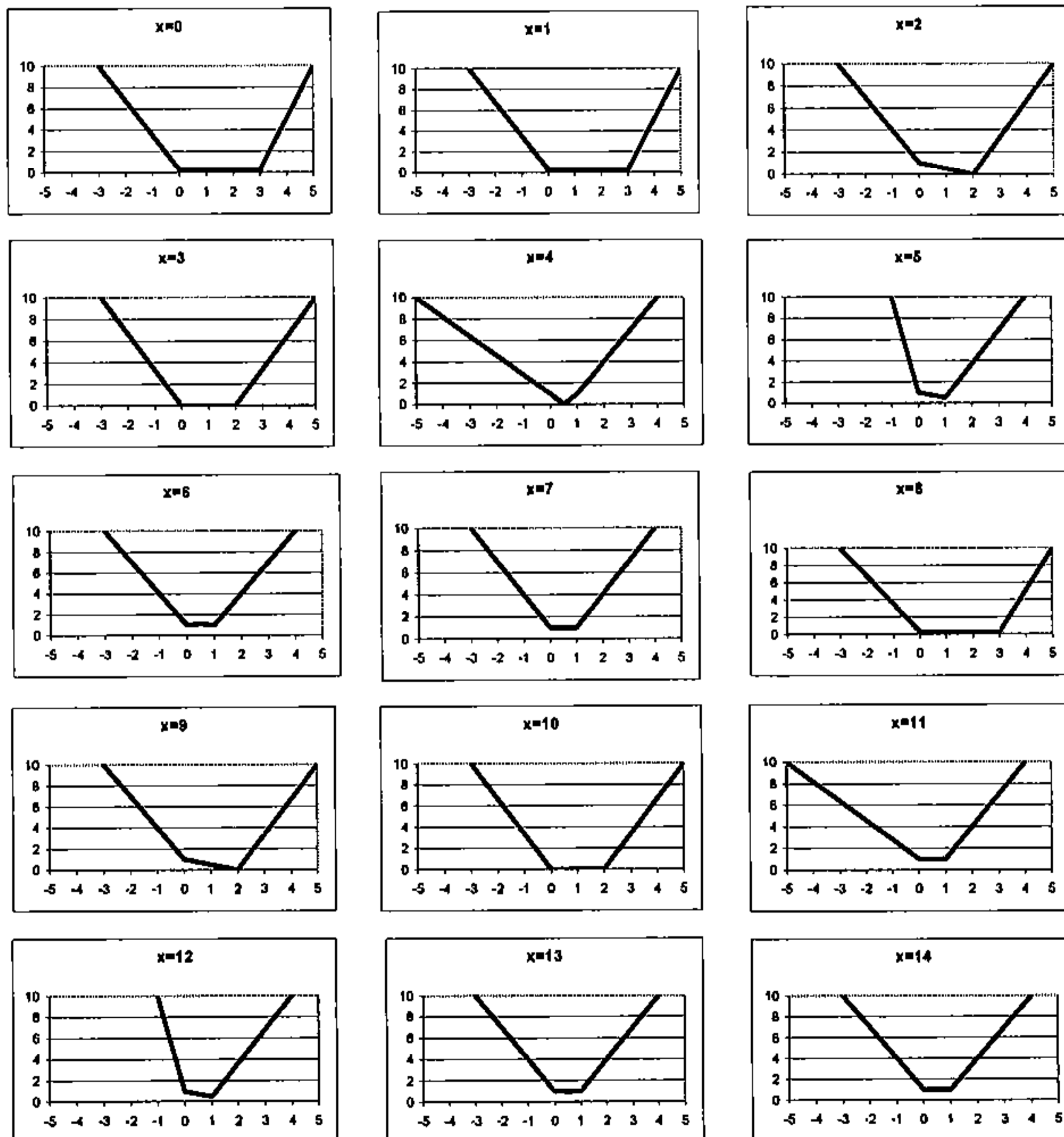


Figura 8.19. Secciones para el canal trapecial no prismático.

En la Figura 8.22 se presenta la lámina de agua, y su comparación con el método paso a paso, aproximando el área en un controno de un elemento de volumen según la media aritmética del valor en los volúmenes contiguos, y no según la media harmónica. Se aprecia que la solución que se obtiene presenta diferencias considerables con el método *paso a paso*. En la Figura 8.23 se presentan los resultados y la misma comparación, pero sin considerar en el esquema numérico la la irregularidad de la geometría en la dependencia espacial del vector de flujo; los errores en este caso son de gran magnitud.

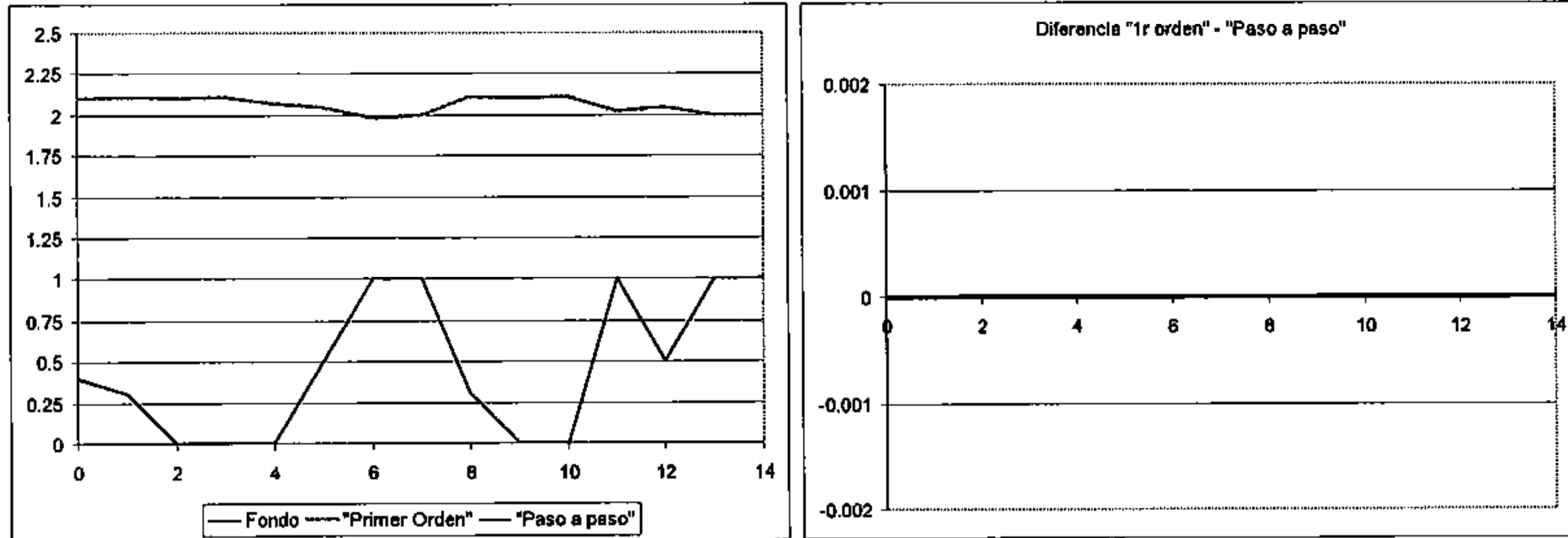


Figura 8.20. Canal trapezoidal no prismático. Esquema de Roe (primer orden). Lámina de agua (izquierda) y comparación con el método paso a paso (derecha).

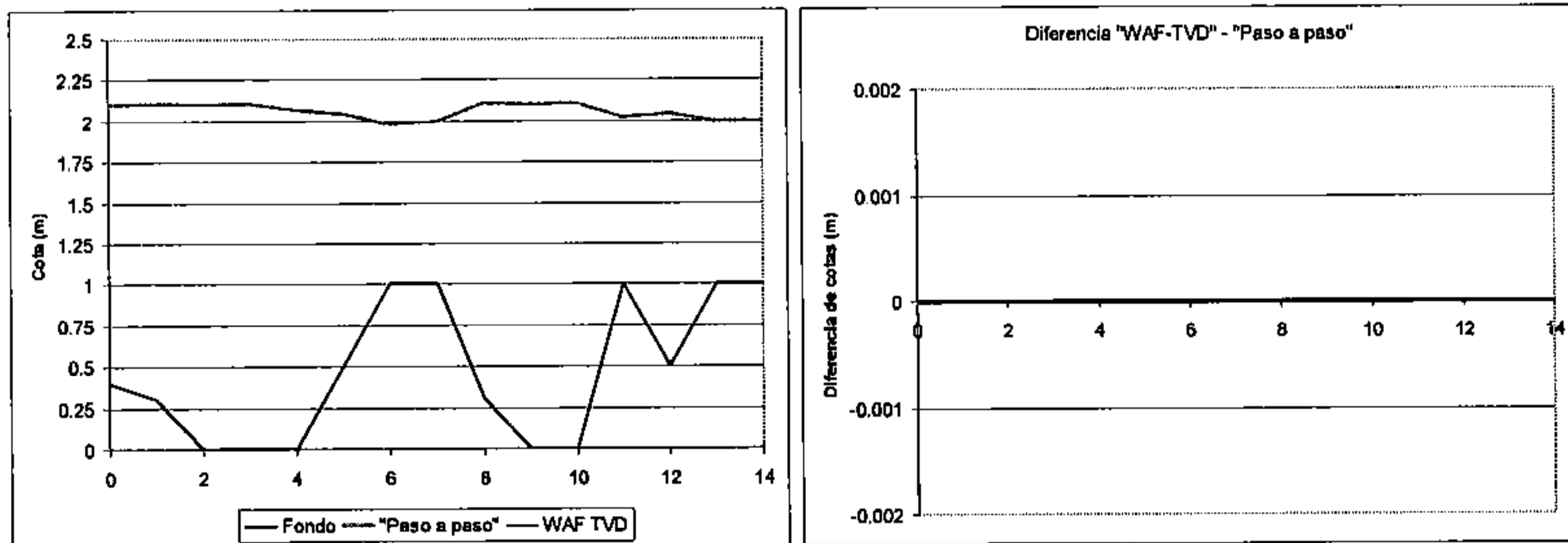


Figura 8.21. Canal trapezoidal no prismático. Esquema WAF TVD. Lámina de agua (izquierda) y comparación con el método paso a paso (derecha).

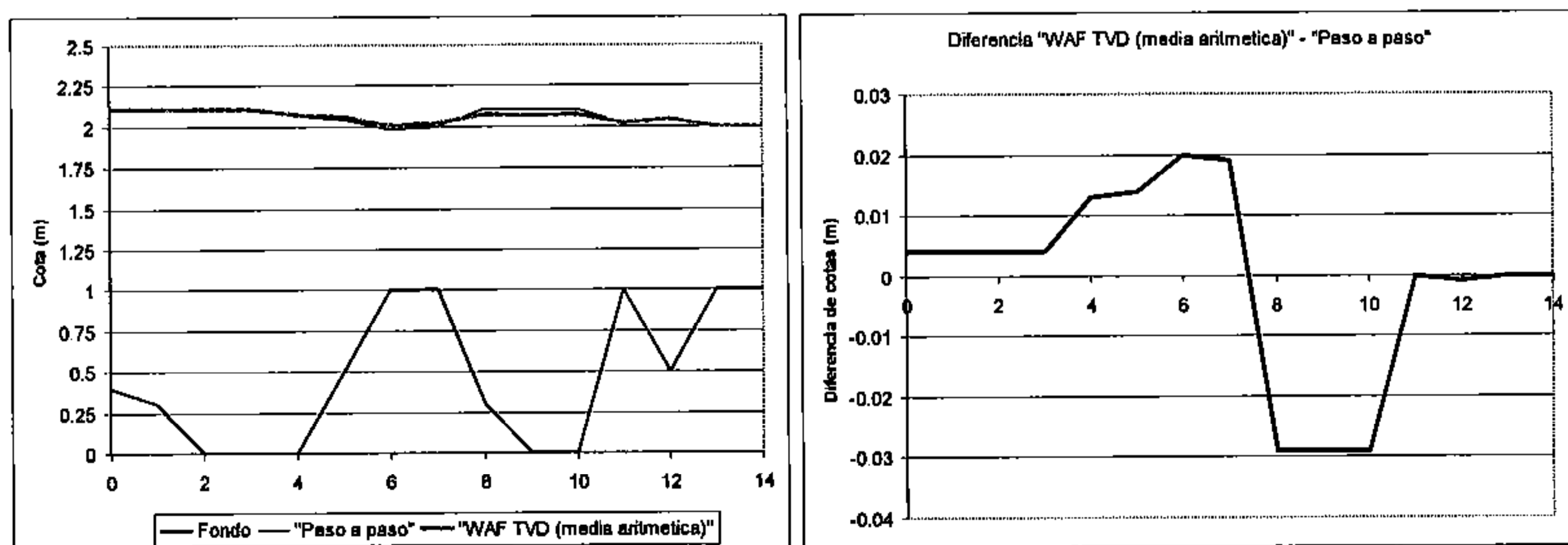


Figura 8.22. Canal trapezoidal no prismático. Esquema WAF TVD aproximando el área entre dos volúmenes finitos por la media aritmética, y comparación con el método paso a paso.

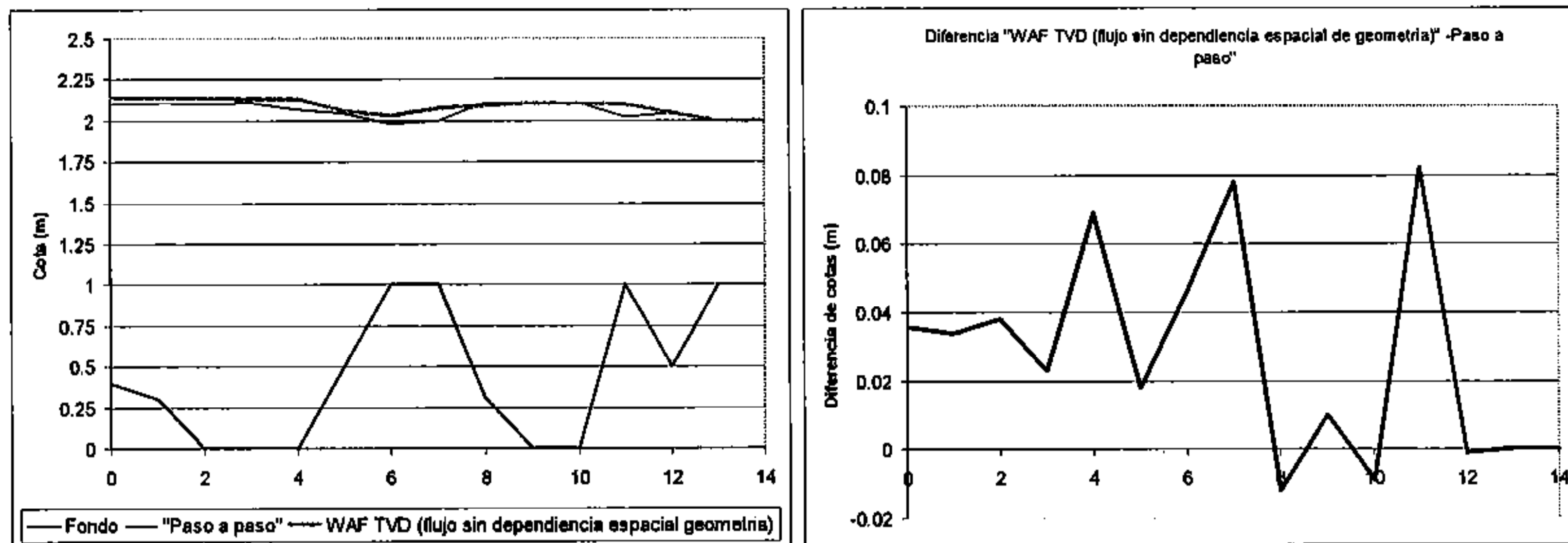


Figura 8.23. Canal trapecial no prismático. Esquema WAF TVD sin considerar la irregularidad de la geometría en la dependencia espacial del vector de flujo, y comparación con el método paso a paso.

8.2.5. Niveles de agua en el río Llobregat

Se compara la lámina de agua obtenida en régimen permanente con el método *paso a paso* y con los esquemas de primer orden y alta resolución para un tramo de 7075 m de longitud situado ente la confluencia del río Llobregat y la Riera de Rubí, y el escalón existente donde anteriormente se encontraba el azud del Canal de la Margen Derecha, en el término municipal de Sant Vicenç dels Horts. El tramo incorpora el escalón existente en un punto situado 450 m aguas arriba del puente de de la N-349 en Molins de Rei, construido a raíz de las obras de encauzamiento realizadas durante la construcción de la Autovía del Baix Llobregat.

El cálculo se ha realizado para un caudal de $400 \text{ m}^3 / \text{s}$, calado crítico aguas abajo por corresponder al azud mencionado, y coeficiente de rugosidad de Manning variable dentro de cada sección dependiendo de si el punto corresponde al cauce central, o, en las llanuras de inundación, dependiendo del uso del suelo. El coeficiente de rugosidad considerado en el cauce central es de 0.025, mientras que en las llanuras oscila entre este mismo valor hasta valores de 0.120. El tramo se ha discretizado mediante 143 secciones transversales del río, con una fuerte irregularidad. En la Figura 8.24 se presentan a título de ejemplo la geometría de cuatro de ellas (nº1, nº100, nº150 y nº143).

El perfil del fondo se puede observar en la Figura 8.25, donde se presentan también la lámina de agua con el método paso a paso y el esquema WAF TVD. Se aprecia que las dos líneas se superponen en todo el tramo de estudio. Las diferencias entre ambas se observan mejor en la Figura 8.27 (izquierda) siendo de pocos centímetros. En la Figura 8.26 y Figura 8.27 (derecha) se puede observar que la mayor disipación del esquema de primer orden se acaba convirtiendo en mayores errores en la lámina de agua, especialmente en la zona del escalón, donde el esquema de primer orden no es capaz de reproducir el régimen rápido aguas abajo del mismo, aunque en general se obtienen niveles inferiores que con el esquema de alta resolución.

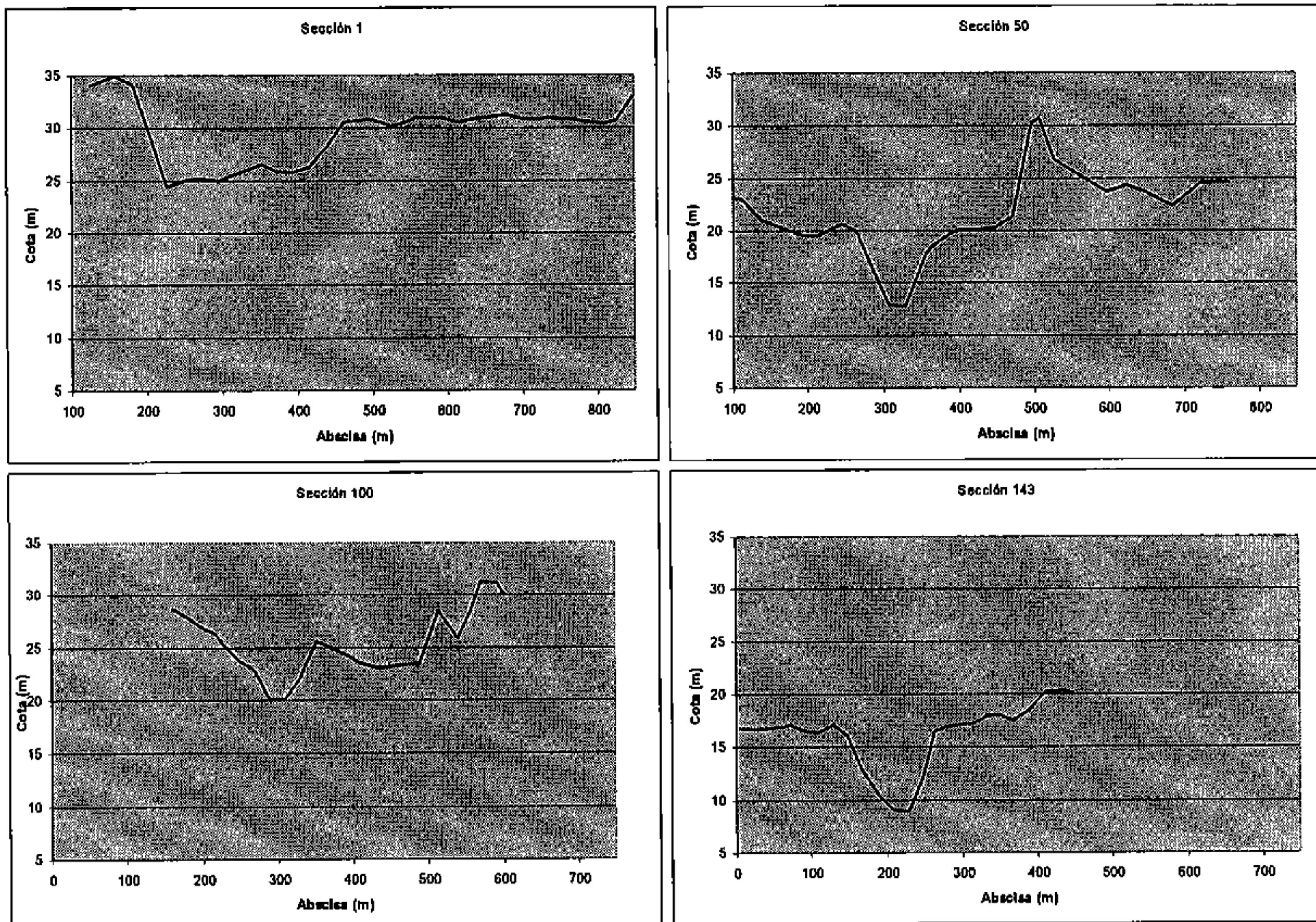


Figura 8.24 Ejemplo de secciones en el río llobregat

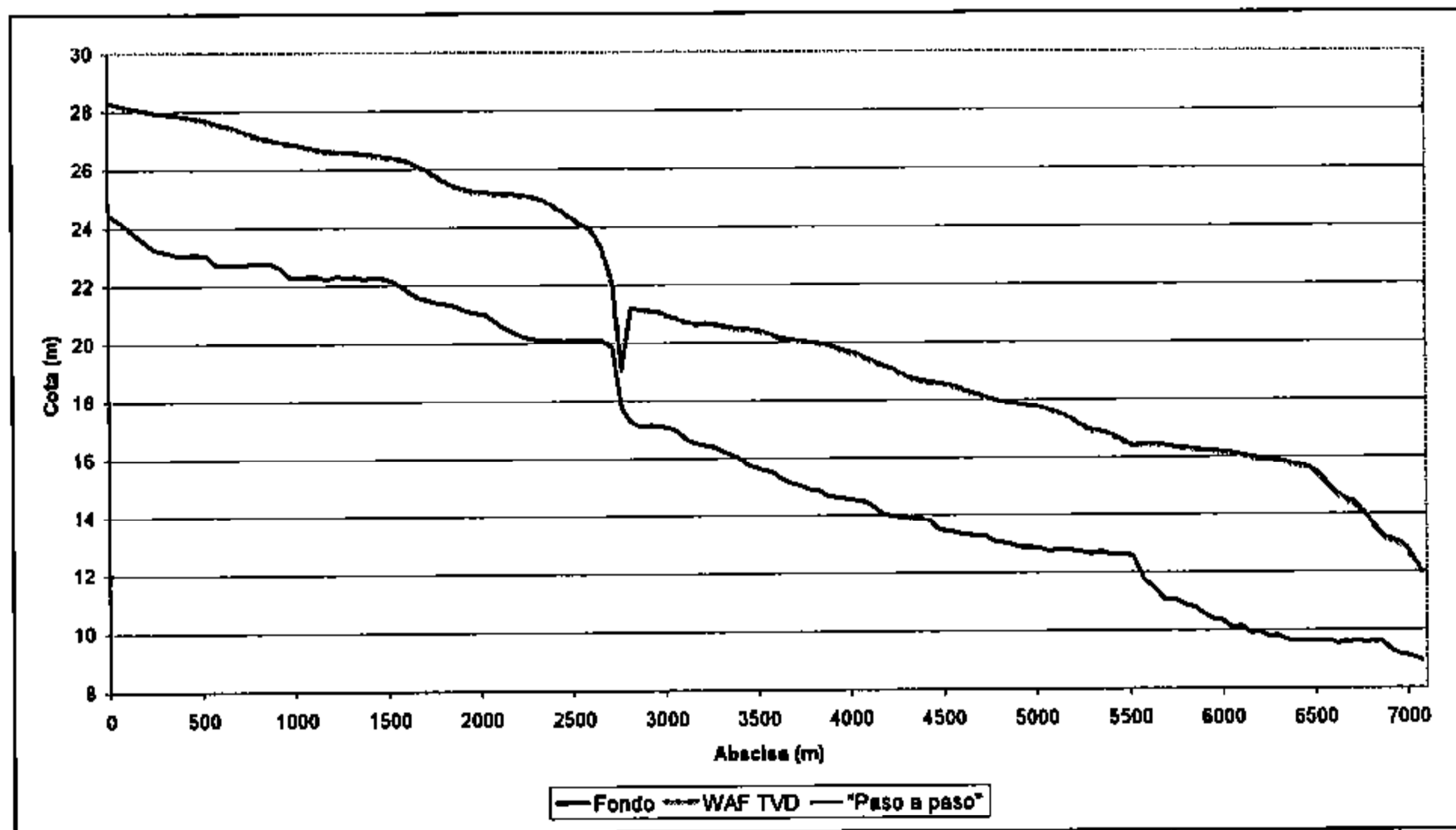


Figura 8.25. Río Llobregat en régimen permanente. Comparación entre el método paso a paso y el esquema WAF TVD

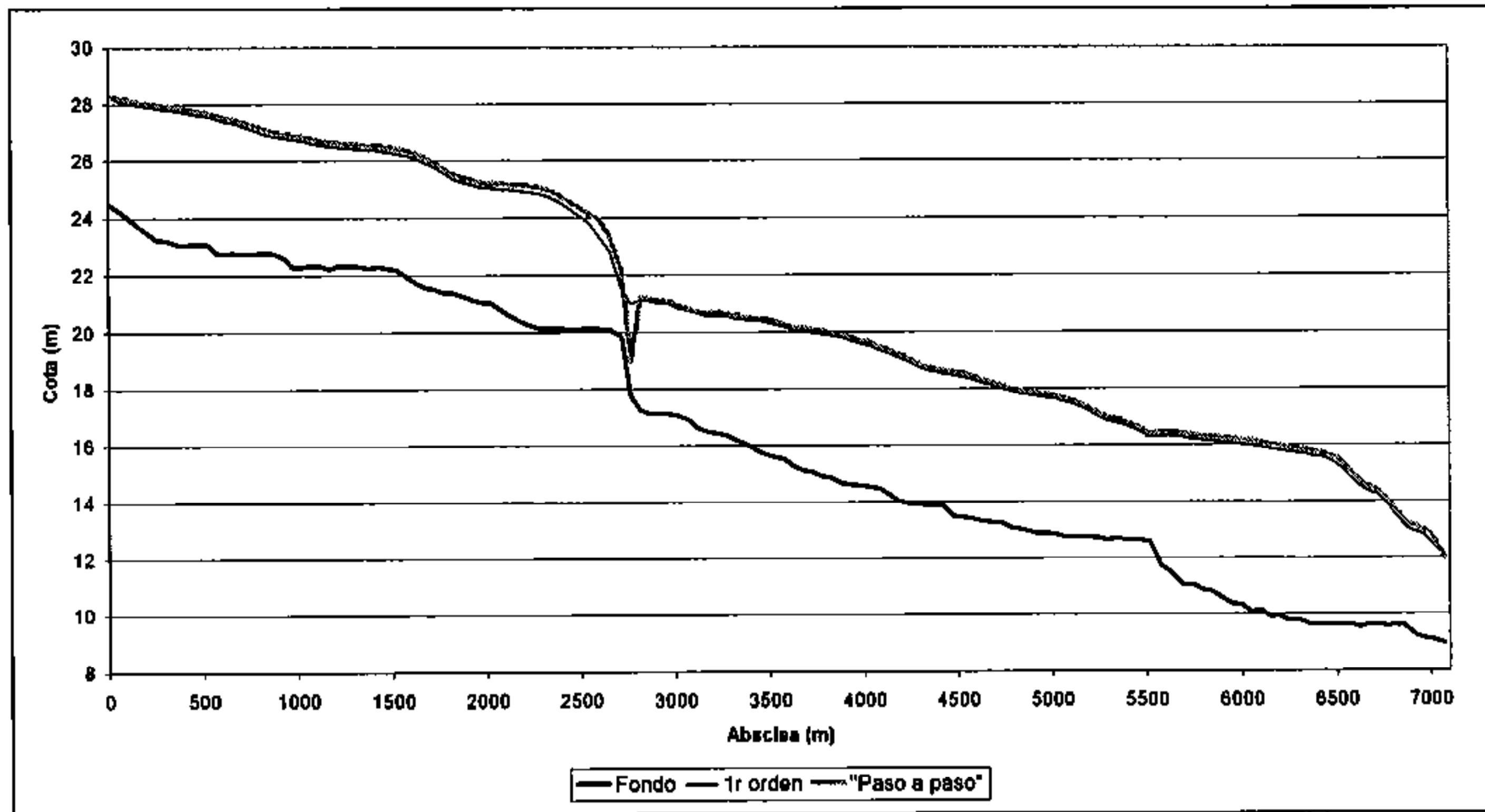


Figura 8.26. Río Llobregat en régimen permanente. Comparación entre el método paso a paso y el esquema de primer orden.

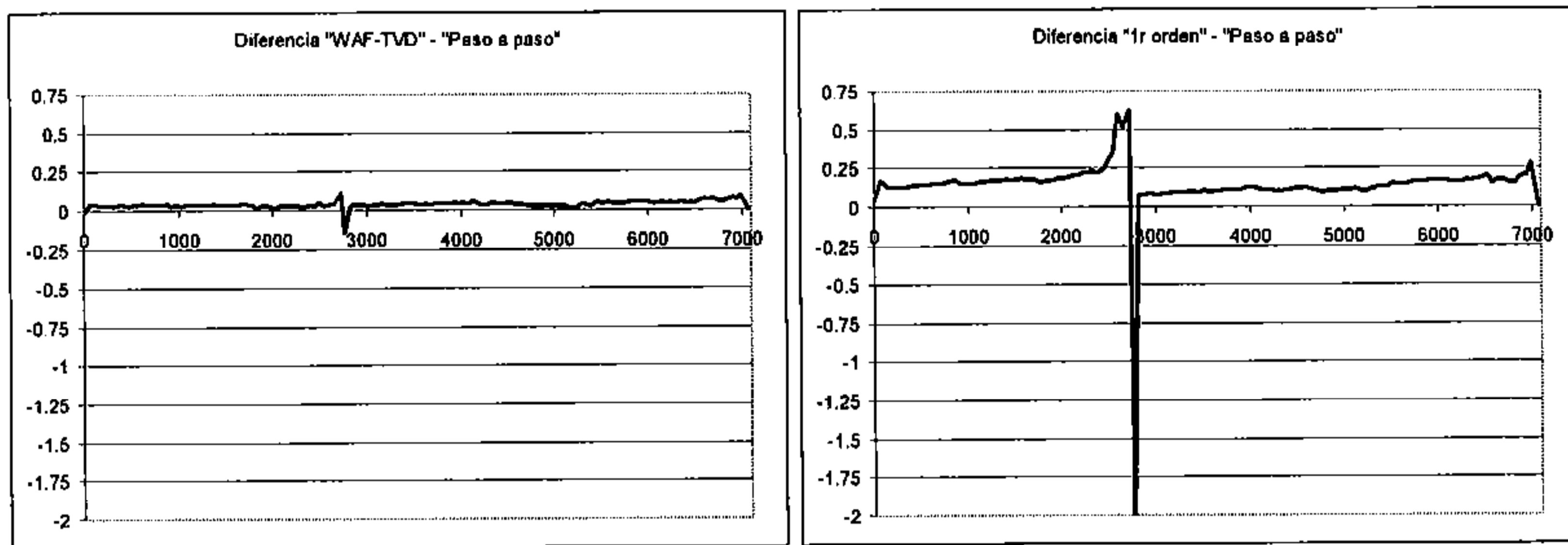


Figura 8.27. Río Llobregat en régimen permanente. Diferencias en cota de la lámina de agua entre el método paso a paso y los esquemas WAF TVD (izquierda) y primer orden (derecha)

8.3. Régimen permanente. Dos dimensiones

Para la validación en régimen permanente del esquema de segundo orden se utilizan dos ejemplos. El primero corresponde a la misma sobreelevación de solera suave que en una dimensión. En segundo lugar se comprueba que el esquema es capaz de simular correctamente la formación de ondas cruzadas en un estrechamiento.

8.3.1. Ondas cruzadas

Las ondas cruzadas que se producen en una contracción en régimen rápido, son un claro ejemplo de fenómeno que no se puede estudiar con una aproximación unidimensional, de gran importancia práctica en el diseño de canales y aliviaderos. Con geometrías sencillas, el fenómeno se puede estudiar analíticamente a partir de la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

En el caso de un cambio de dirección repentino de la pared de un canal que funciona en régimen rápido (Figura 8.28), considerando conservación de la cantidad de movimiento en la dirección normal a la onda que se produce, es posible encontrar relaciones entre calados, números de Froude y velocidades a ambos lados de la onda (Henderson, 1966). Si θ es el ángulo que forma la pared del canal, y β es el ángulo de la onda cruzada que se forma respecto la dirección de la pared del canal aguas arriba de la misma, se deduce la siguiente relación entre ambos:

$$\frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1 \sin^2 \beta} - 1 \right) \quad (8.7)$$

donde Fr_1 es el número de Froude aguas arriba del estrechamiento. El calado y velocidad aguas abajo se pueden obtener con:

$$\frac{Fr_2}{Fr_1} = \sqrt{\frac{y_1 \cos \beta}{y_2 \cos(\beta - \theta)}} \quad (8.8)$$

y

$$V_1 \cos \beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad (8.9)$$

donde V_1 es la velocidad aguas arriba del estrechamiento, V_2 y Fr_2 son respectivamente la velocidad y número de Froude aguas abajo del estrechamiento y en la dirección del Flujo, y y_1 e y_2 los calados.

De esta manera, con los valores de flujo incidente y geometría de Alcrudo (1992) ($y_1 = 1m$, $V_1 = 1.57m/s$, $Fr_1 = 2.5$, $\theta = 8.95^\circ$) las variables después del salto valen $y_2 = 1.5m$, $V_2 = 7.95m/s$, $Fr_2 = 2.075$ y el ángulo de la onda cruzada es $\beta = 30^\circ$.

Este caso se ha calculado numéricamente para un tramo de canal de 30 m de longitud, ancho de 15 m aguas arriba del estrechamiento, y estrechamiento a 10 m del extremo aguas arriba. El cálculo se ha realizado con el esquema WAF TVD en dos dimensiones, utilizando las cuatro mallas distintas de la Figura 8.29:

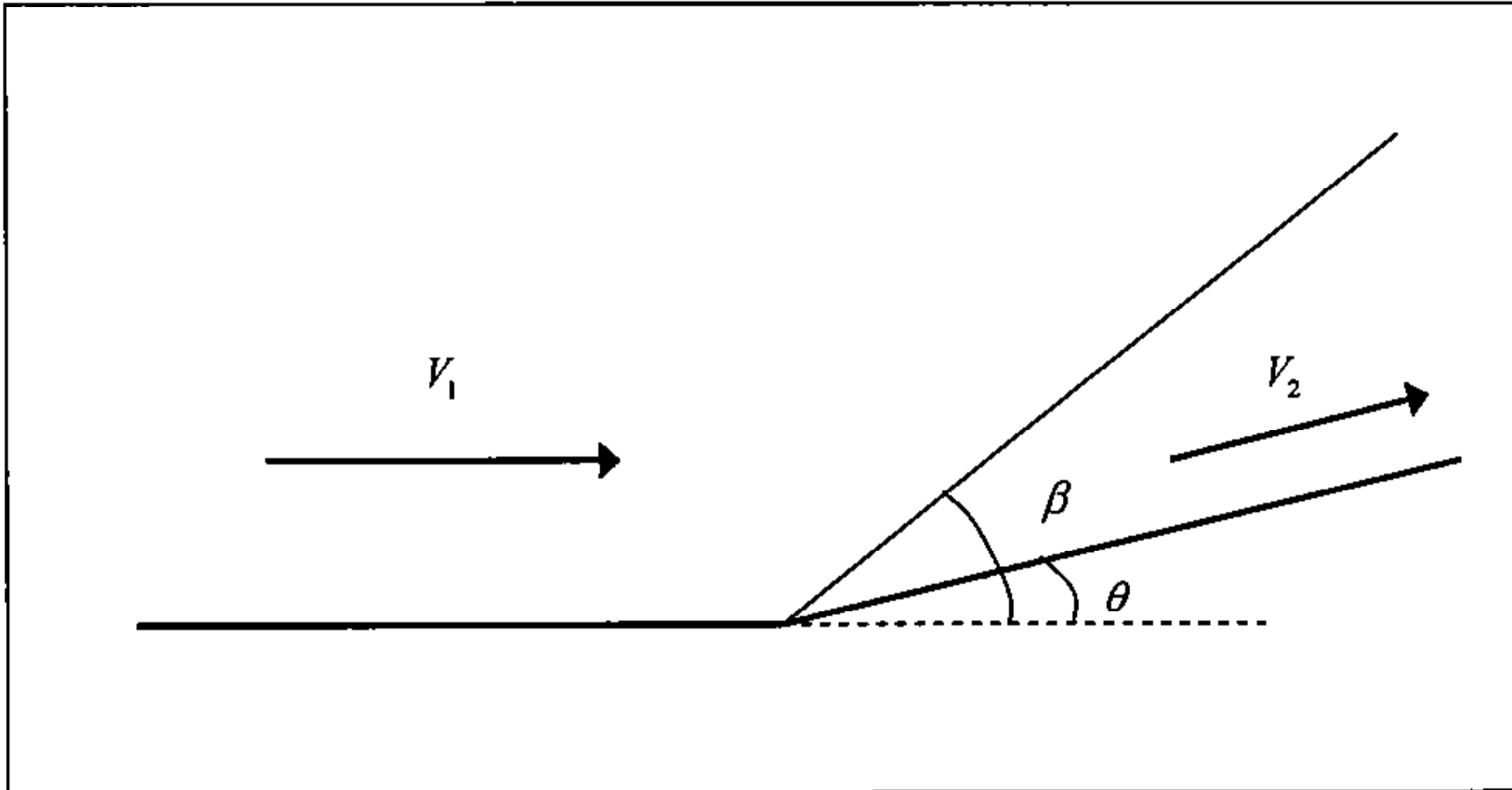


Figura 8.28. Formación de una onda cruzada por un cambio de dirección brusco en un canal en régimen rápido.



Fotografía 8.1. Onda cruzada en un río del Vallès en 1962

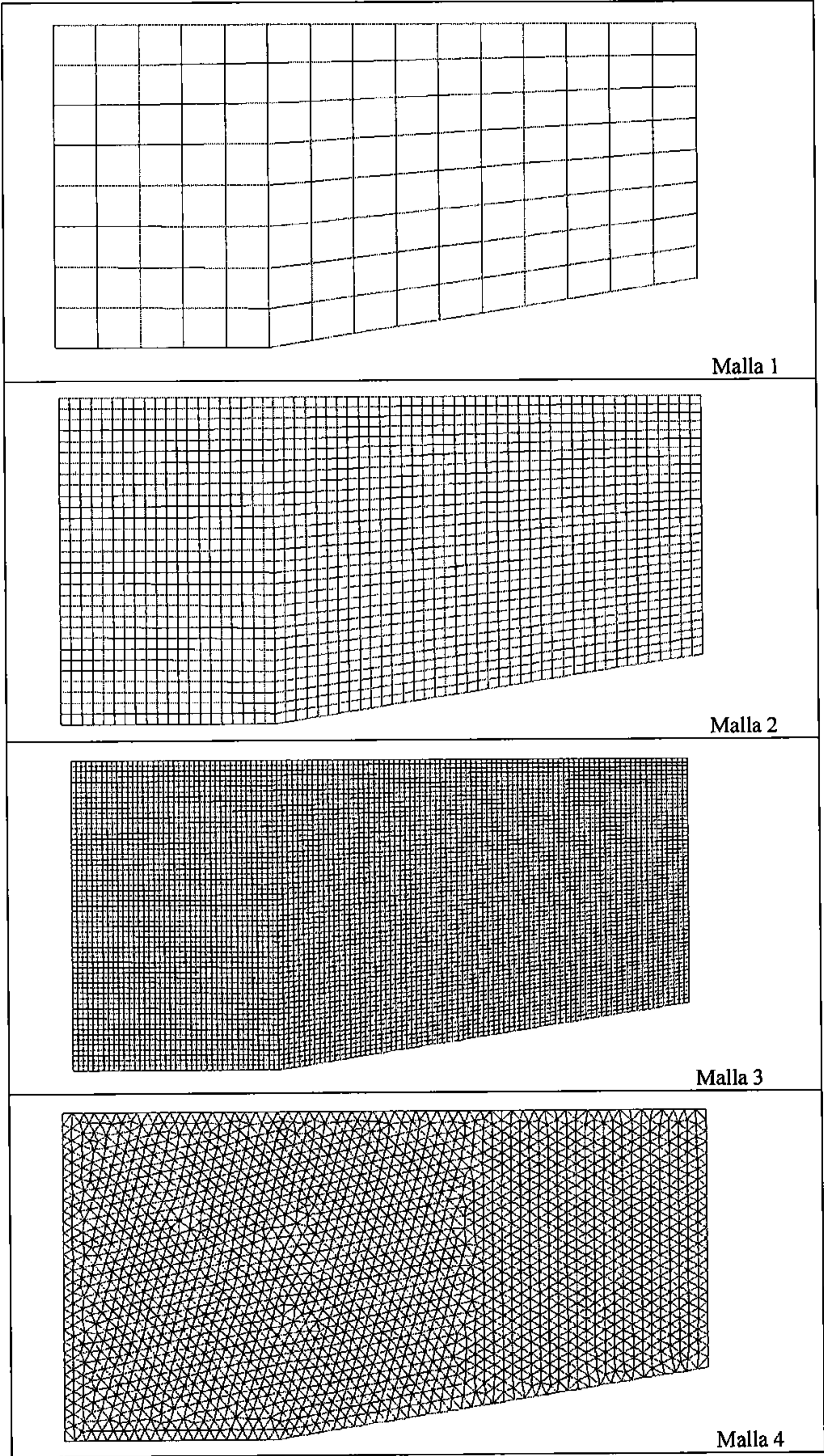


Figura 8.29. Mallas utilizadas en el cálculo de la onda cruzada.

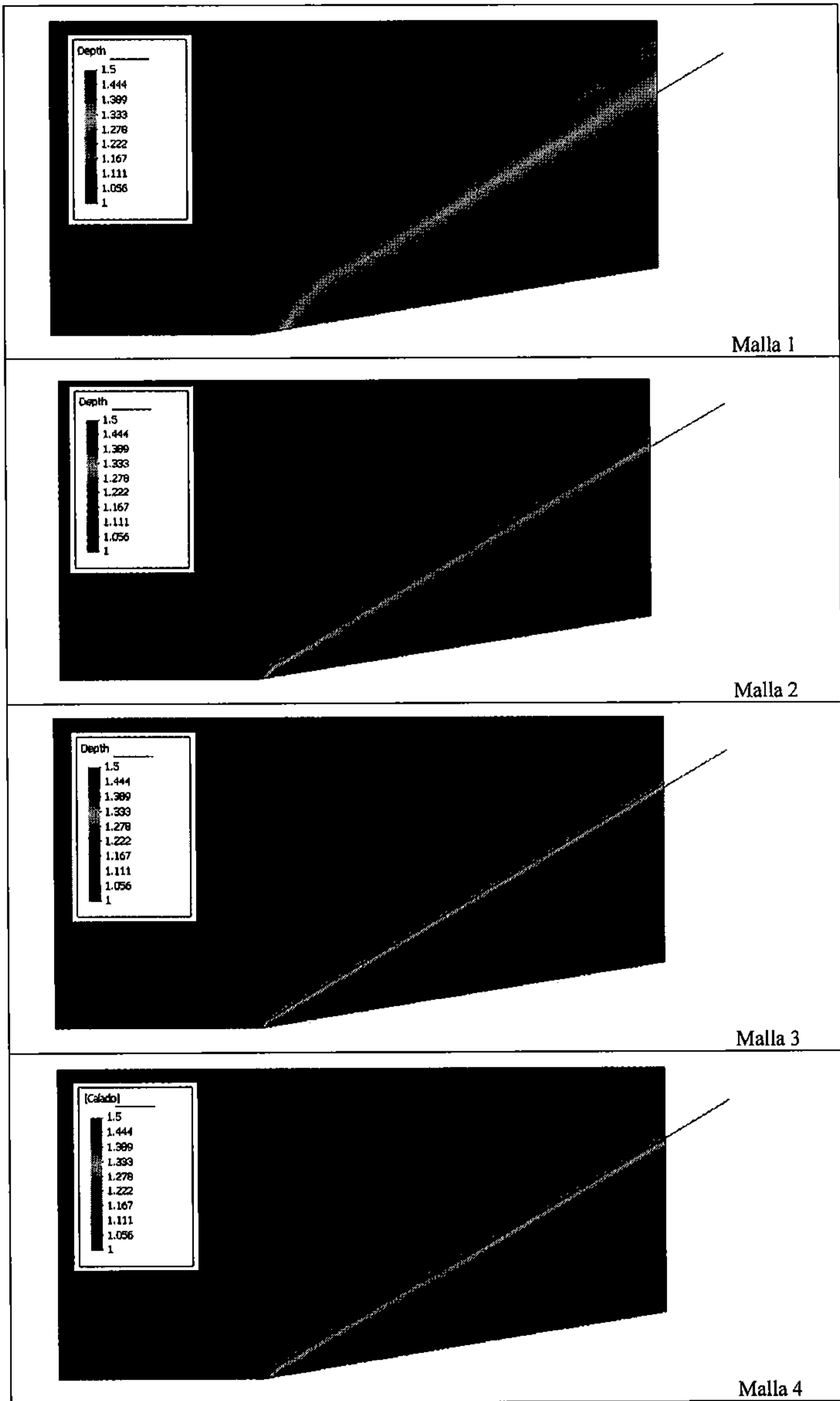


Figura 8.30. Resultados en calados del cálculo para las mallas de la Figura 8.29.

1. Cuadriláteros. 8 elementos a lo ancho del canal por 15 a lo largo.
2. Cuadriláteros. 30 elementos a lo ancho por 60 a lo largo
3. Cuadriláteros. 60 elementos a lo ancho por 120 a lo largo
4. Triángulos de 0.5 m de lado en promedio

En la Figura 8.30 se representa los calados resultantes del cálculo numérico. El esquema WAF TVD consigue reproducir exactamente los calados y velocidades a ambos lados de la onda, aunque lógicamente se aprecia una cierta dispersión variable en función da la malla: mayor dispersión a mayor tamaño de elemento, y mayor dispersión cuanto menor paralelismo existe entre los lados de los elementos y la onda. En la misma figura se indica con una línea negra la dirección que debería tener a onda cruzada según la solución exacta. Se aprecia plena coincidencia en los cuatro ejemplos.

Por otro lado, en la Figura 8.31 se presentan los perfiles de la lámina de agua para cada malla por una línea paralela a la margen derecha separada 2.75 m del mismo. Se observa que aguas arriba de la onda en todos los casos el calado es de 1.0 m, y aguas debajo de la misma de 1.5 m. Se observa la lógica mayor dispersión en las mallas más gruesas.

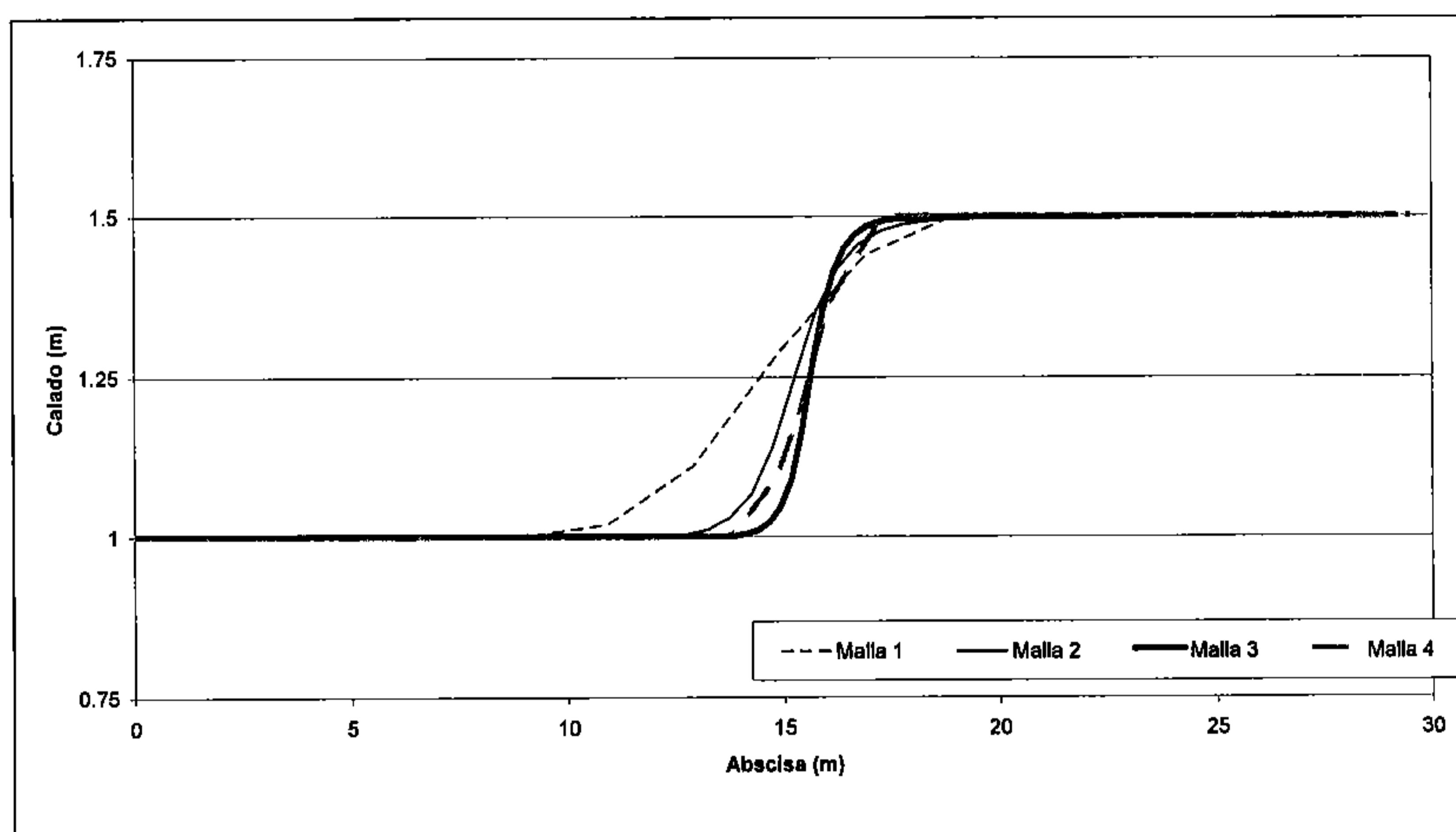


Figura 8.31. Perfil longitudinal de la lámina de agua por una línea paralela al margen derecho separada 2.75m del mismo.

8.4. Conservación del volumen en avance sobre fondo seco

Una de las exigencias de cualquier esquema numérico es que respete las ecuaciones originales. Para ello, los esquemas en volúmenes finitos son especialmente adecuados cuando las ecuaciones de partida son leyes de conservación, como es el caso. Para la modelización de un fenómeno de propagación de avenida es fundamental que se conserve el volumen. Tradicionalmente, durante el proceso de secado-mojado es donde suelen producirse los mayores errores en este sentido, aunque la metodología de secado-mojado implementada, y que se ha descrito en el capítulo anterior, consigue simular el proceso de secado mojado conservando exactamente el volumen.

Para la comprobación de la conservación del volumen se han estudiado una serie de casos sencillos que ponen a prueba el esquema y en los que es fácil comprobar la conservación de volumen. Es de destacar que se ha comprobado que la conservación de volumen es exacta no sólo en los ejemplos de este apartado, sino también en el resto de ejemplos de este capítulo y del siguiente.

Por otro lado, en todos los ejemplos utilizados en la verificación y en las aplicaciones se ha comprobado que el volumen se conserva de forma totalmente exacta, lo que, por otro lado, es automático con un esquema en volúmenes finitos de resolución de un sistema de donde una de las ecuaciones es la conservación de la masa.

8.4.1. Canal con dos niveles

Canal rectangular de 30 m de longitud en planta y 5 de ancho. El primer tercio del canal está a cota +5 m, mientras que el último tercio está a cota 0 m. El tramo intermedio es un plano inclinado que une las dos zonas planas. Como condición inicial se supone un calado de 5 m en 5 m de longitud. El resto de canal se supone seco. Tras el instante inicial se produce un fenómeno de ruptura de presa hasta que finalmente toda el agua queda parada en la zona inferior del canal. En la Figura 8.32 se presenta la malla de cálculo; en la Figura 8.33 se puede ver la condición inicial, y en la Figura 8.34 el estado final. En este caso se comprobó que el volumen de agua es de 125.000 m^3 a lo largo de todo el cálculo.

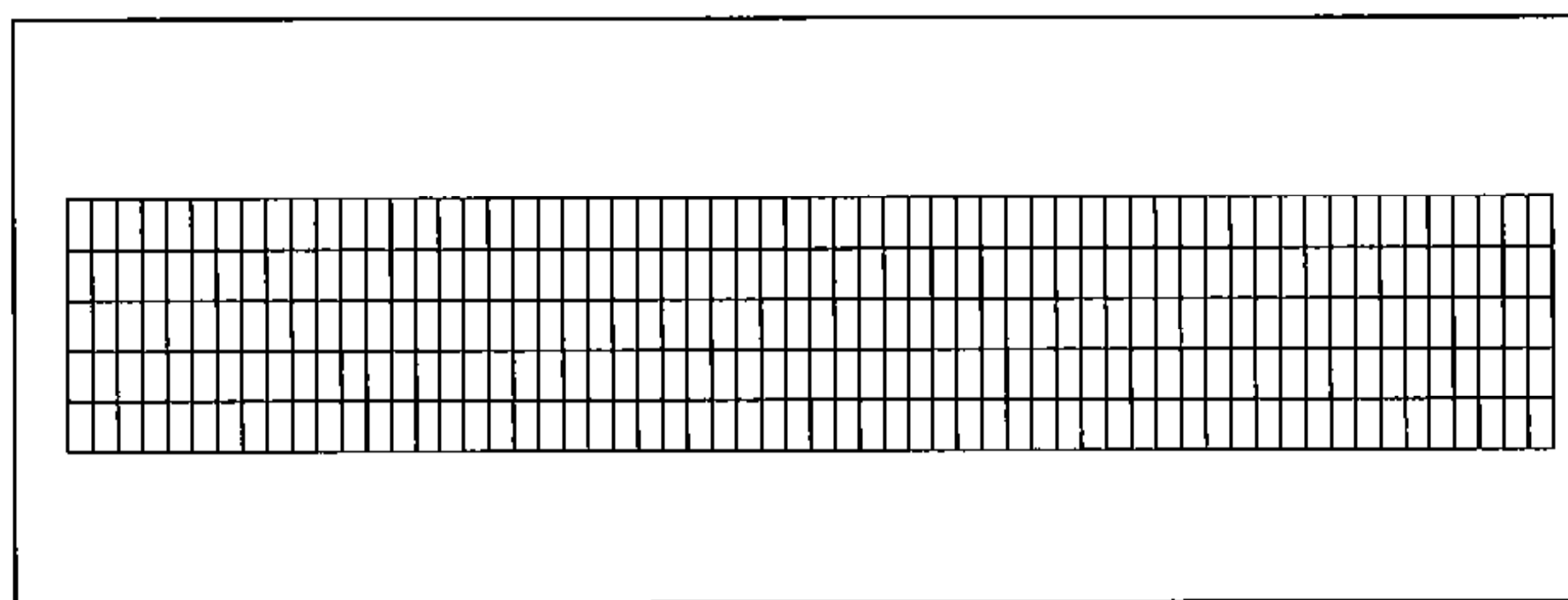


Figura 8.32. Malla de cálculo en el canal con dos niveles.

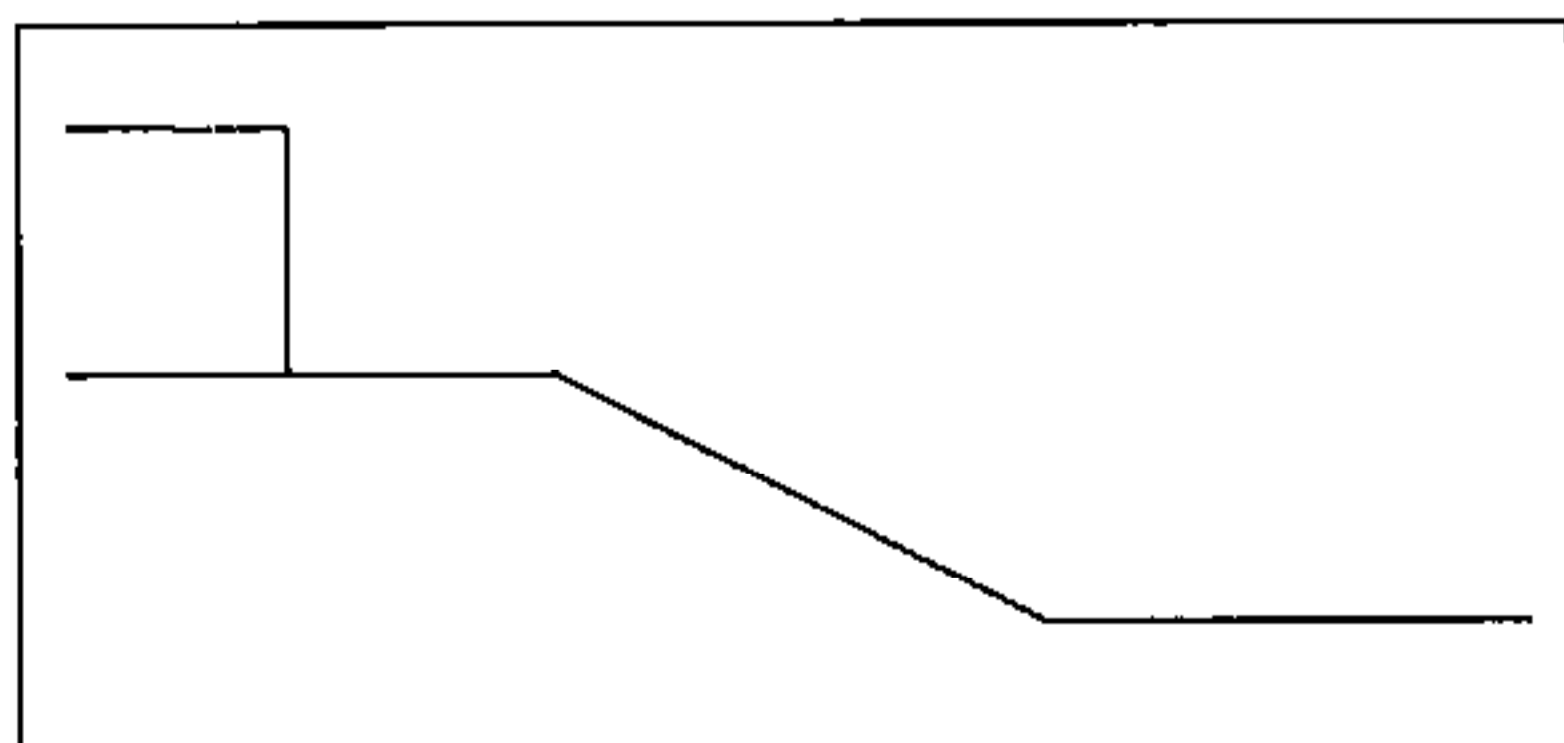


Figura 8.33. Canal con dos niveles. Solera y lámina de agua en el instante inicial.

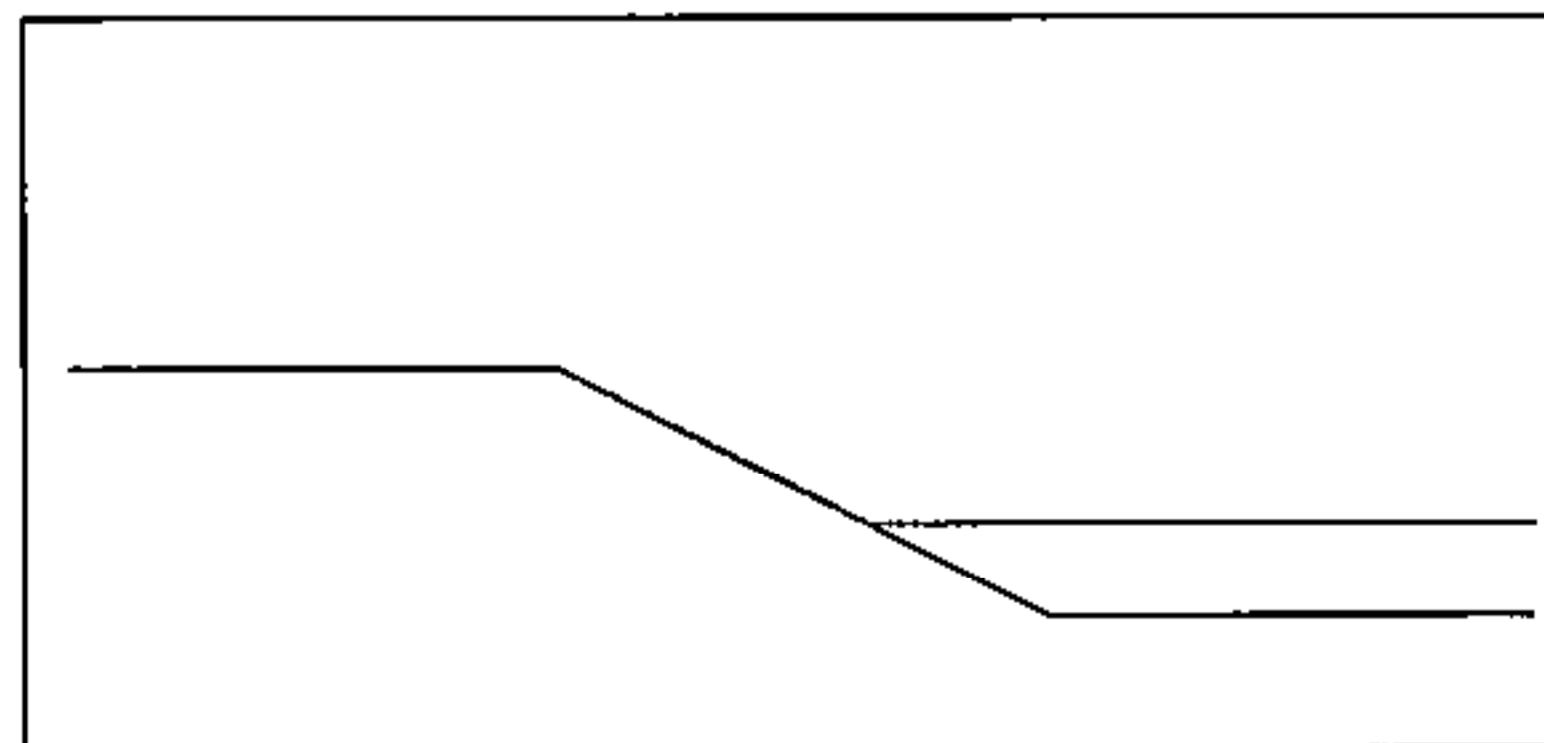


Figura 8.34. Canal con dos niveles. Solera y lámina de agua en el instante final.

8.4.2. Concentración de agua en una cubeta

En este caso se considera un canal de 100 m de longitud con pendiente hacia su punto medio. Entre $x=0$ y $x=40$, la pendiente es de 0.0025, mientras que entre $x=40$ y $x=50$ la pendiente es de 0.5. El lado derecho es simétrico. Igual que antes, se supone una condición inicial de agua parada y 5 m de calado pero ahora en los 10 m del extremo izquierda. Al final del cálculo todo el volumen de agua queda en la cubeta central del canal. El volumen se mantiene constante e igual a 250.000 m^3 .

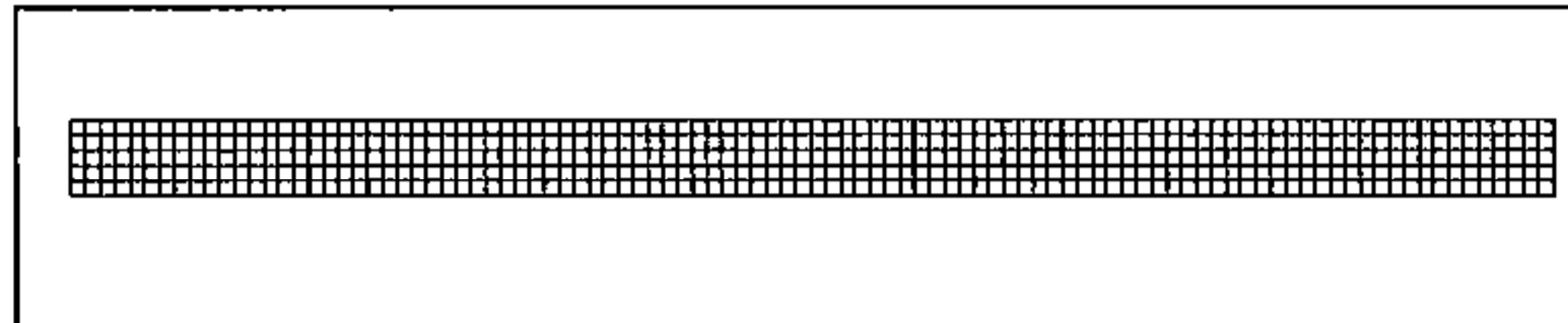


Figura 8.35. Malla de cálculo en el canal con cubeta central.

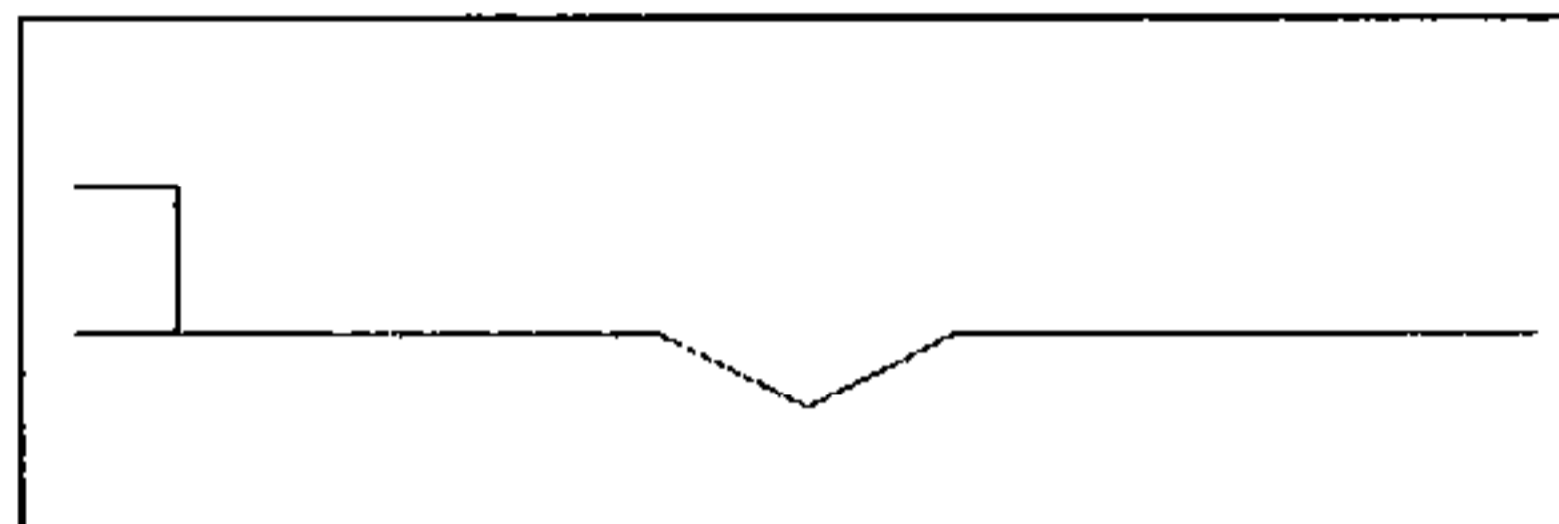


Figura 8.36. Concentración de agua en una cubeta. Solera y lámina de agua en el instante inicial.

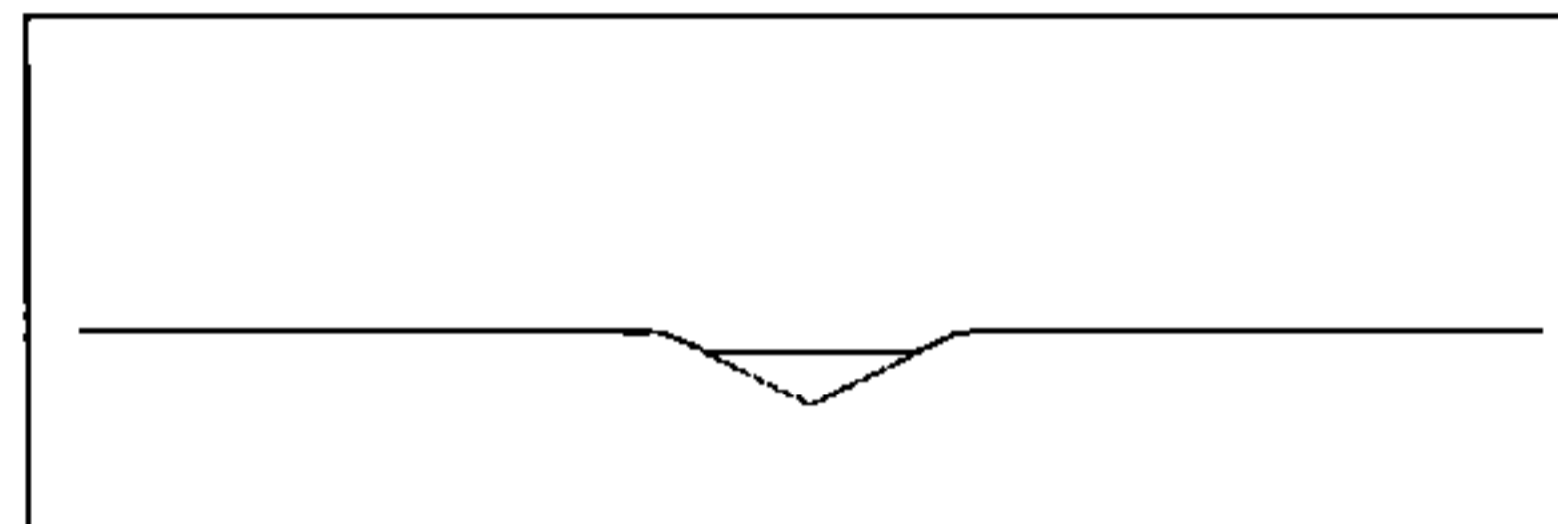


Figura 8.37. Concentración de agua en una cubeta. Solera y lámina de agua en el instante final.

8.4.3. Canal con sobreelevación de solera

En este caso se ha considerado un canal de 60 m de longitud por 10 m de ancho con una cota de solera variable entre 0 y 3 m.

En la Figura 8.38 se muestra la malla de cálculo, mientras que en la Figura 8.39 y Figura 8.40 se presentan respectivamente la condición inicial y la situación final. En este caso la situación inicial es de 5 m de calado en 17 m de longitud y en todo el ancho. El volumen es de 850.000 m^3 en todo el cálculo

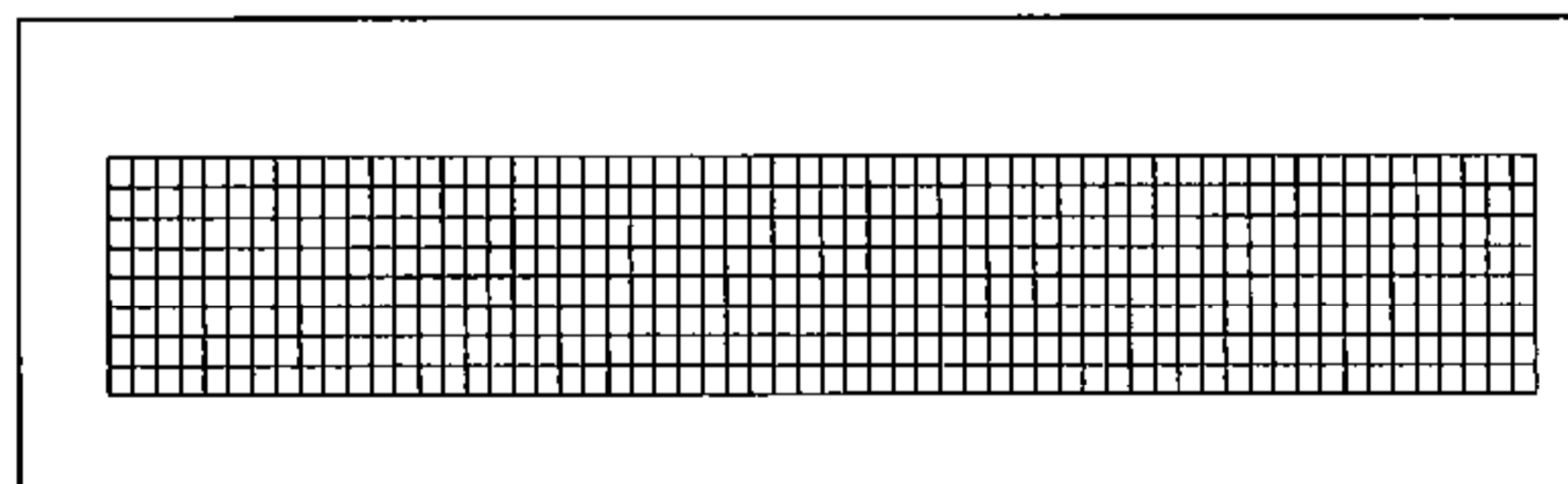


Figura 8.38. Malla de cálculo en el canal con sobreelevación.

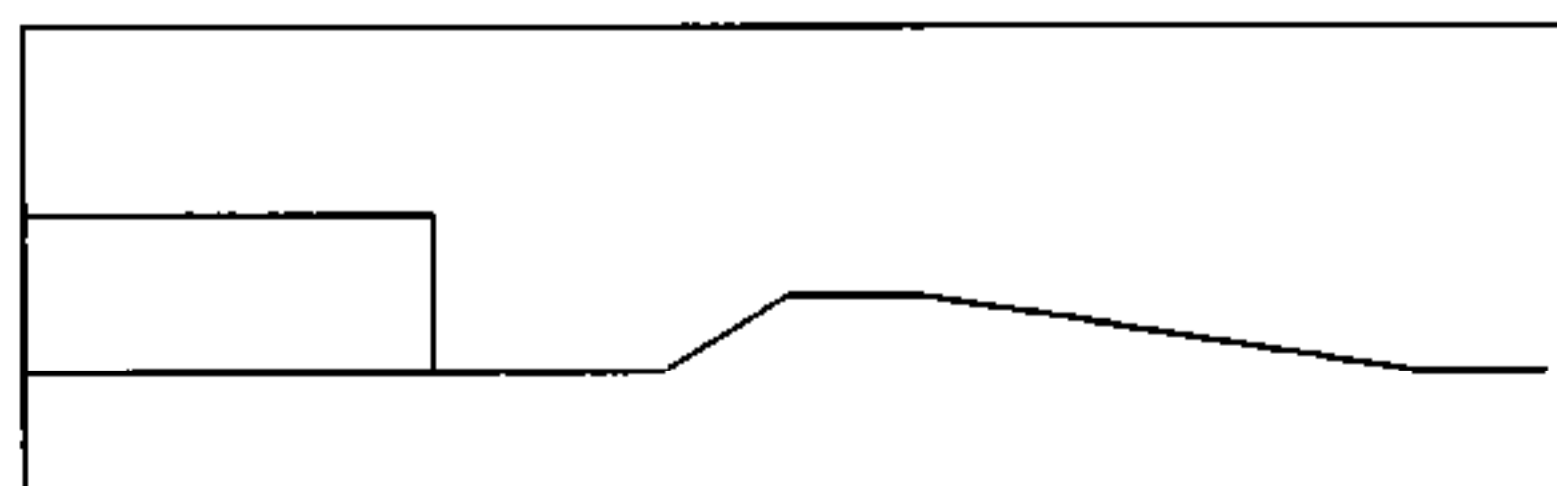


Figura 8.39. Canal con sobreelevación. Solera y lámina de agua en el instante inicial.

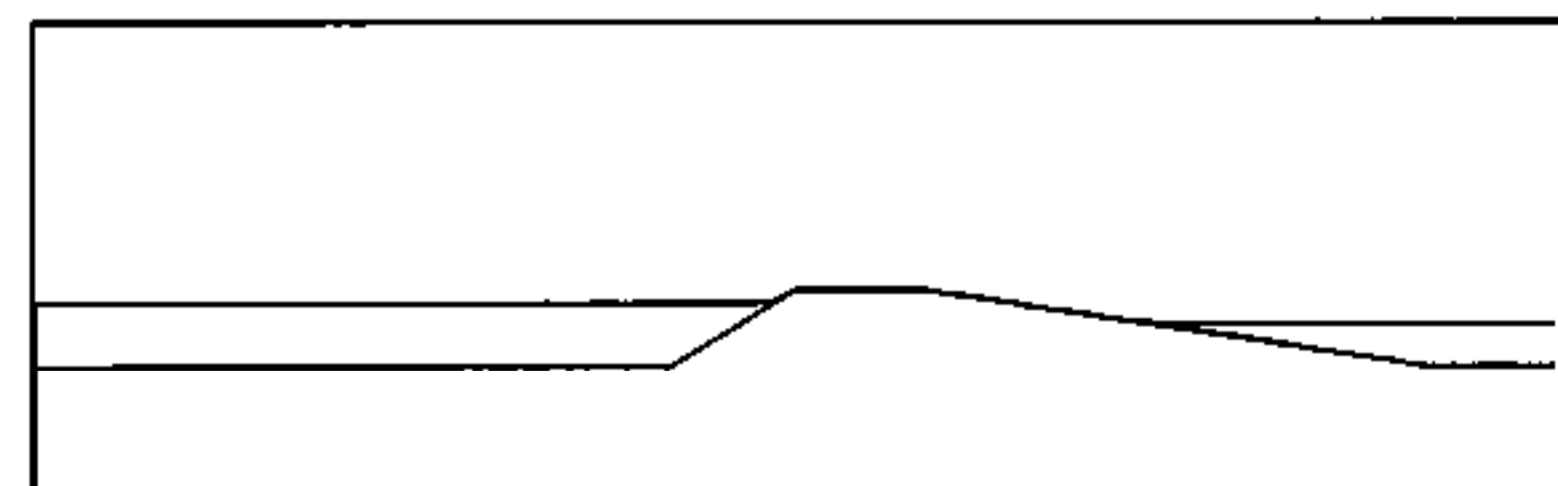


Figura 8.40. Canal con sobreelevación. Solera y lámina de agua en el instante final.

8.4.4. Área con pendientes convergentes

Se considera un área rectangular de 1000 m de largo por 600 m de ancho, formada por tres planos con pendiente según el eje y hacia el centro y según el eje x hacia la derecha. Como condición inicial se impone un calado de 3 m en un área situada en la esquina superior izquierda de 400 m de largo por 180 m de ancho. Los 216000 m³ se mantienen constantes en todo el cálculo.

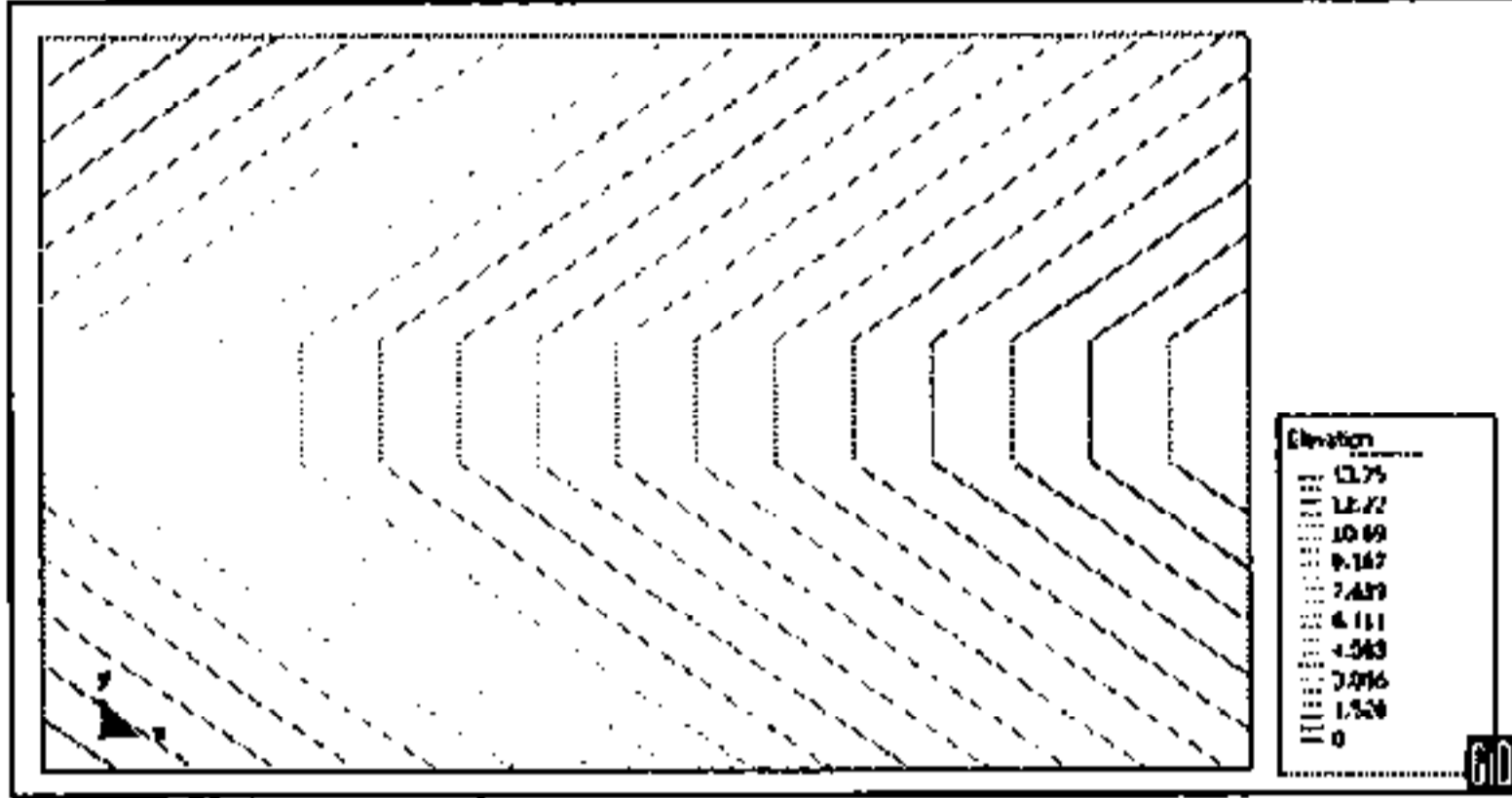


Figura 8.41. Área con pendientes convergentes. Curvas de nivel.

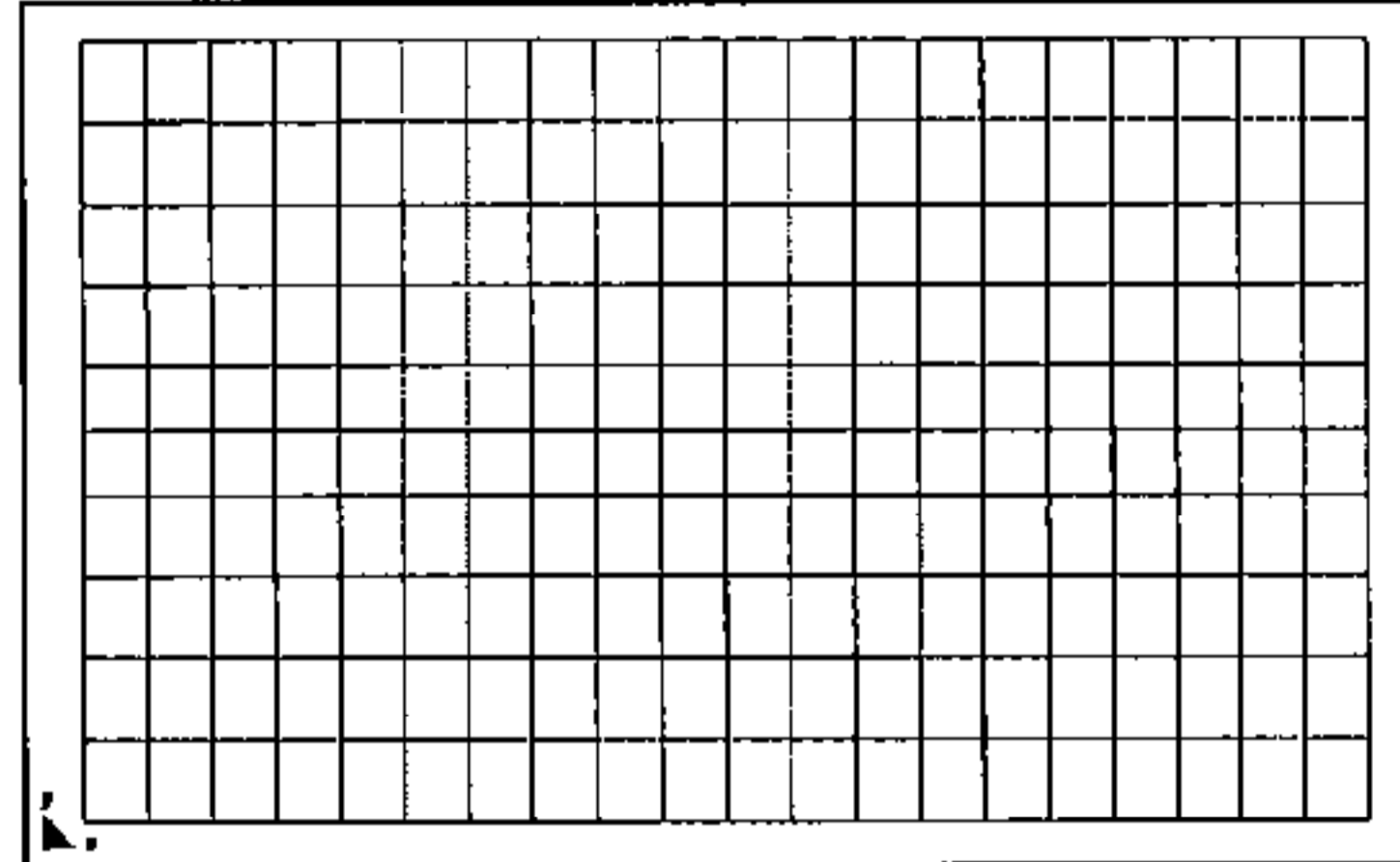


Figura 8.42. Área con pendientes convergentes Malla de cálculo



Figura 8.43. Área con pendientes convergentes Condición inicial



Figura 8.44. Área con pendientes convergentes Situación final

8.5. Conexión entre dominios 1D y 2D

En este apartado se comprueba el correcto funcionamiento de las conexiones entre dominios unidimensionales y bidimensionales, en primer lugar para conexiones en el sentido del flujo, para los que el extremo aguas abajo de un tramo unidimensional conecta con un tramo bidimensional, y luego para conexiones por desbordamiento lateral del tramo 1D. Para ello se estudian una serie de geometrías simples con los distintos tipos de conexión que se pueden encontrar.

8.5.1. Conexión en el sentido del flujo

Se ha considerado un canal rectangular de 1000 m de longitud y 50 m de ancho, y coeficiente de rugosidad de Manning de 0.030. En el extremo aguas abajo se supone un vertedero a la altura de la solera y un coeficiente de desagüe de 2.0. Las condiciones iniciales corresponden a un caudal de $50 \text{ m}^3 / \text{s}$, a partir del cual se incorpora un hidrograma de caudal triangular, con tiempo al pico de 1800 s, tiempo base de 3600 s y caudal punta de $1000 \text{ m}^3 / \text{s}$. En el extremo aguas arriba se supone un vertedero con coeficiente de desagüe de 2. Antes de introducir el hidrograma, se deja correr el cálculo durante 5000 s para estabilizar la solución a régimen permanente.

Se estudia la evolución temporal de niveles y caudales en el canal, con cuatro discretizaciones distintas:

1. Todo el tramo discretizado en dos dimensiones
2. Primeros 500 m aguas arriba en dos dimensiones, el resto en una dimensión
3. Primeros 500 m aguas arriba en una dimensión, el resto en dos dimensiones
4. Todo el tramo discretizado en una dimensión

En la Figura 8.45 se representan las cuatro discretizaciones utilizadas. Las zonas 2D se han discretizado con elementos de 10 m de longitud en la dirección del flujo, y nueve elementos a lo ancho del canal. En los tramos 1D las secciones transversales distan 10 m entre sí.

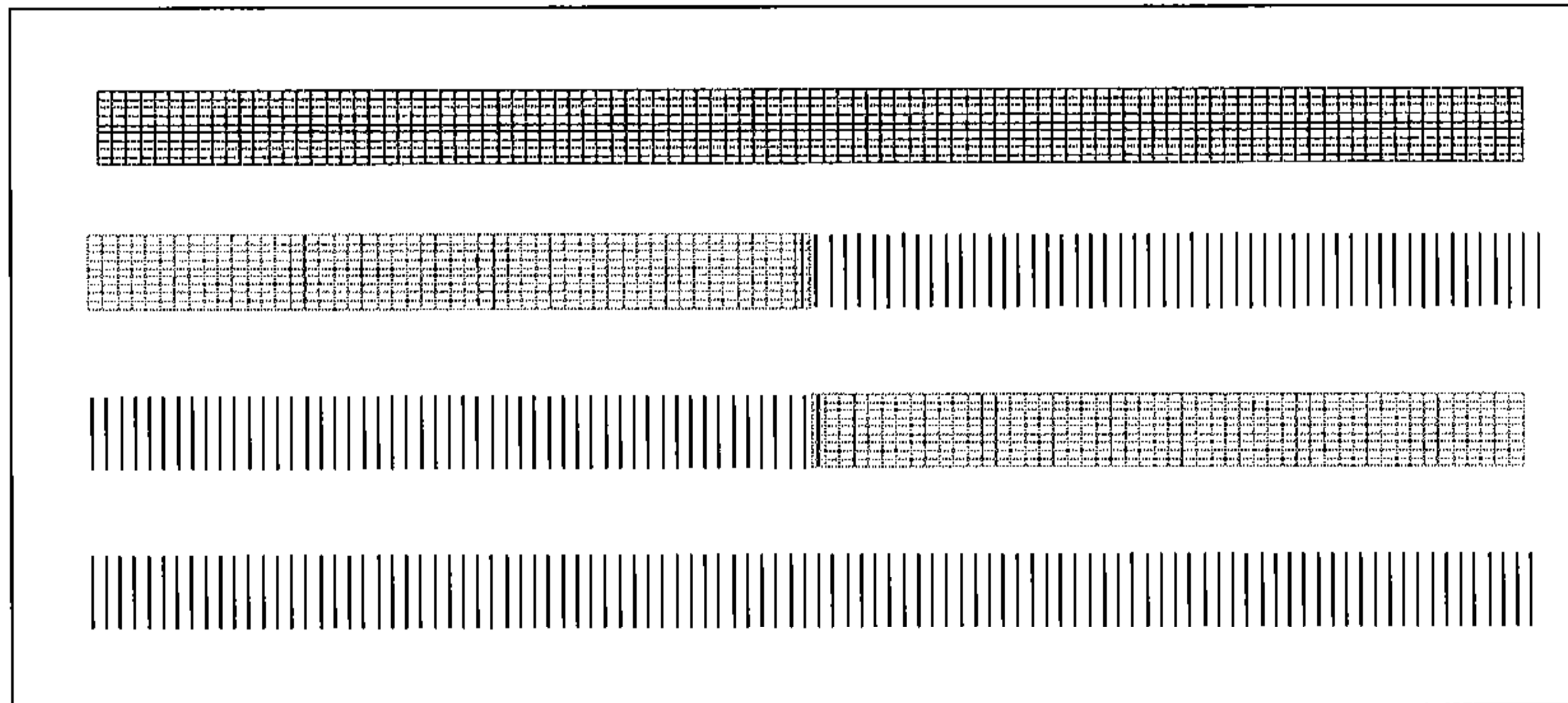


Figura 8.45. Esquema de las cuatro discretizaciones utilizadas (la izquierda corresponde a aguas arriba)

Para verificar que la conexión entre zonas 1D y 2D se realiza de forma correcta, se han comparado los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones. Si el esquema numérico respeta las ecuaciones de partida en las conexiones, los resultados deberían coincidir en los cuatro casos.

En primer lugar, en la Figura 8.46, Figura 8.47, Figura 8.48 y Figura 8.49 se representan los caudales en distintas secciones del canal con las cuatro aproximaciones descritas. Se observan resultados coincidentes entre ellas, aunque esto se aprecia mejor en la Figura 8.51, en la que se sobreponen los resultados de las cuatro

discretizaciones para $x = 250m$ y $x = 750m$ sin que se pueda apreciar diferencias entre ellos. Aun así, en la Figura 8.51 y Figura 8.52 se representan estas pequeñas diferencias, tomando como referencia la aproximación totalmente unidimensional. Las diferencias son siempre inferiores a $1 m^3 / s$, y si se representan de forma relativa (en porcentaje de caudal, Figura 8.52 y Figura 8.53) se obtienen siempre diferencias inferiores al 0.5%. Estas pequeñas diferencias se deben a los distintos esquemas utilizados, concretamente al distinto tratamiento de la rugosidad que se hace en una y dos dimensiones: en una dimensión existe un único valor de la pendiente motriz en cada sección, mientras que en dos dimensiones, la fricción, y por lo tanto la pendiente motriz, es distinta en los elementos próximos a las paredes del canal que en el centro del mismo.

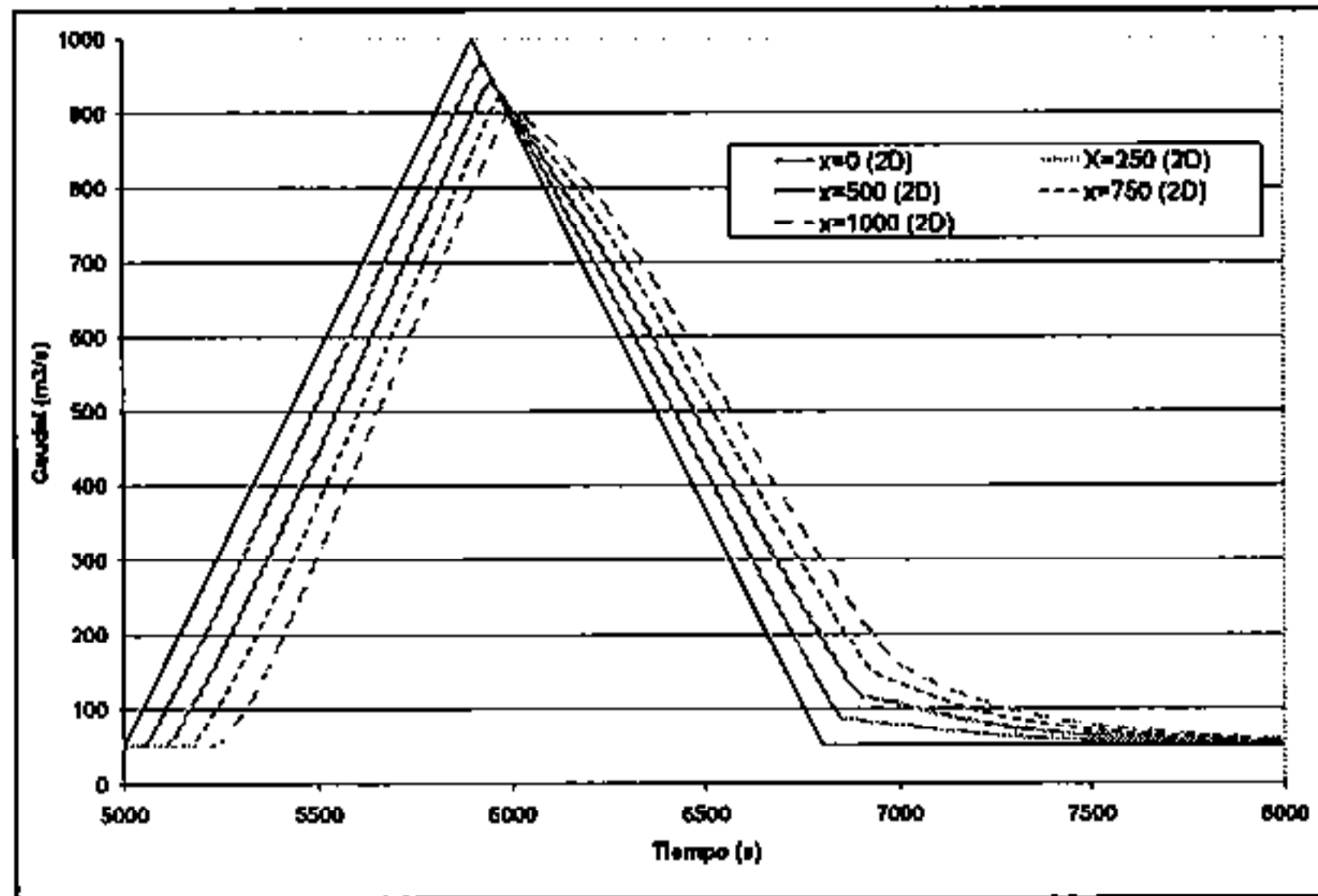


Figura 8.46. Aproximación 2D en todo el dominio.

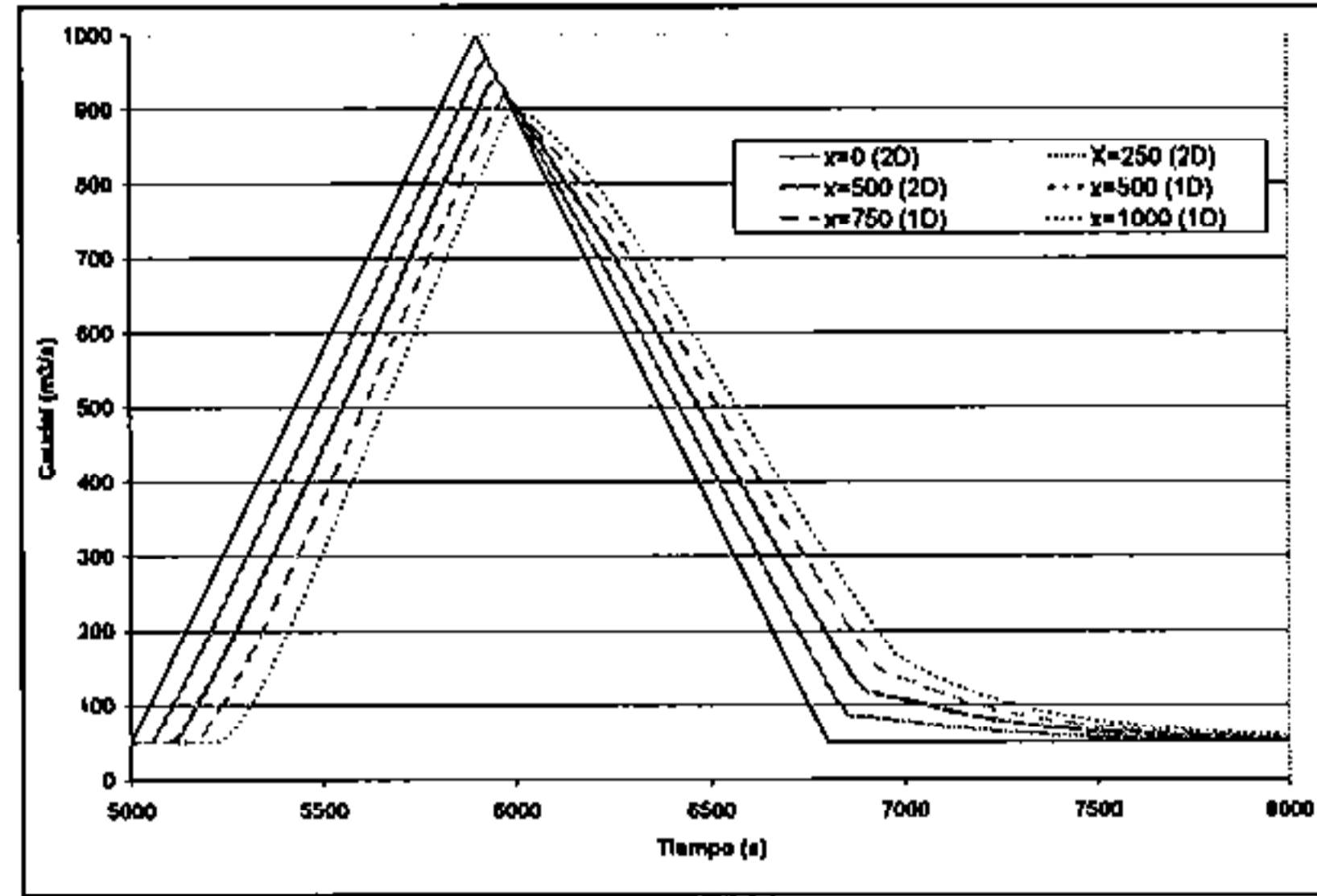


Figura 8.47. Aproximación 2D en los 500m aguas arriba y 1D en los 500m aguas abajo.

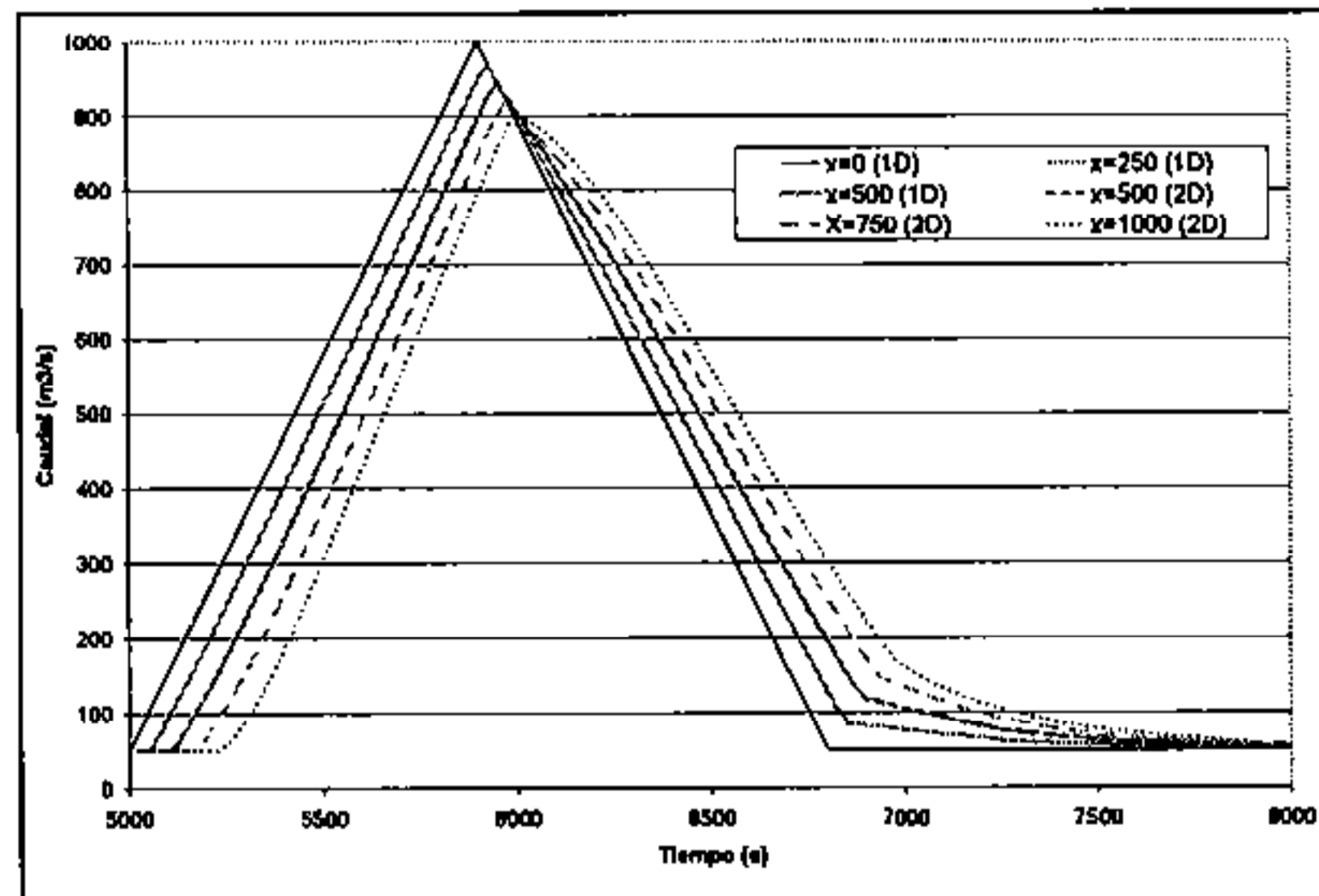


Figura 8.48. Aproximación 1D en los 500m aguas arriba y 2D en los 500m aguas abajo.

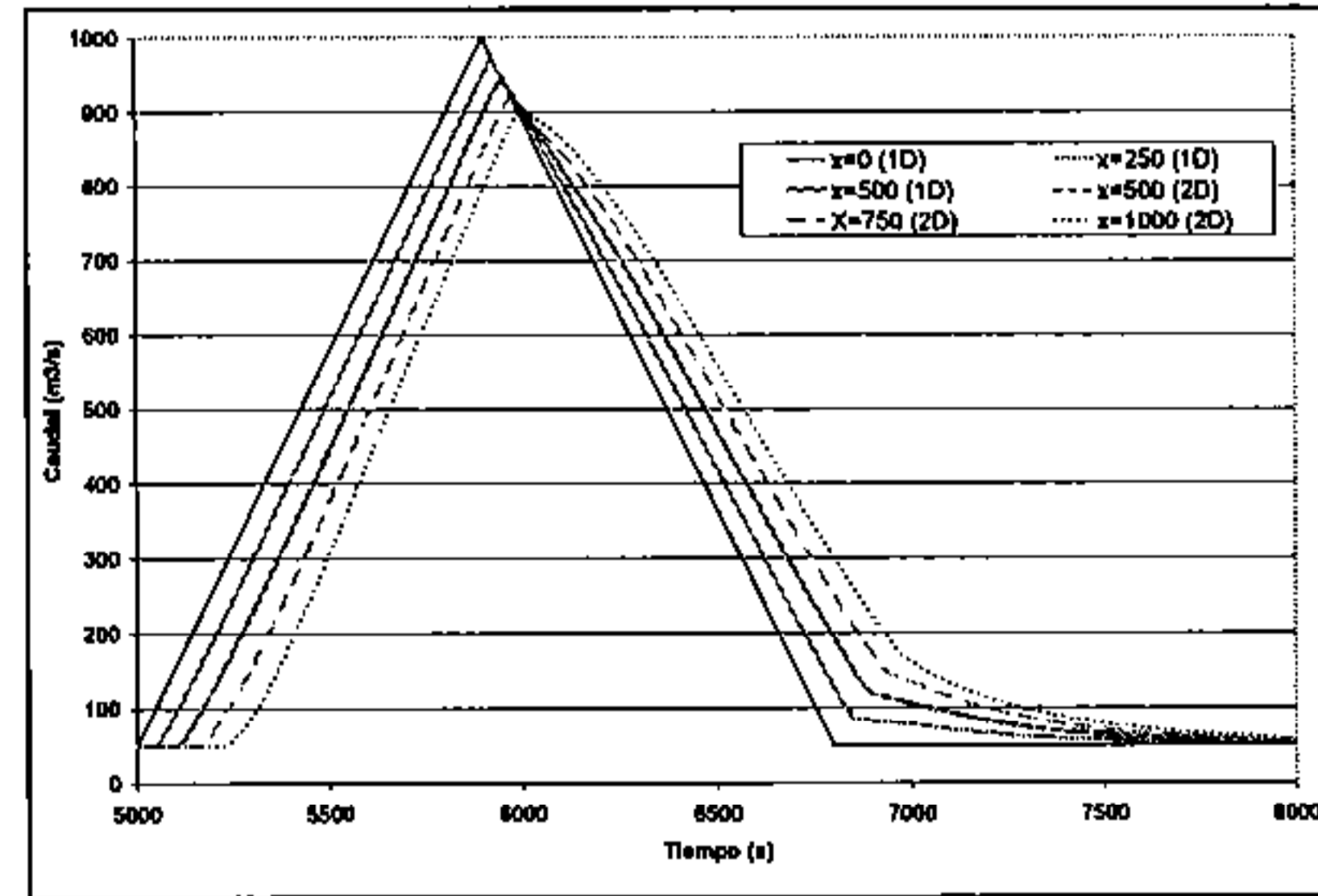


Figura 8.49. Aproximación 1D en todo el dominio.

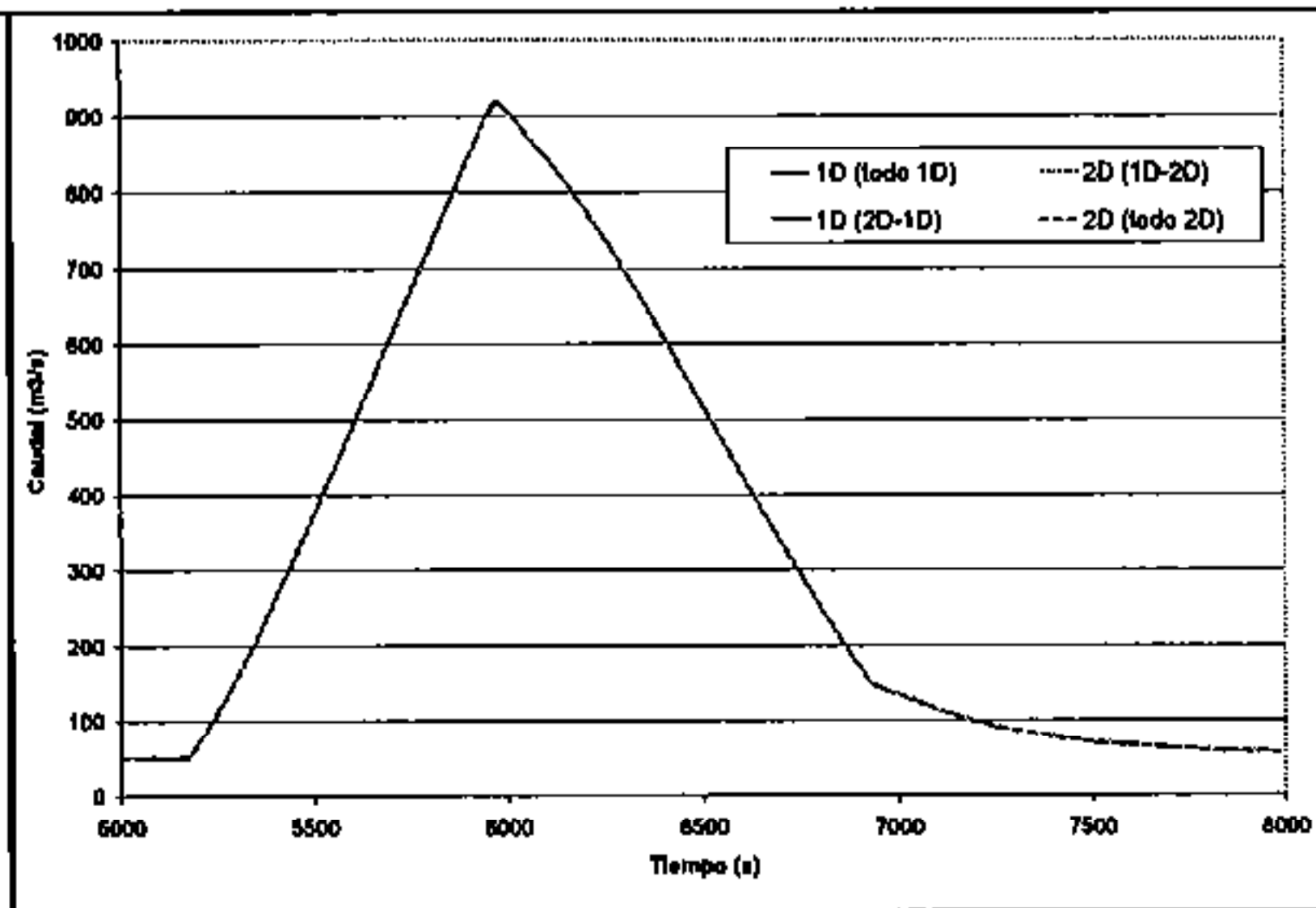
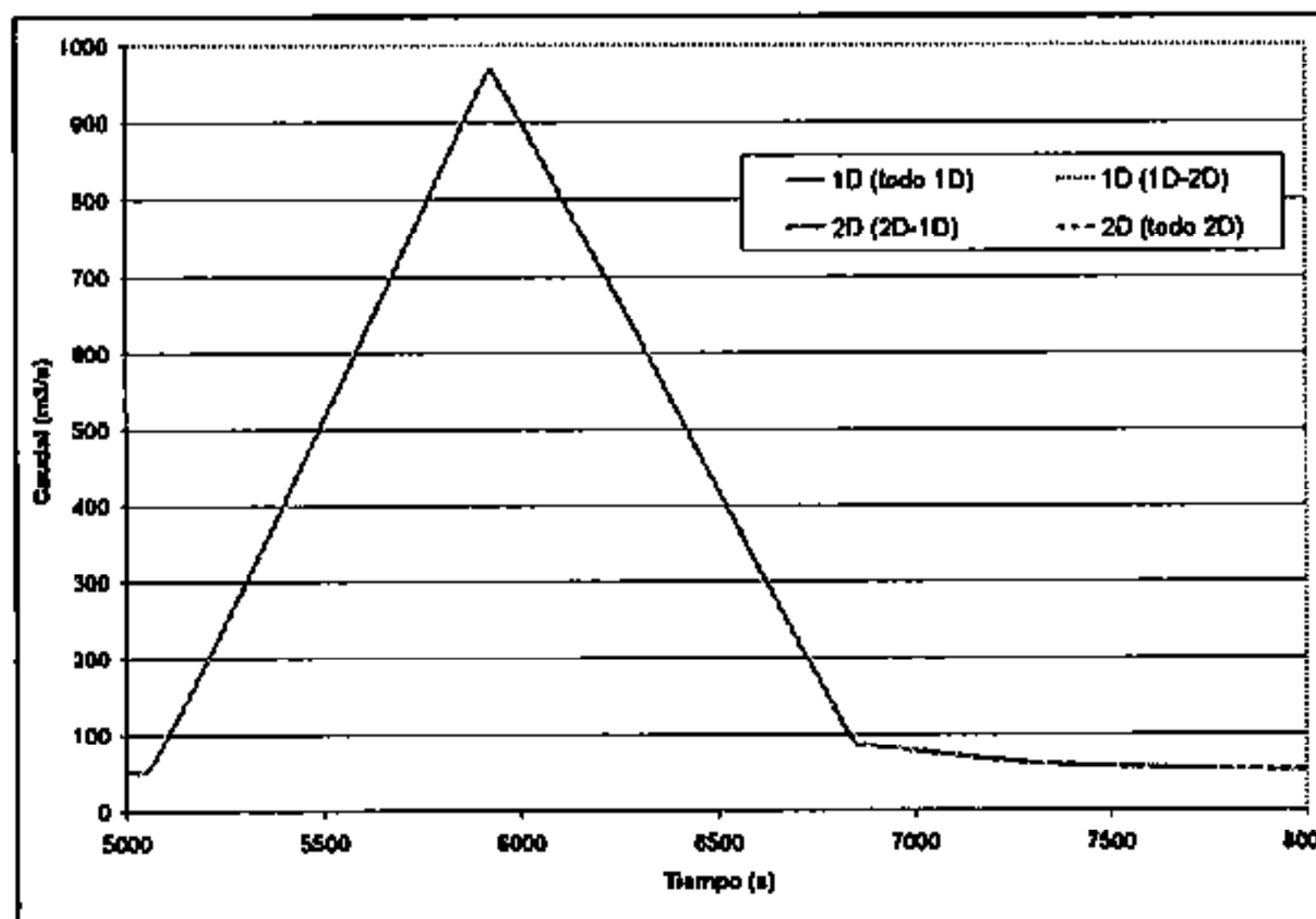


Figura 8.50. Caudal en $x=250$ (izquierda) y $x=750$ (derecha) con las cuatro discretizaciones utilizadas.

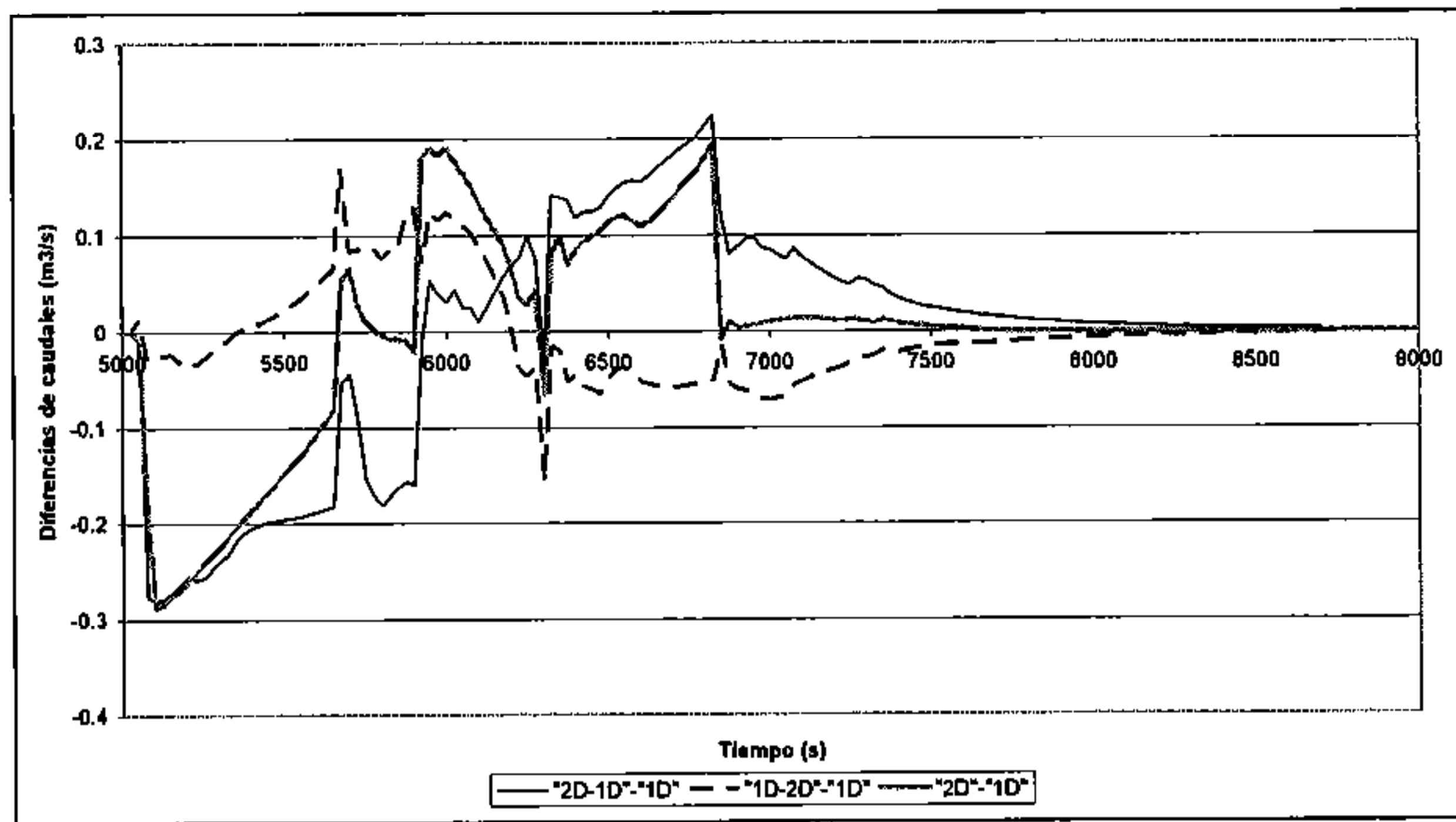


Figura 8.51. Diferencias en caudal entre las distintas aproximaciones en $x=250$.

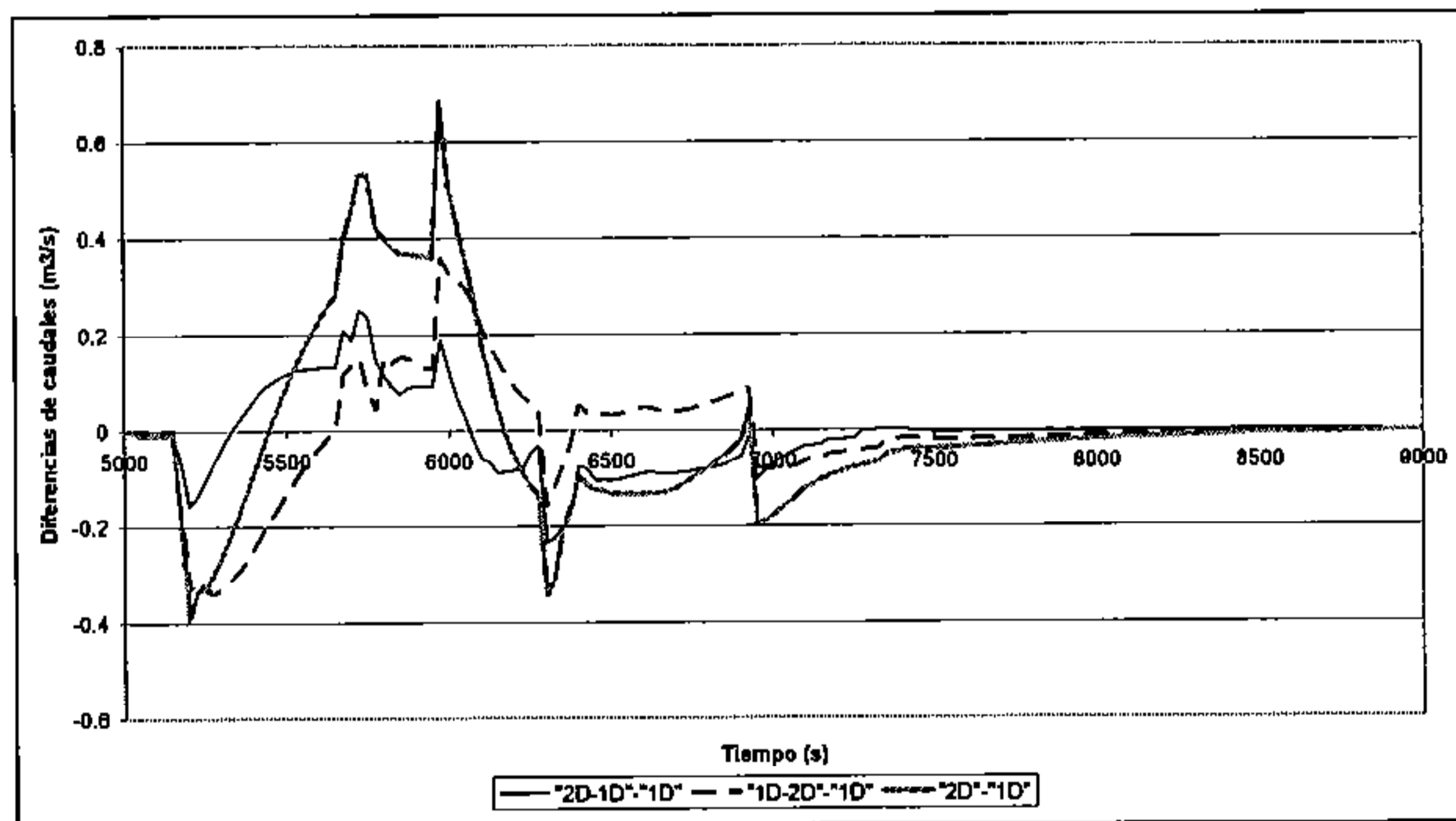


Figura 8.52. Diferencias en caudal entre las distintas aproximaciones en $x=750$.

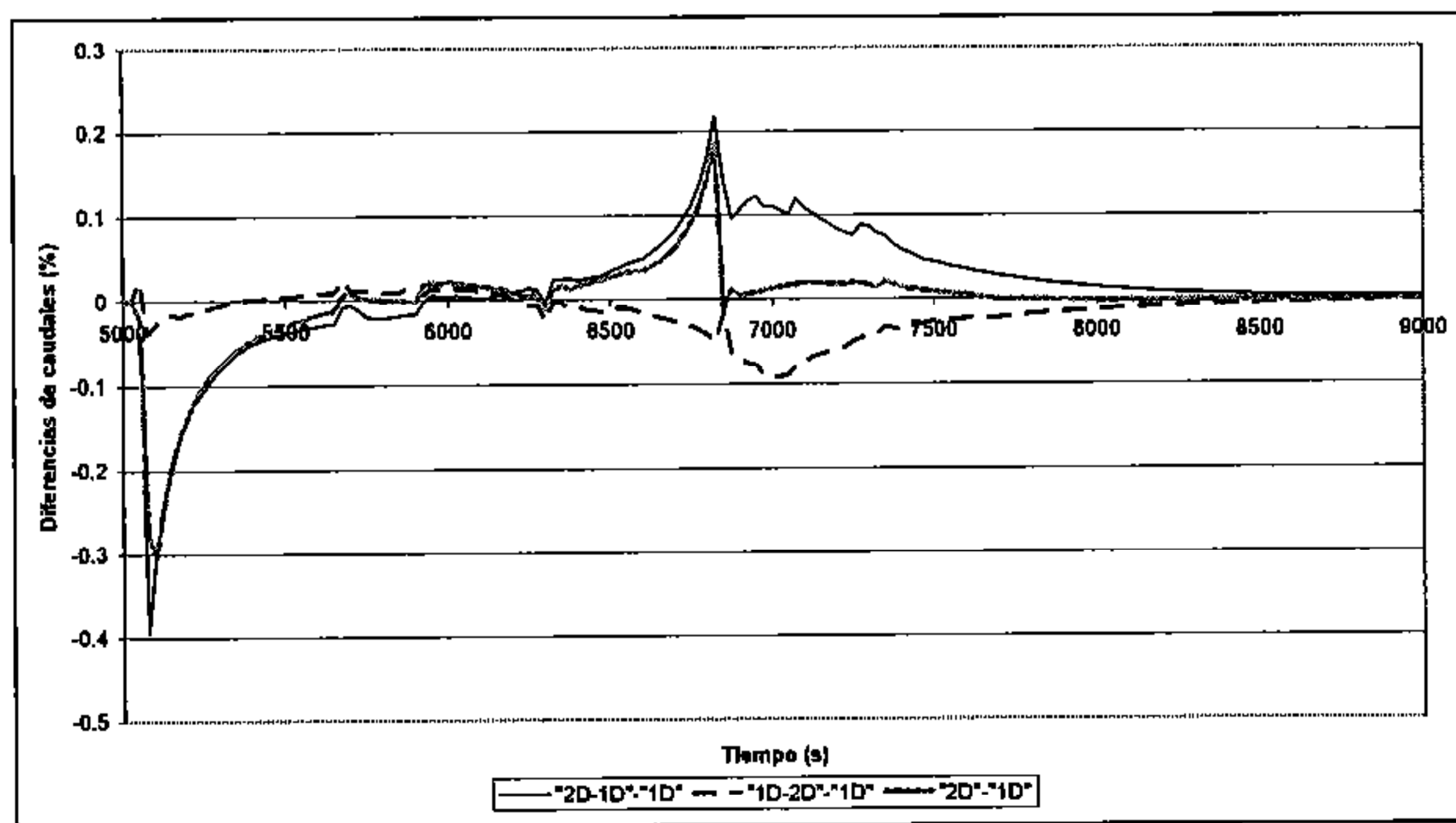


Figura 8.53. Diferencias en porcentaje de caudal entre las distintas aproximaciones en $x=250$.

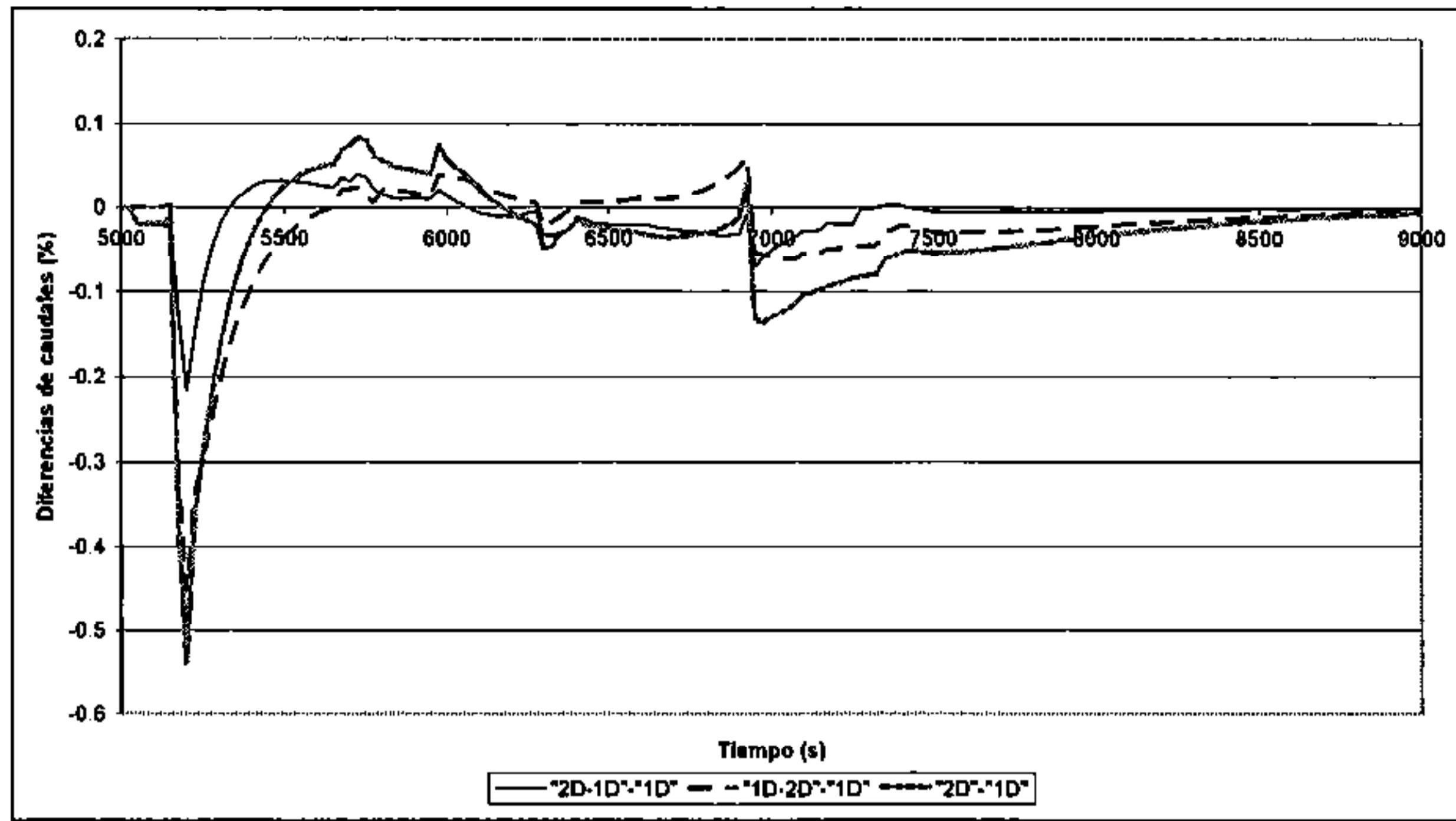


Figura 8.54. Diferencias en porcentaje de caudal entre las distintas aproximaciones en $x=750$.

En la Figura 8.75 se representan los niveles en las distintas secciones del canal. Se representa solamente el caso de aproximación totalmente 2D, ya que visualmente no se aprecian diferencias de niveles entre ésta y las otras aproximaciones (de la misma manera que ocurría en caudales en la Figura 8.46, Figura 8.47, Figura 8.48 y Figura 8.49. Para apreciar estas diferencias, en la Figura 8.76 y Figura 8.77 se han representado las diferencias de cota de lámina de agua en $x = 250m$ y $x = 750m$ respectivamente, tomando como referencia el caso 1D en todo el dominio. Las máximas diferencias son del orden de 1 cm

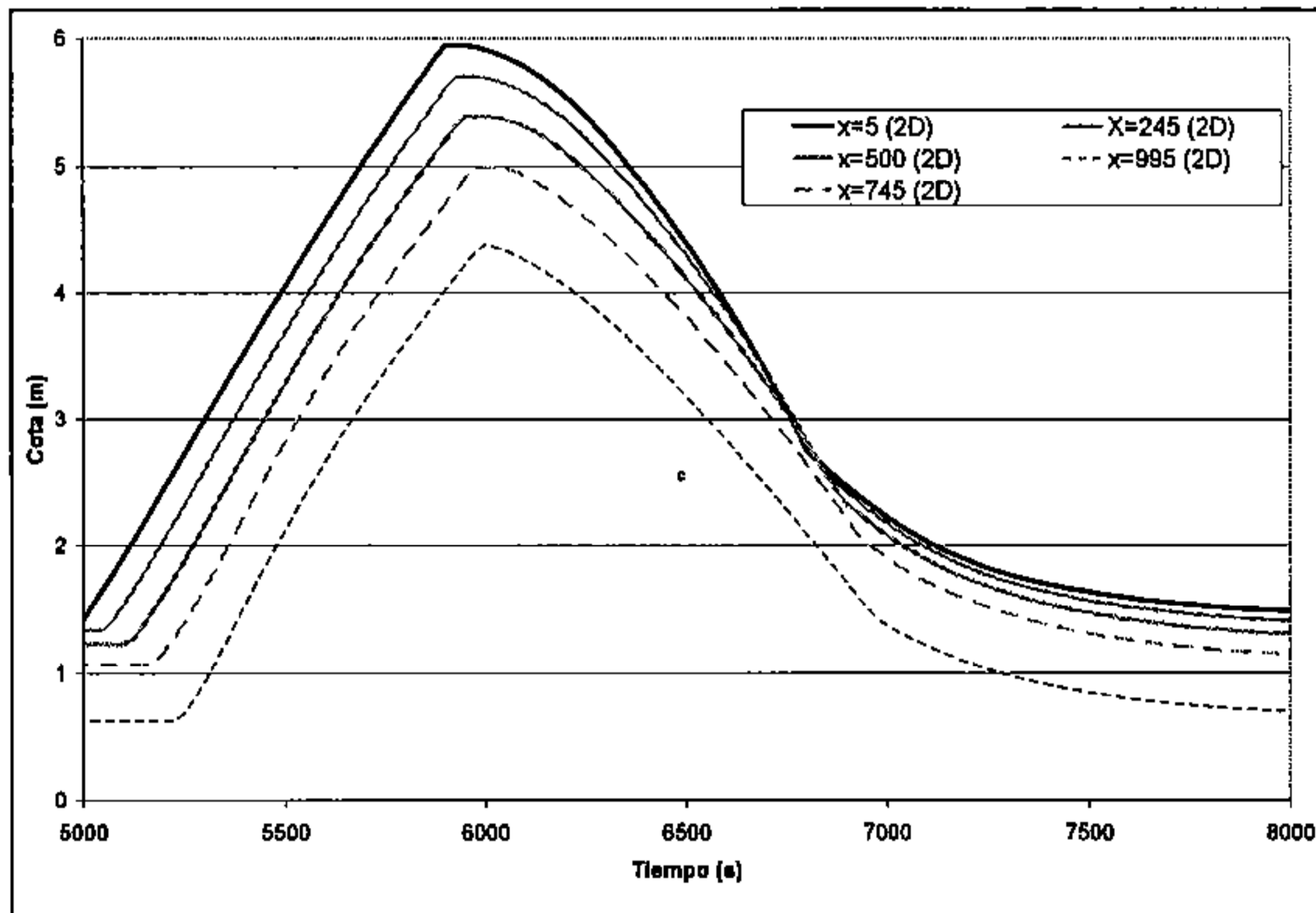


Figura 8.55. Niveles de agua en distintas abscisas.

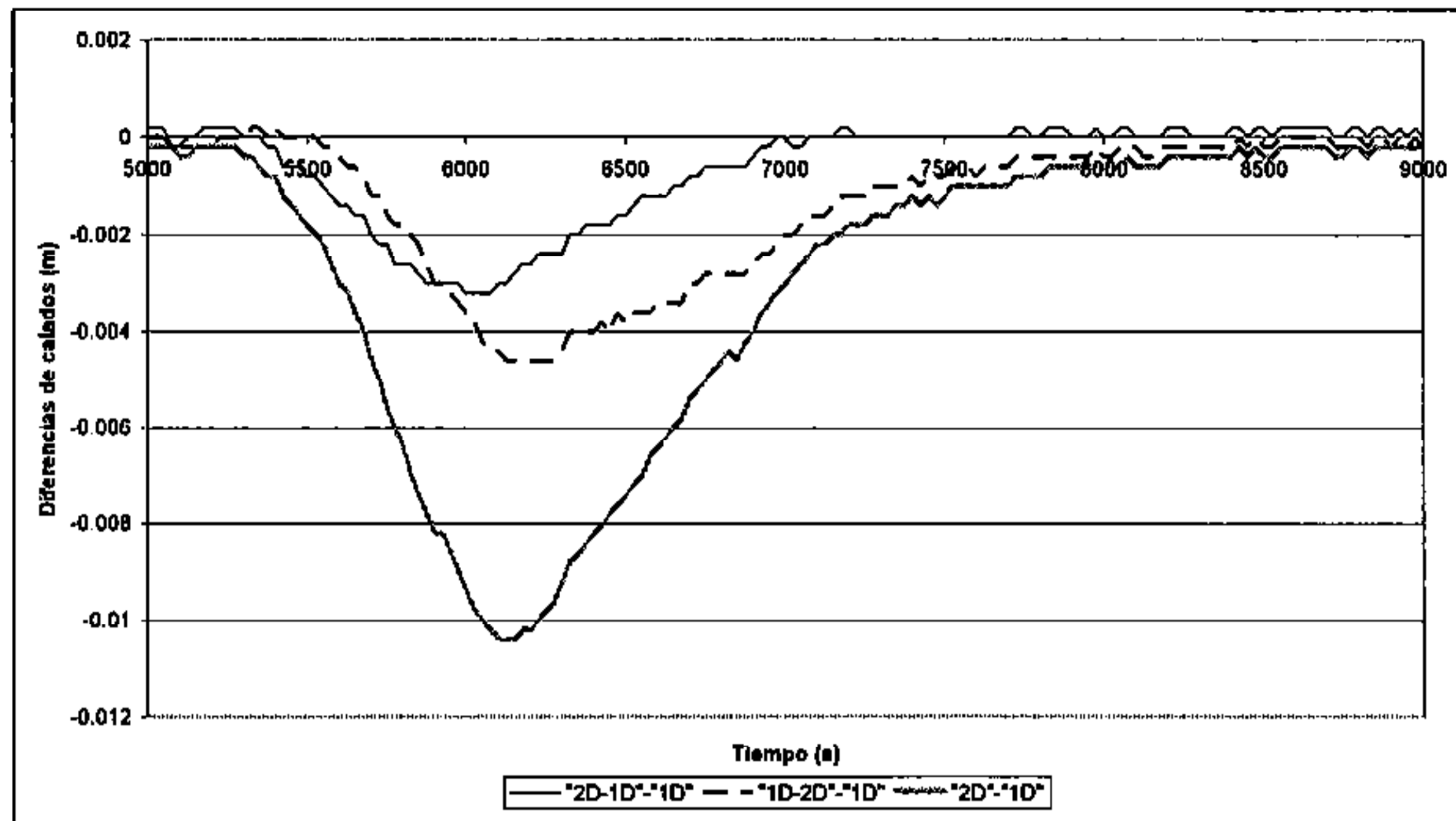


Figura 8.56. Diferencias en cota de agua entre las distintas aproximaciones en $x=250$.

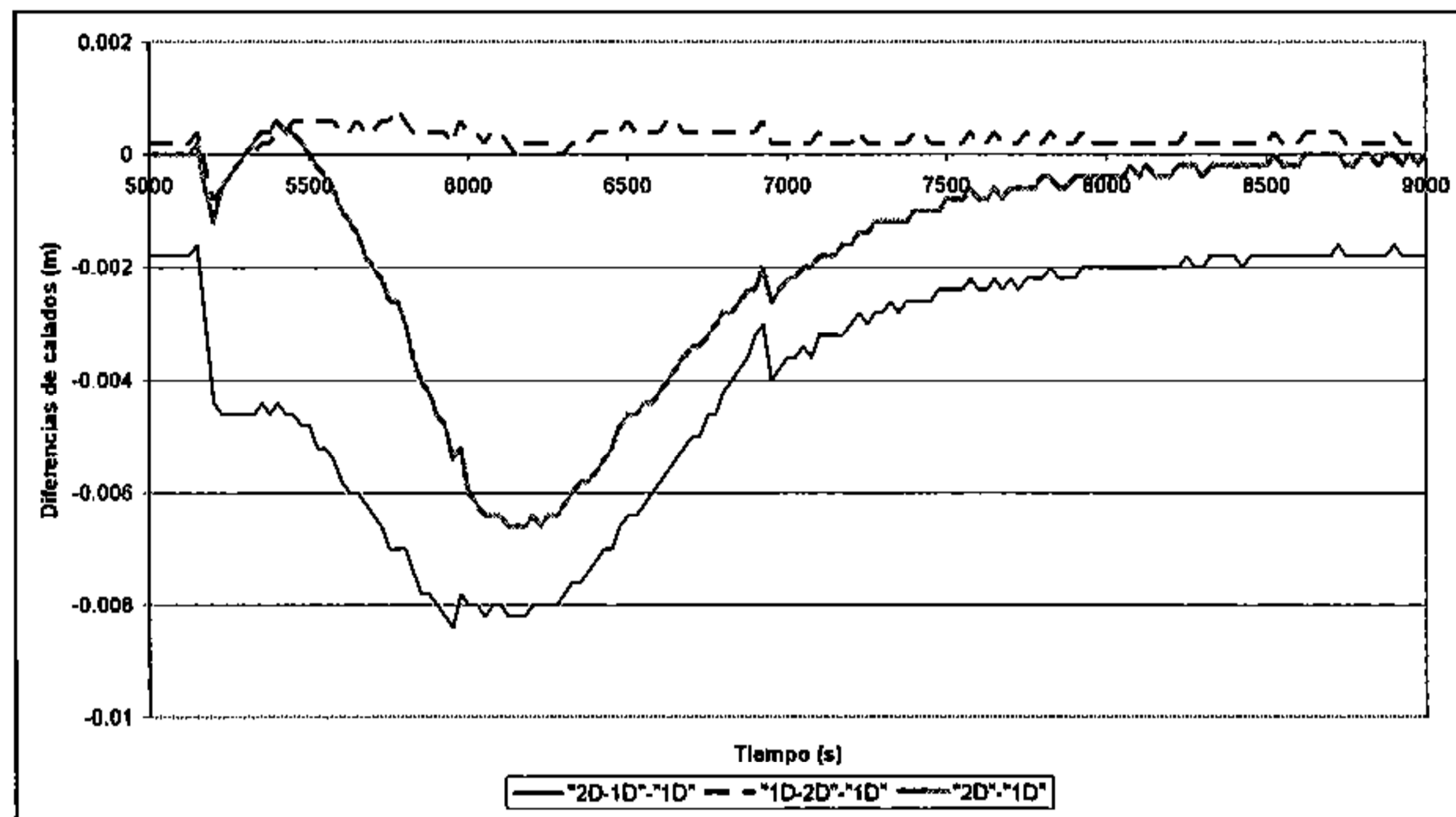


Figura 8.57. Diferencias en cota de agua entre las distintas aproximaciones en $x=750$.

8.5.2. Conexión por desbordamiento lateral

Se ha considerado un canal rectangular, de 1000 m de longitud, 50 m de ancho, pendiente de 0.001 y coeficiente de rugosidad de Manning de 0.030 . El extremo aguas abajo está formado por un vertedero a la cota de la solera de coeficiente de desagite 1.7 . En su extremo aguas abajo (abscisa 1000) la solera del canal está a cota 0 m . El canal, en su tramo central, puede desbordar a una zona llana de forma cuadrada, de $500\text{ m} \times 500\text{ m}$, con el fondo a cota $+3.0$. El canal se ha discretizado con secciones transversales separadas 10 m entre ellas, mientras que la llanura se ha discretizado con una malla de volúmenes finitos cuadrados de $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ (Figura 8.58).

Para la verificación, se han considerado los dos tipos de conexión implementados en el programa CARPA: conexión con vertedero y conexión tipo río.

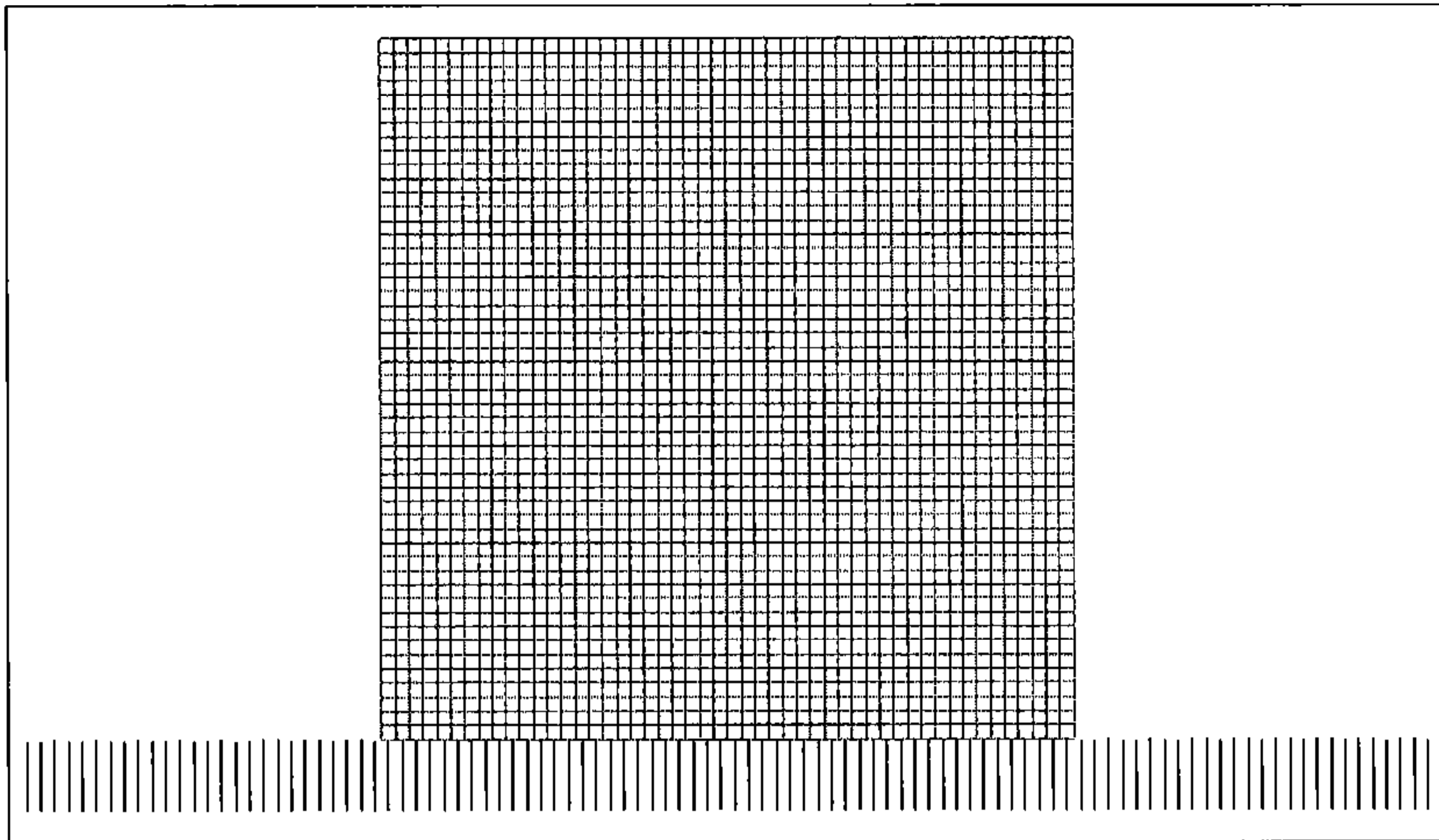


Figura 8.58. Esquema de la conexión por desbordamiento lateral (la izquierda corresponde con el extremo aguas arriba).

Conexión con vertedero:

En este caso la conexión entre río y llanura se realiza por un vertedero a la cota $+4\text{ m}$. El coeficiente de desagüe del vertedero es $Cd = 1.7$. En la Figura 8.59 se presenta un corte transversal del río y Llanura de inundación.

Los hidrogramas de entrada y salida del río, e hidrograma de transferencia río-llanura se presentan en la Figura 8.60, mientras que en la Figura 8.64 se presentan los resultados de cota de agua para la sección del río correspondiente a $x = 505\text{ m}$, así como en el elemento de volumen de la llanura contiguo a la misma. En la misma figura se puede observar el caudal de transferencia entre el río y la llanura a través de dicha sección.

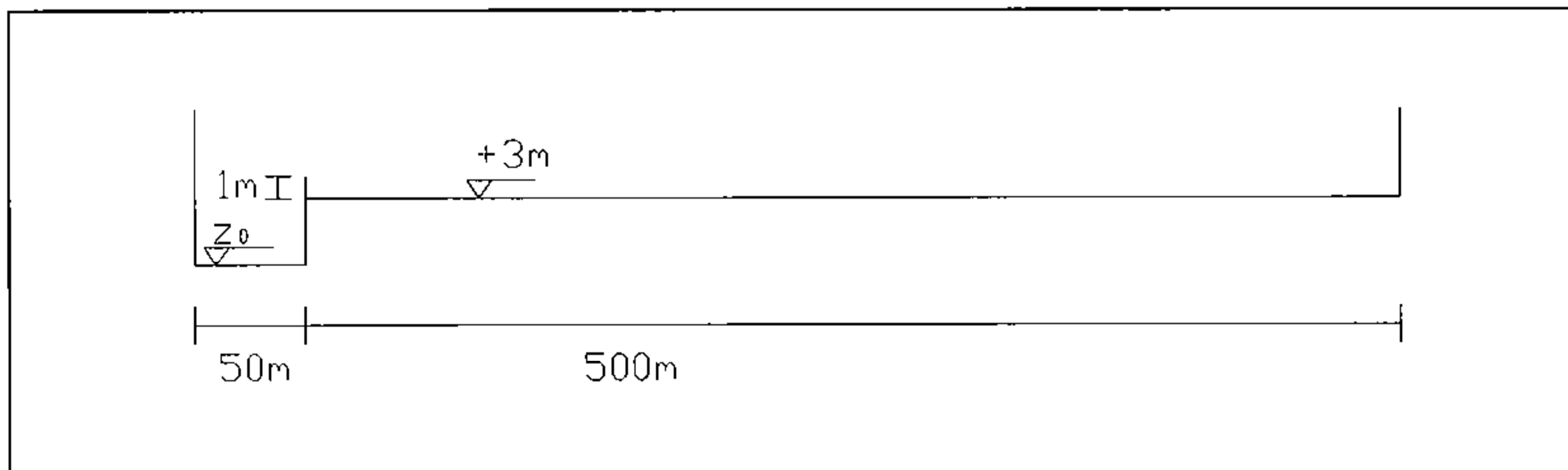


Figura 8.59. Sección transversal de la conexión con vertedero

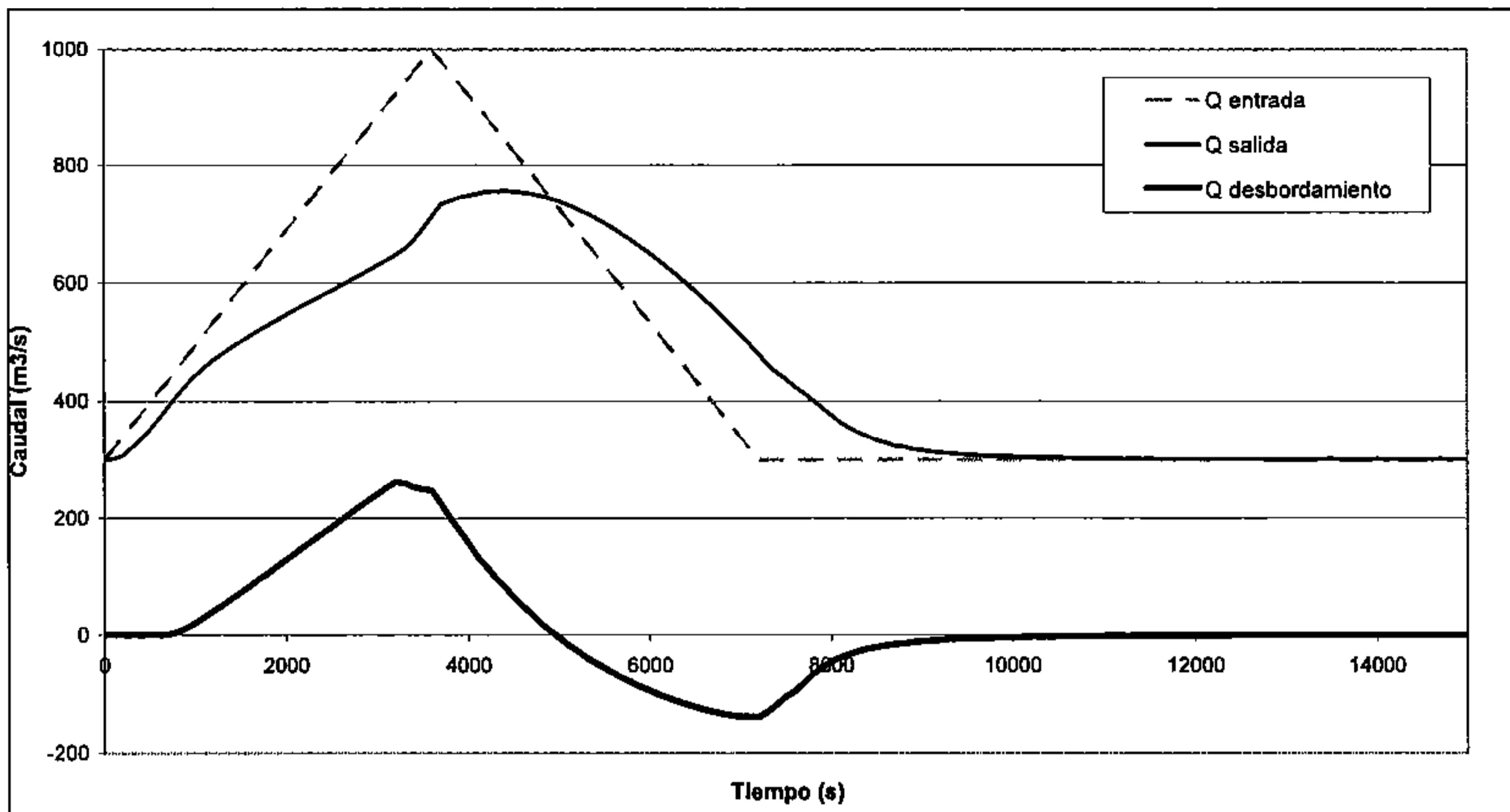


Figura 8.60. Hidrogramas en la conexión con vertedero

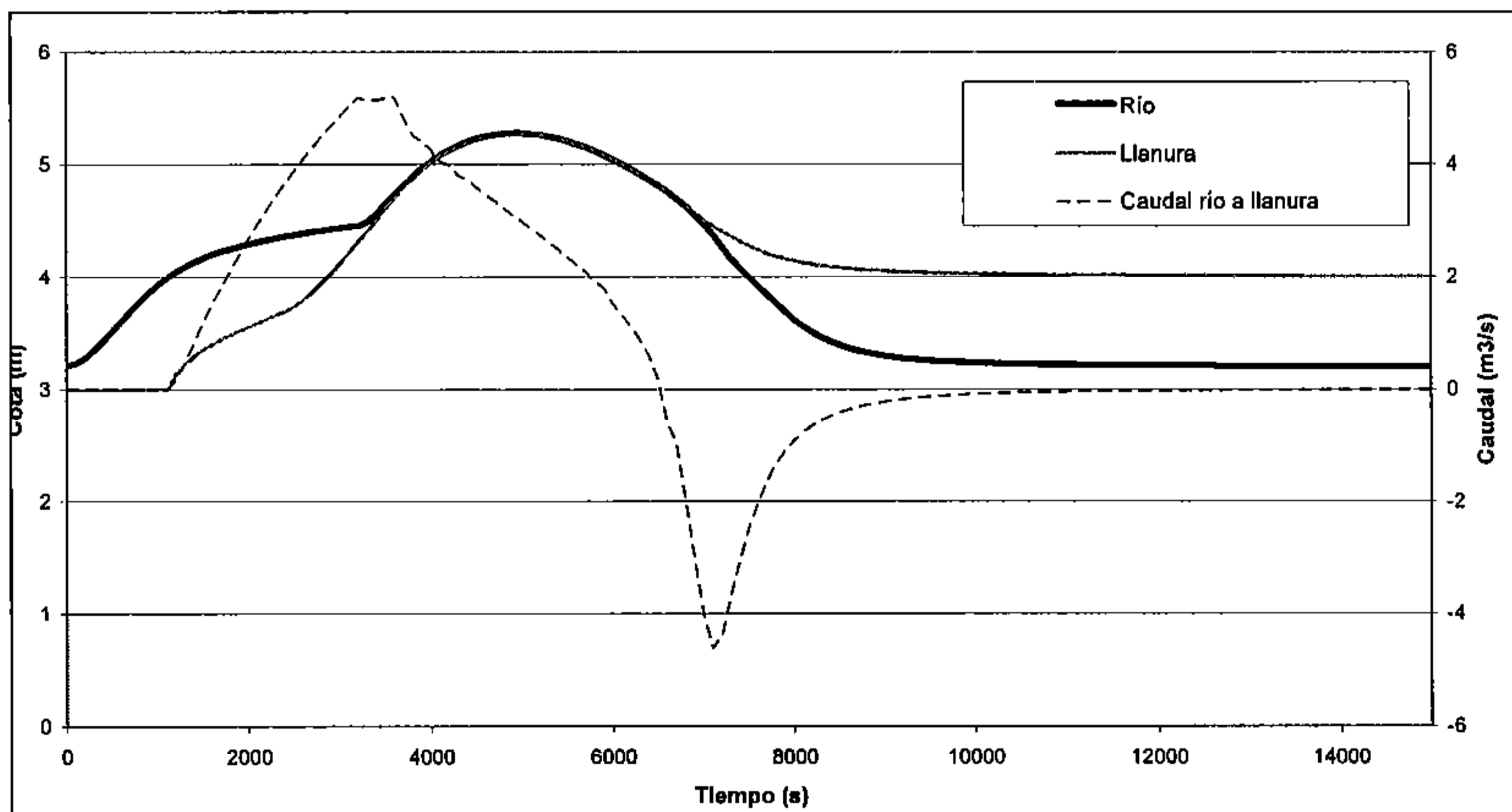


Figura 8.61. Cota de agua en el río y en la llanura de inundación para $x=505m$, con conexión con vertedero, y caudal de transferencia.

Conexión tipo río:

En este caso la conexión entre río y llanura se realiza con una conexión tipo río. En la Figura 8.62 se presenta un corte transversal del río y Llanura de inundación. Para la conexión se ha utilizado el mismo coeficiente de rugosidad de Manning de 0.030, como en el río y llanura.

Los hidrogramas de entrada y salida del río, e hidrograma de transferencia río-llanura se presentan en la Figura 8.63 mientras que en la Figura 8.64 se presentan los resultados de cota de agua para la sección del río correspondiente a $x = 505m$, así como en el elemento de volumen de la llanura contiguo a la misma. En la misma figura se puede observar el caudal de transferencia entre el río y la llanura a través de dicha sección.

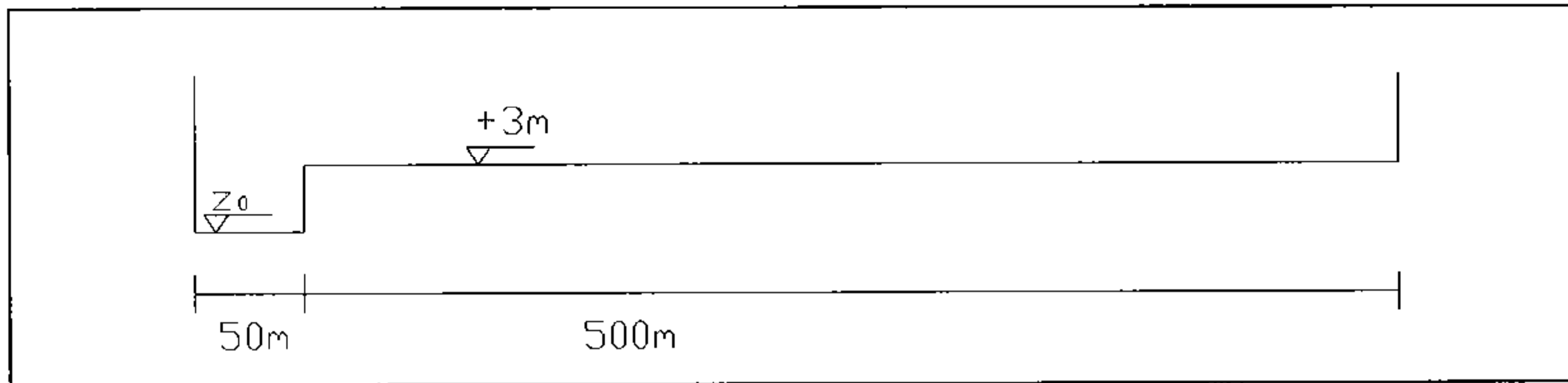


Figura 8.62. Sección transversal de la conexión tipo río

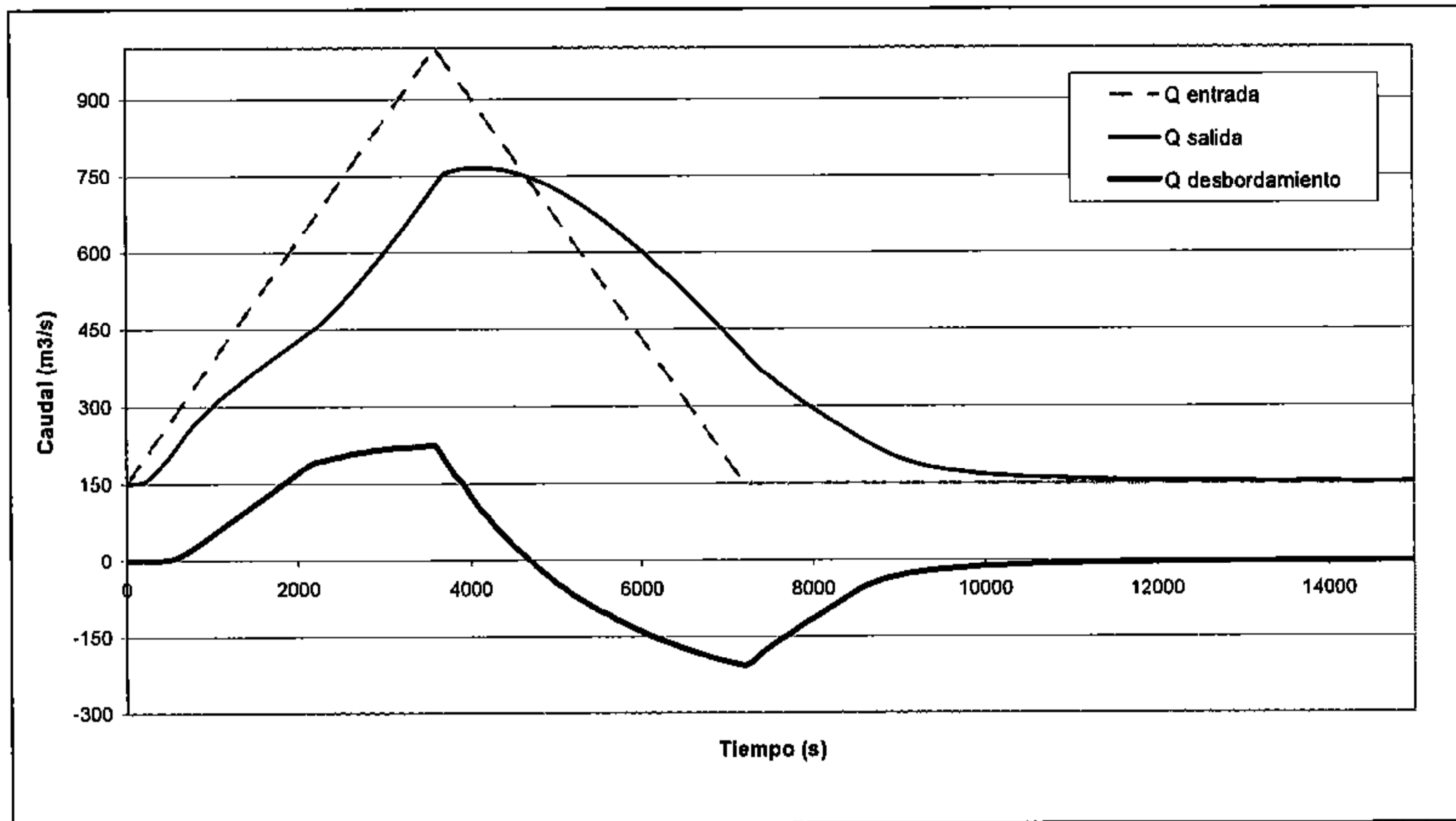


Figura 8.63. Hidrogramas en la conexión tipo río

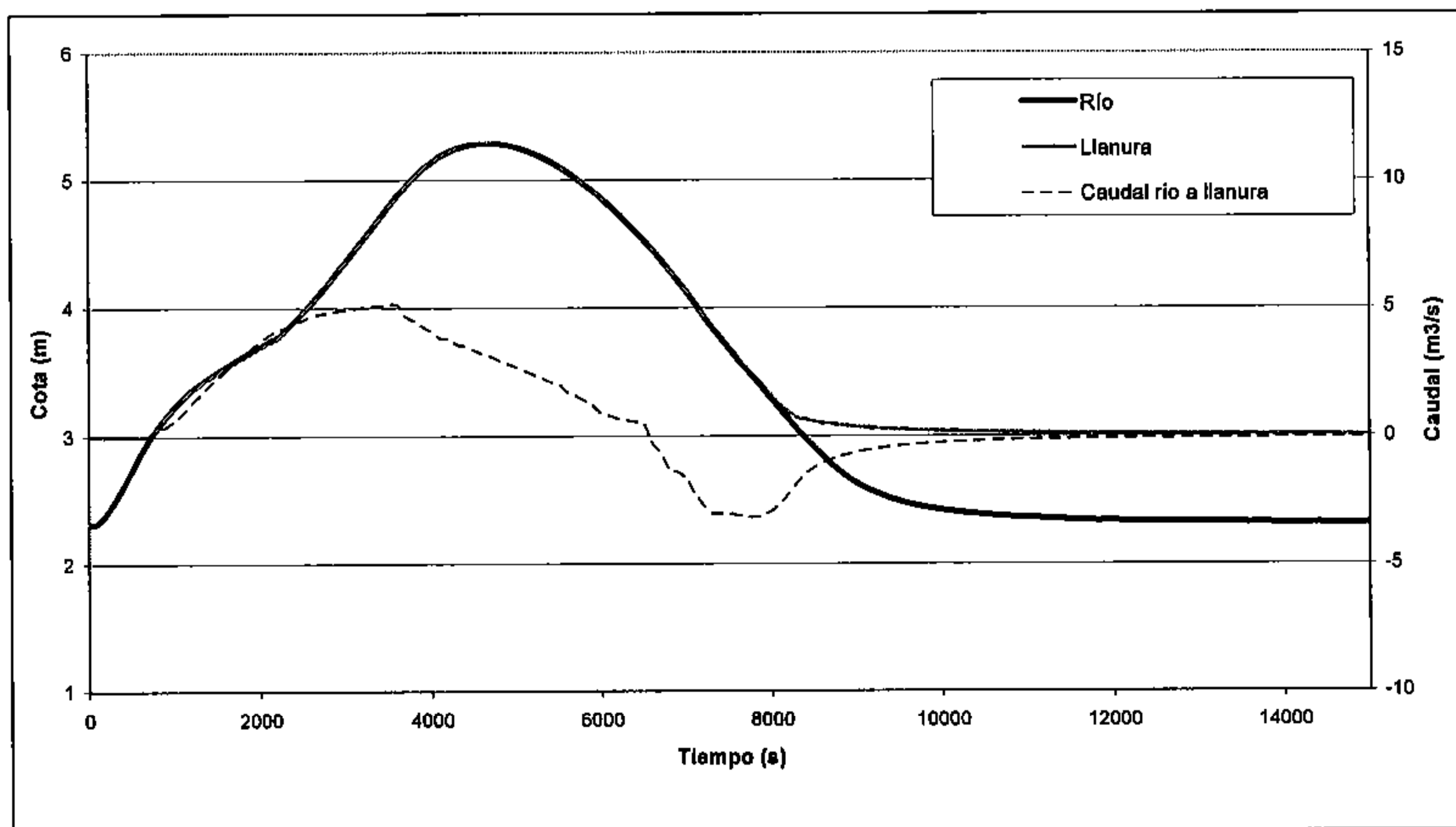


Figura 8.64. Cota de agua en el río y en la llanura de inundación para $x=500m$, con conexión tipo río, y caudal de transferencia.

8.6. Rotura de presa

El caso de una rotura ideal de presa (sin fricción) es otro ejemplo para el cual existe solución analítica, por lo que se suele utilizar para la verificación de esquemas numéricos en régimen variable.

8.6.1. Rotura de presa ideal con el esquema 1D

Se ha considerado el fenómeno de una rotura ideal de presa, partiendo de una condición inicial de agua parada pero con calados distintos a ambos lados de la supuesta presa, situada en $x = 0$. Se ha calculado una rotura de presa con 4 m de agua a un lado de la misma y 0.4 m en el otro. Ello se ha realizado con los esquemas de primer orden (método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe), esquema WAF (2° orden de precisión) y esquema WAF TVD (alta resolución), y con volúmenes finitos de 0.2 m de longitud. Los resultados en lámina de agua, para el instante $t = 2s$, se presentan en la Figura 8.65, y en velocidades en la Figura 8.66. Se aprecia claramente la formación de oscilaciones espurias que provoca el esquema de segundo orden, así como el suavizado de la solución del esquema de primer orden.

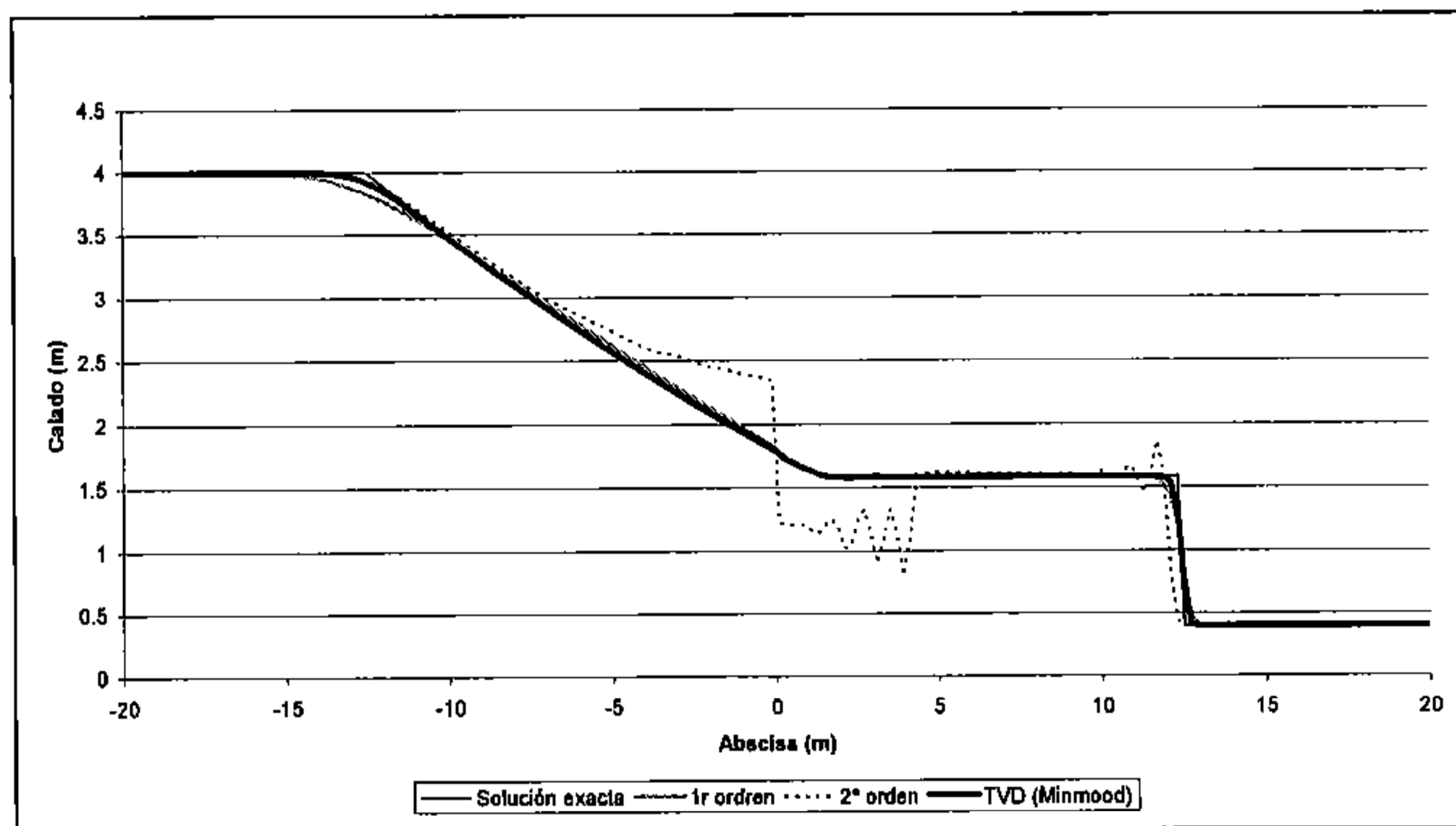


Figura 8.65. Calados en el instante $t=2s$, para una rotura de presa ideal con calados iniciales de 4m y 0.4m

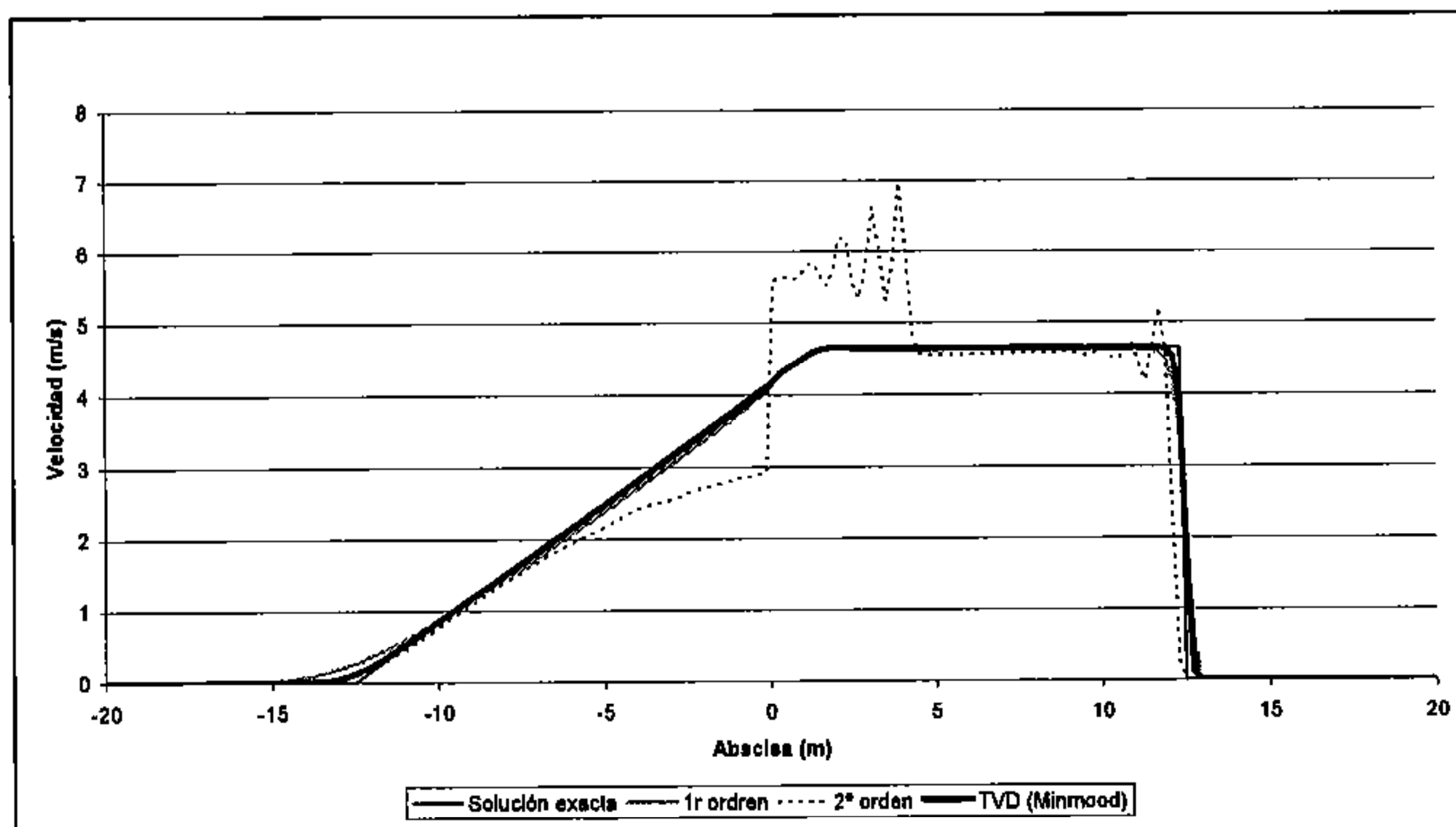


Figura 8.66. Velocidades en el instante $t=2s$, para una rotura de presa ideal con calados iniciales de 4m y 0.4m.

8.6.2. Rotura ideal con el esquema 2D

El mismo caso de rotura de presa con 4 m de calado a la izquierda y 0.4 m a la derecha se calcula en dos dimensiones. Para ello se ha considerado un canal de 40 m de largo y 5 de ancho, y una malla con 1000 elementos (200 x 5). En la Figura 8.67 se presenta una imagen en perspectiva del fenómeno, mientras que en la Figura 8.68 y la Figura 8.69 se representan los calados y velocidades en el eje del canal para el esquema WAF TVD 2D y distintas funciones de limitación.

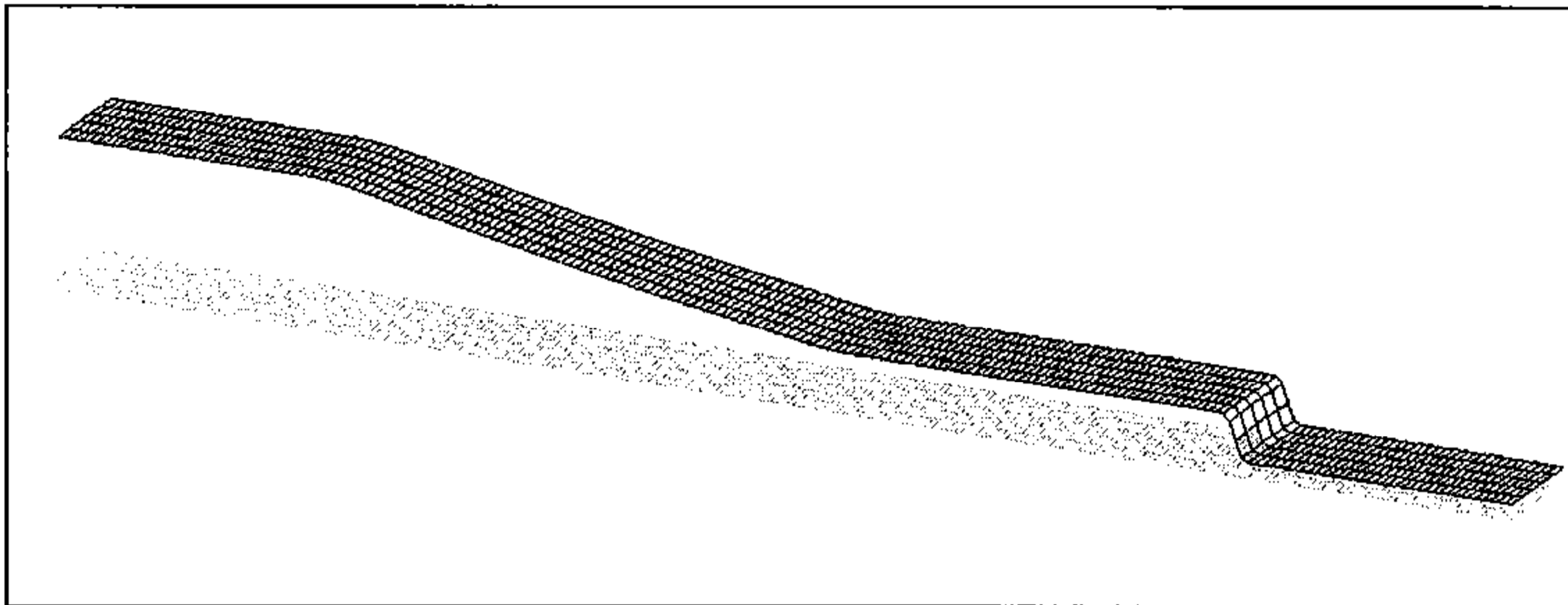


Figura 8.67. Lámina de agua en $t=2s$, para una rotura de presa ideal con calados iniciales de 4m y 0.4m.

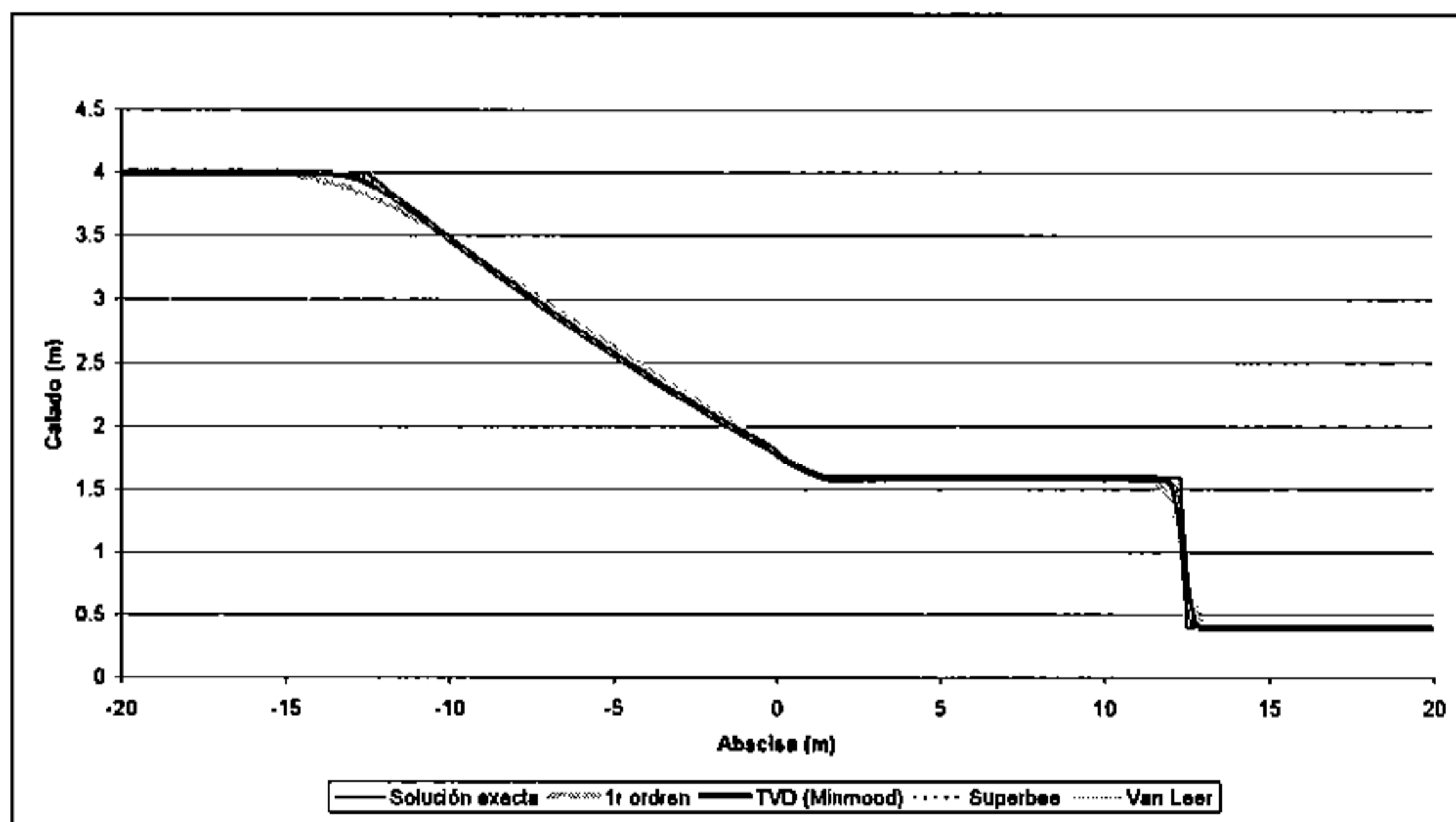


Figura 8.68. Calados en el eje en $t=2s$ para una rotura de presa ideal con calados iniciales de 4m y 0.4m.

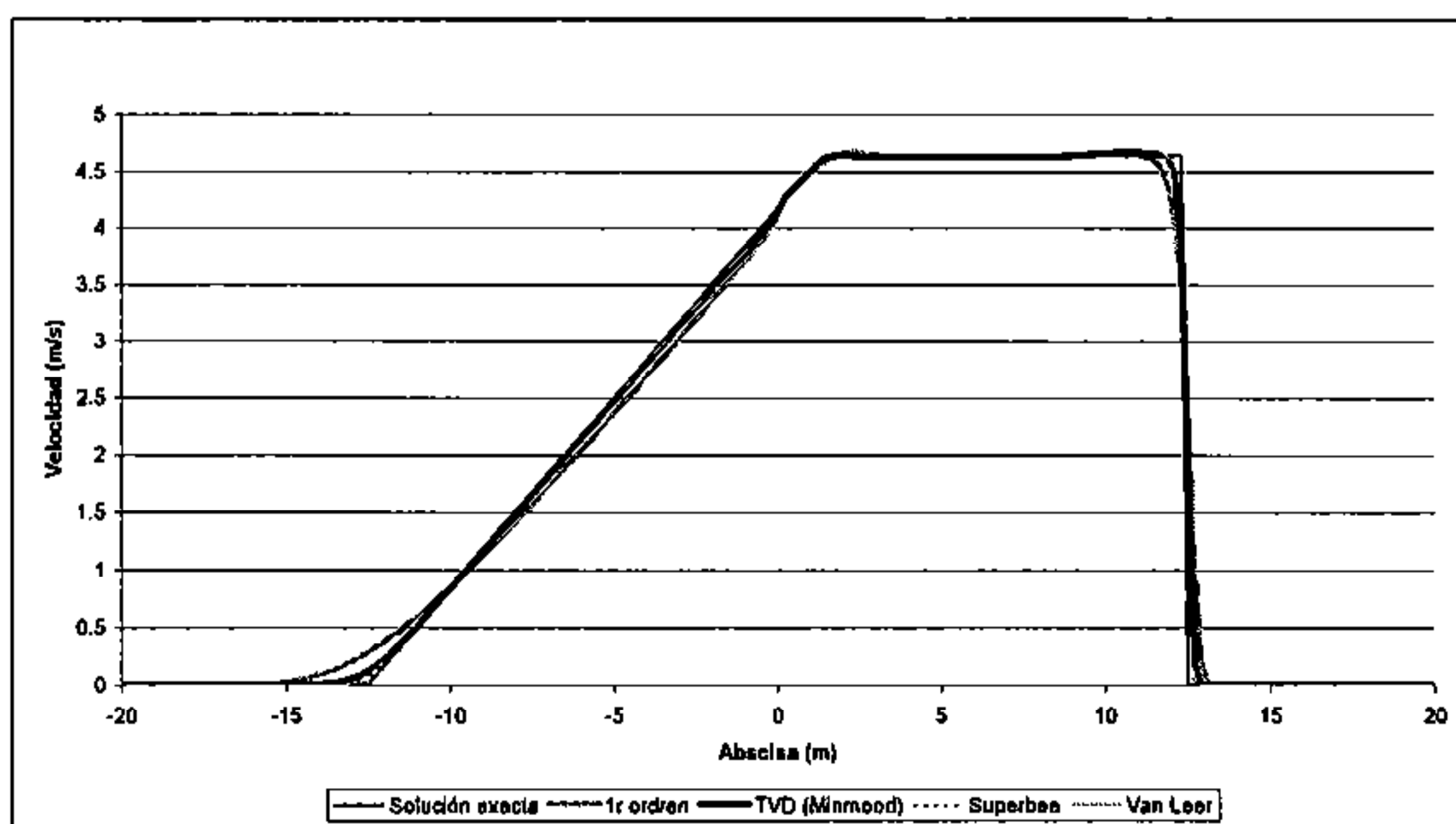


Figura 8.69. Velocidades en el eje en $t=2s$ para una rotura de presa ideal con calados iniciales de 4m y 0.4m.

8.6.3. Rotura de presa asimétrica

Un ejemplo clásico de rotura de presa en dos dimensiones es el caso de la rotura de presa asimétrica modelada por primera vez por Chaudrhy (1990), que ha sido utilizado en muchas otras ocasiones para la comprobación cualitativa de la robustez de esquemas numéricos para rotura de presa. El problema consiste en un recinto de $200\text{ m} \times 200\text{ m}$ con una compuerta de 75 m de ancho que separa dos masas de agua en reposo a distintos niveles. La compuerta es retirada repentinamente. El dominio se ha modelado con una malla de elementos cuadrados de 5 m de lado

En la Figura 8.71 se presentan los resultados para el esquema WAF (2° orden de precisión) y WAF TVD (alta resolución) a los 8 s de abrir la compuerta con 10 y 2.5 m de calado en las condiciones iniciales. Se observan las oscilaciones espurias del esquema de segundo orden que no aparecen en el esquema WAF TVD.

En la Figura 8.72 se presenta ala lámina de agua también a los 8 s pero para unas condiciones iniciales de 10 y 0.5 m con el esquema WAF TVD. Lo mismo calculado con el esquema de primer orden se puede ver en la Figura 8.73. Se aprecia la mayor disipación del esquema. Finalmente, en la Figura 8.74 se representan los niveles de agua a los 25 s de la rotura.

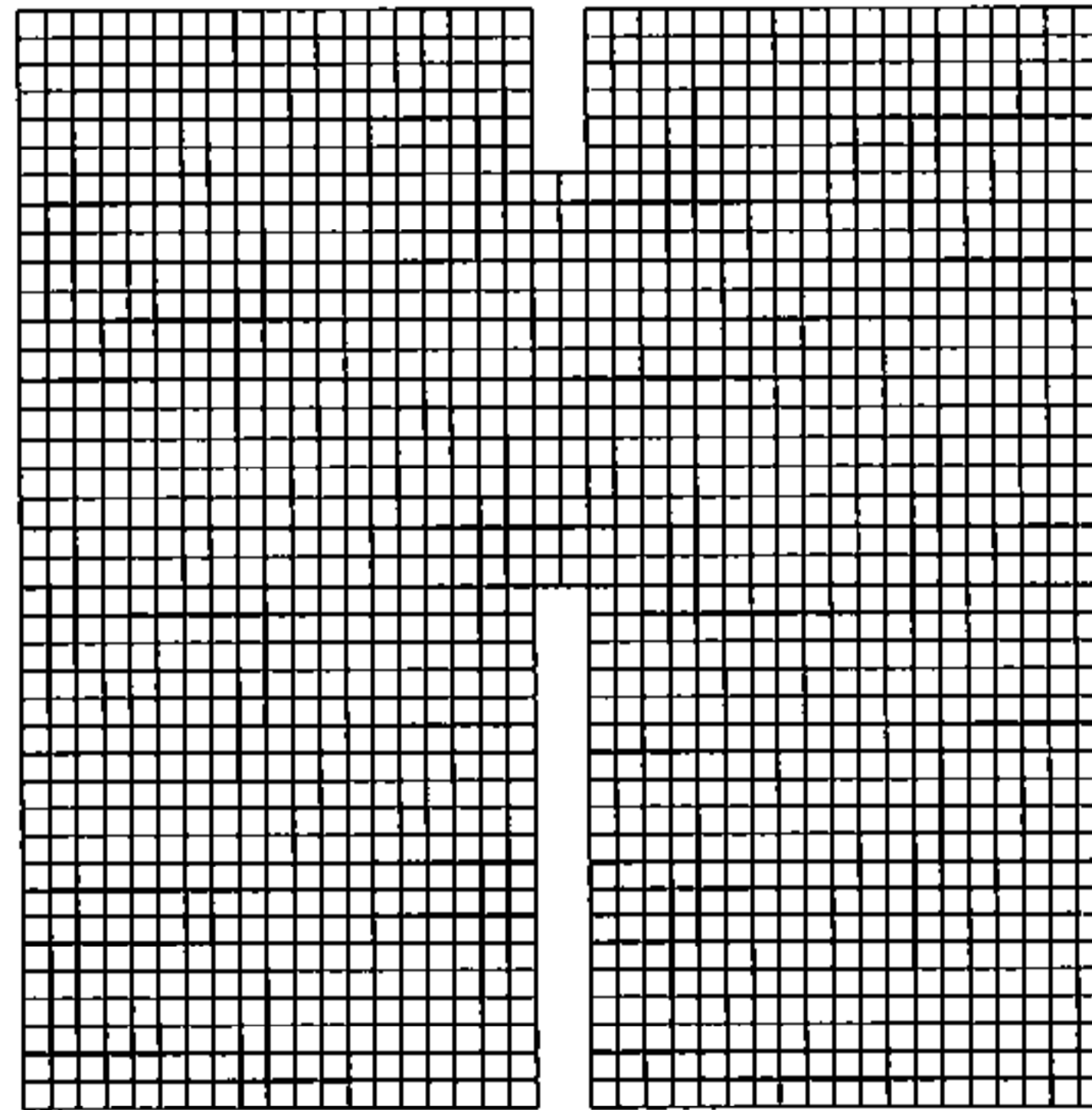


Figura 8.70. Malla de cálculo utilizada en la rotura de presa asimétrica

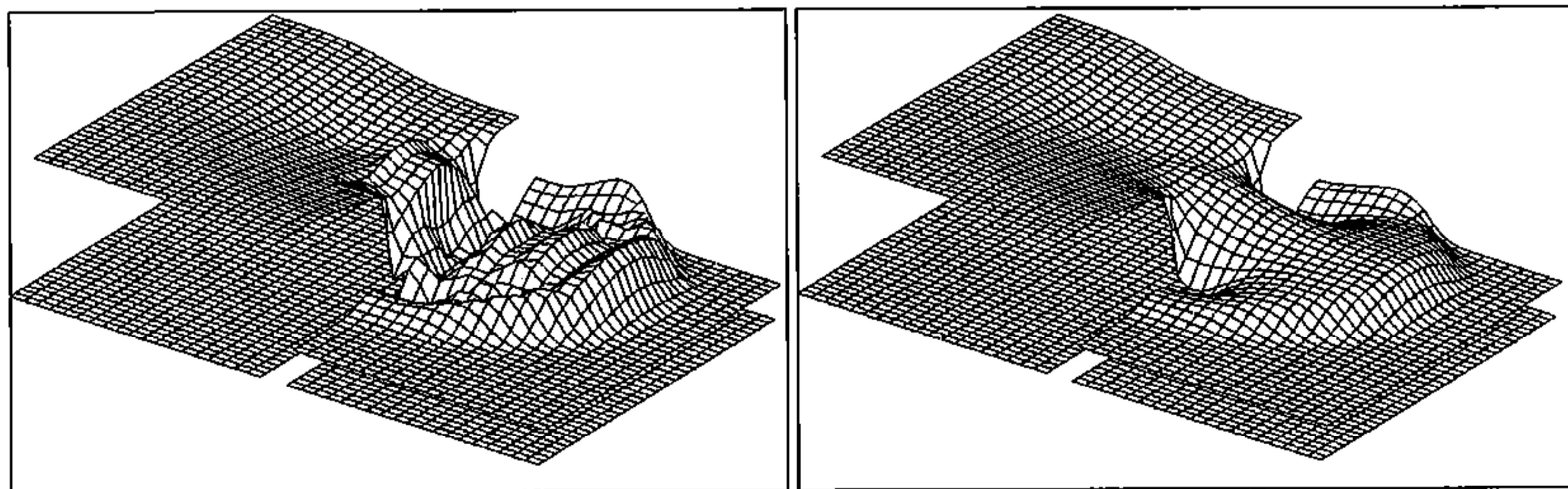


Figura 8.71. Lámina de agua a los 8 s para una situación inicial de 10 y 2.5 m de calado. Esquema WAF (izquierda) y WAF TVD (derecha).

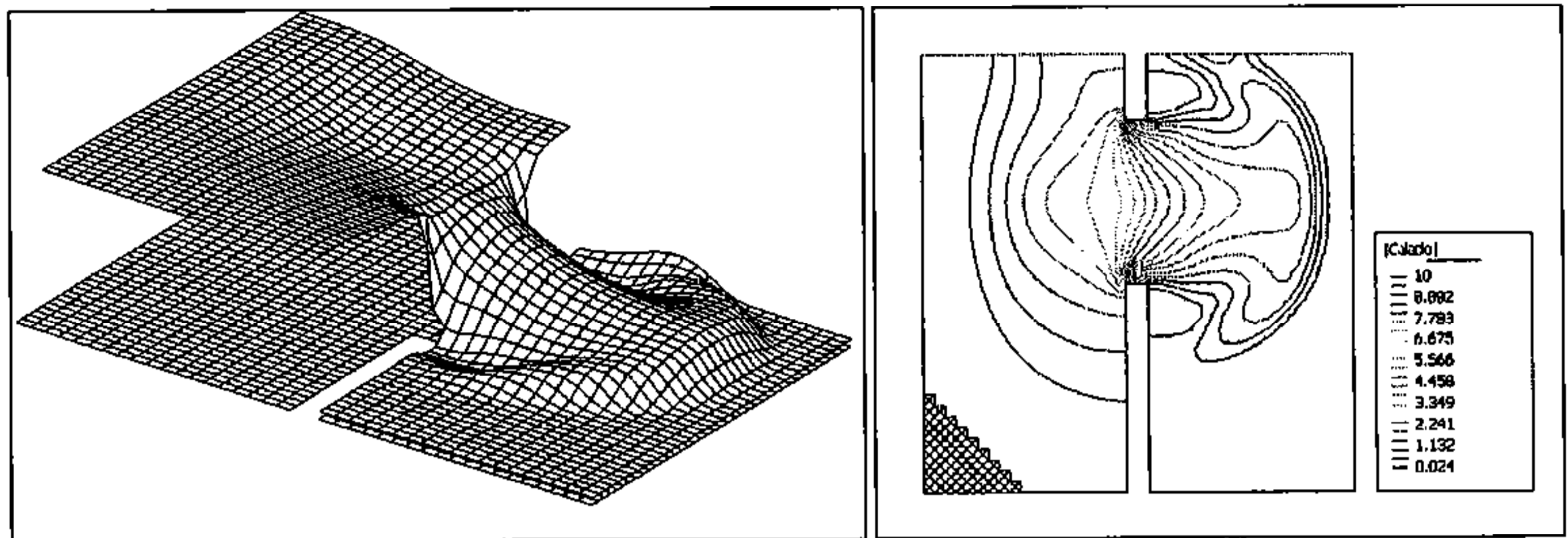


Figura 8.72. Lámina de agua a los 8s para una situación inicial de 10 y 0.5m de calado. Esquema WAF TVD.

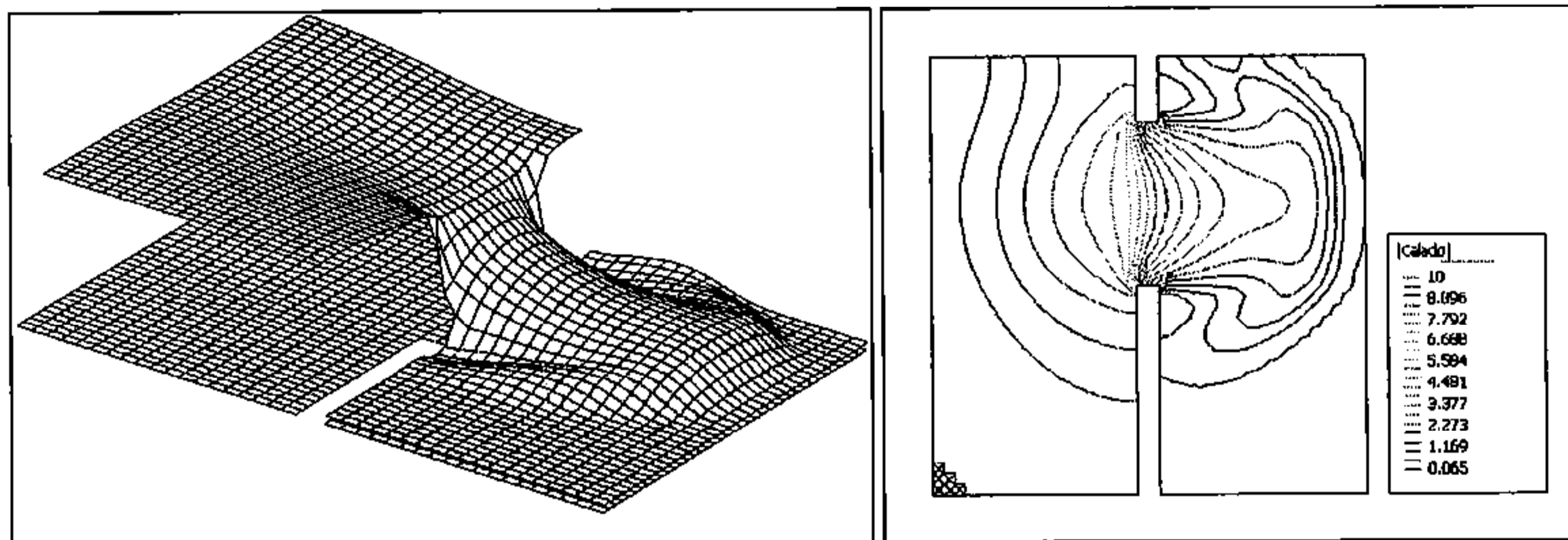


Figura 8.73. Lámina de agua a los 8s para una situación inicial de 10 y 0.5m de calado. Esquema de primer orden de precisión.

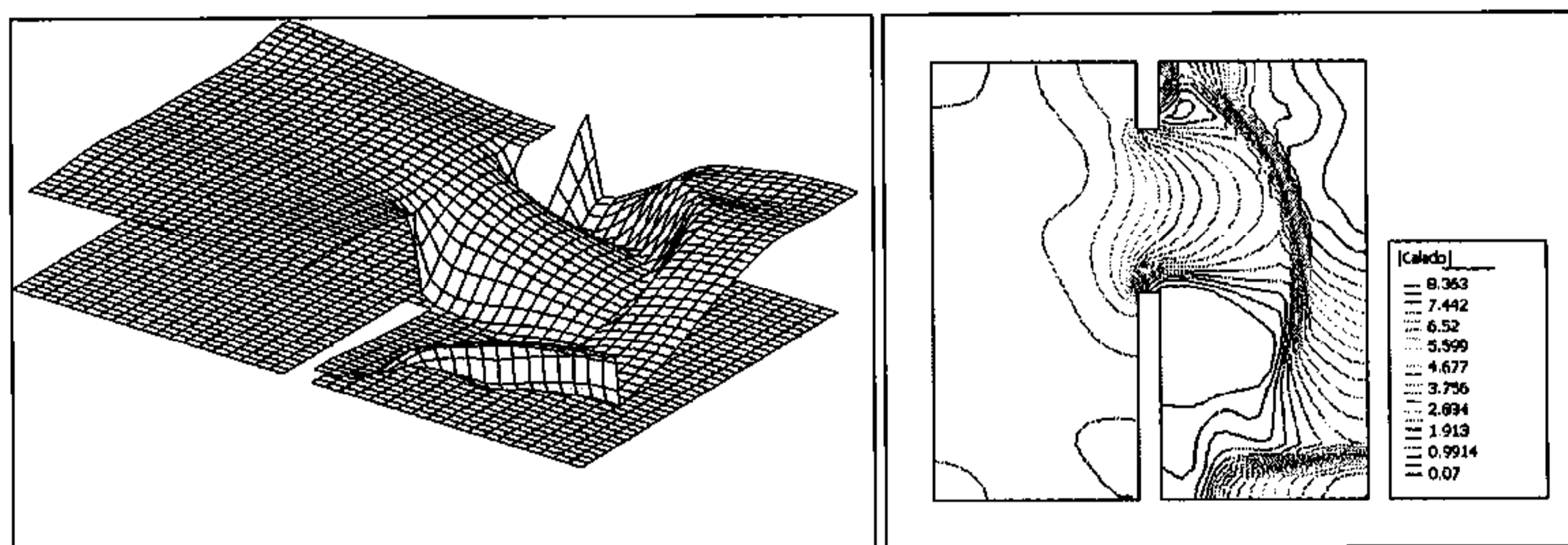


Figura 8.74. Lámina de agua a los 25s para una situación inicial de 10 y 0.5m de calado. Esquema WAF TVD.

8.7. Resalto móvil en un canal de pendiente fuerte

La tesis doctoral de Martín Vide (1989) consiste en el estudio hidráulico de la propagación del resalto móvil, y en ella se realiza un estudio experimental de la propagación de un resalto móvil en un canal de pendiente fuerte. Se creyó de interés utilizar los datos experimentales de la tesis mencionada para la verificación en régimen variable del esquema WAF TVD en dos dimensiones.

Para ello, se utilizaron los ensayos 1 y 2 de la tesis, consistentes en la propagación de un resalto móvil a partir de una situación inicial en régimen rápido. La instalación experimental estaba formada por un canal de 20 m de largo por 0.40 m de ancho, y una pendiente del 3% (para los ensayos 1 y 2). El canal desembocaba en una arqueta con la solera a una cota 0.25 m inferior al extremo aguas abajo del canal, de 0.97 m de largo por 0.80 m de ancho. La salida de la arqueta consiste en un vertedero de pared delgada, de altura variable, de 0.32 m de ancho. El caudal en el extremo aguas arriba del canal es constante e igual a 45 l/s.

Los ensayos utilizados para la verificación consisten en, a partir de una situación inicial en régimen rápido, ir aumentando la altura del vertedero de salida para forzar la formación de un resalto, el cual asciende por el canal hasta un momento en que el vertedero vuelve a descender y por tanto el resalto vuelve a desplazarse aguas abajo hacia la arqueta. El ensayo n°1 es la fase ascendente del proceso mencionado, mientras que en el ensayo n°2 la cota del vertedero disminuye. Los dos ensayos se realizan sin interrupción entre ellos.

En la tesis se menciona que se realizó una calibración obteniéndose un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.009.

Debido a la imposibilidad de modelar numéricamente el movimiento del vertedero de forma correcta (en la tesis no existen registros de movimiento del mismo, y se habla de velocidades aproximadas de descenso y ascenso) se ha utilizado como condición de contorno el registro de nivel de agua en la arqueta, del que si se dispone. De esta manera, se ha programado un algoritmo para variar la cota del vertedero de manera que el nivel de agua calculado en la arqueta corresponda en cada momento al registrado en el trabajo de Martín Vide.

Para la verificación de la modelación numérica, lo que se ha hecho es escanear las figuras de niveles de agua medidos en distintas secciones del canal, para compararlas con los resultados numéricos. Otro resultado de la tesis de Martín Vide, es la evolución temporal de la posición del resalto.

Se ha utilizado una malla de cálculo formada por 1596 cuadriláteros (200 a lo largo por 6 a lo ancho en el canal, y 22 a lo largo por 18 a lo ancho en la arqueta). En la Figura 8.75 se presenta una perspectiva de la modelación numérica de la experiencia, mientras que en la Figura 8.76 se puede observar un detalle de la malla.

En la Figura 8.77 se realiza la comparación gráfica de los resultados numéricos de la posición del resalto. Se observa la buena concordancia con los valores registrados, aunque se aprecia que el desplazamiento hacia aguas arriba es ligeramente más rápido en la modelación numérica.

En la Figura 8.78 se comparan los calados obtenidos numéricamente en el eje del canal para distintas secciones, con los niveles medidos en la tesis de Martín Vide. Es de destacar que la concordancia es mayor cuanto más aguas abajo (la abscisa $x = 20$ coincide con el extremo aguas abajo del canal) debido a la influencia de la condición de contorno, aunque incluso en las secciones más alejadas la concordancia es muy aceptable.

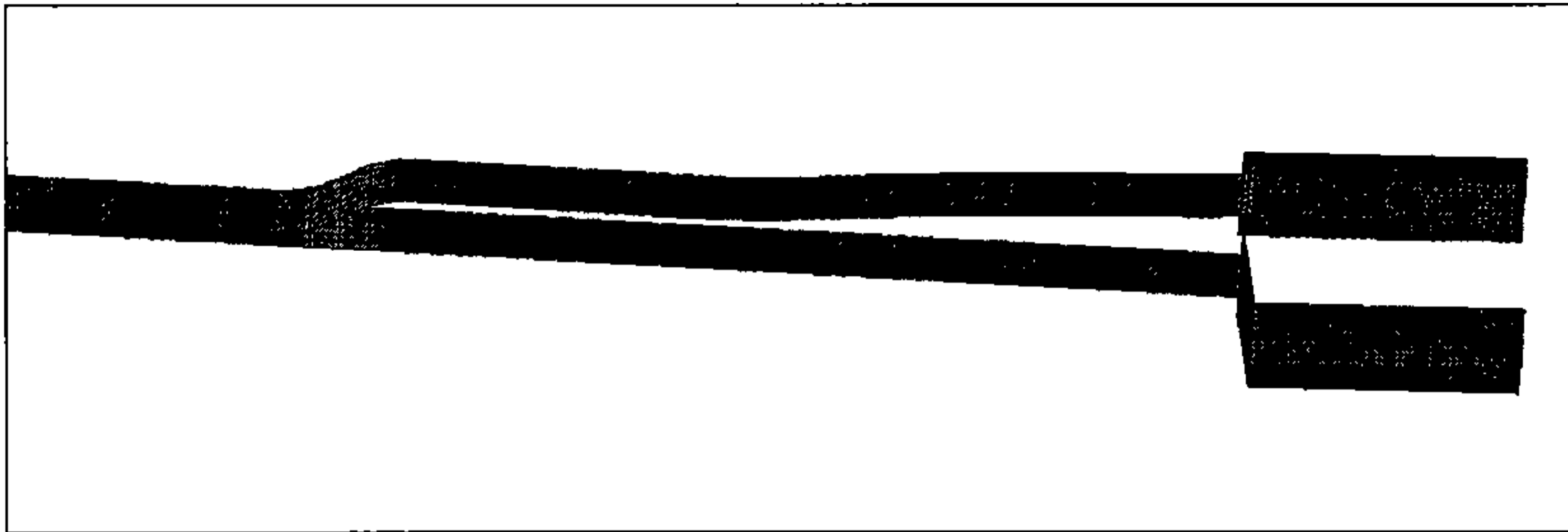


Figura 8.75. Perspectiva de la modelación numérica del tramo final del canal y la arqueta.

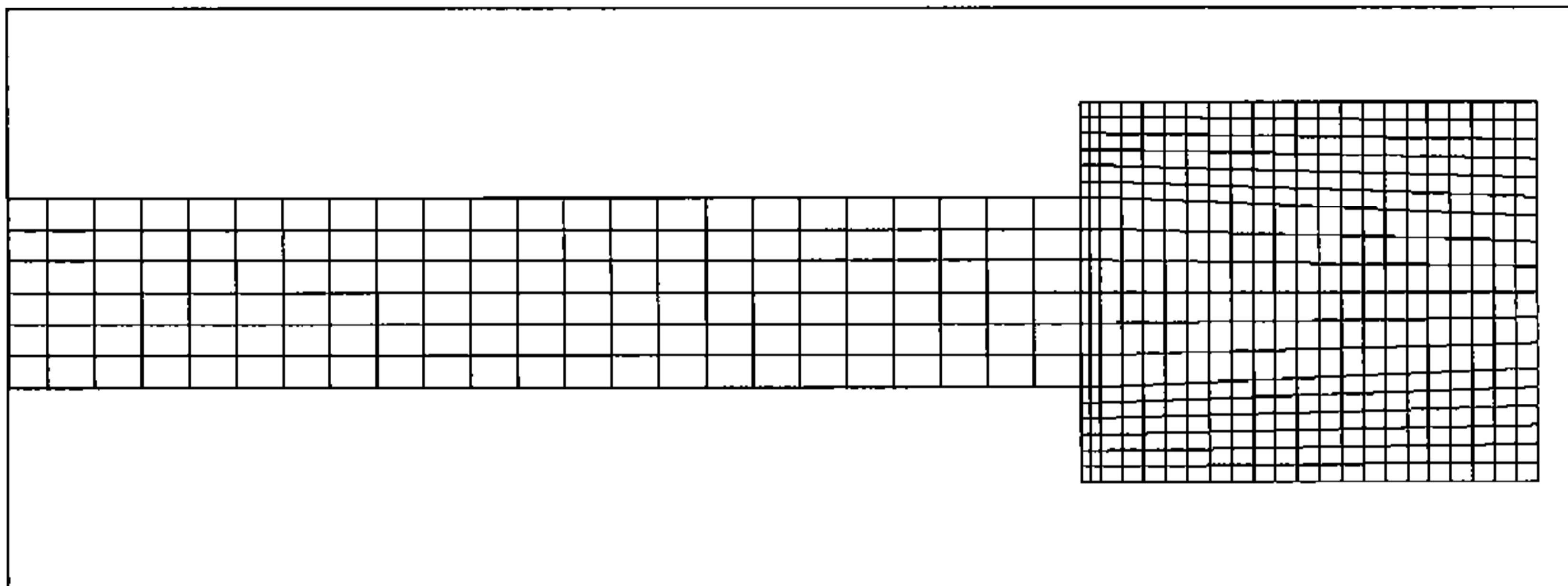


Figura 8.76. Detalle de la malla de cálculo en el extremo aguas abajo.

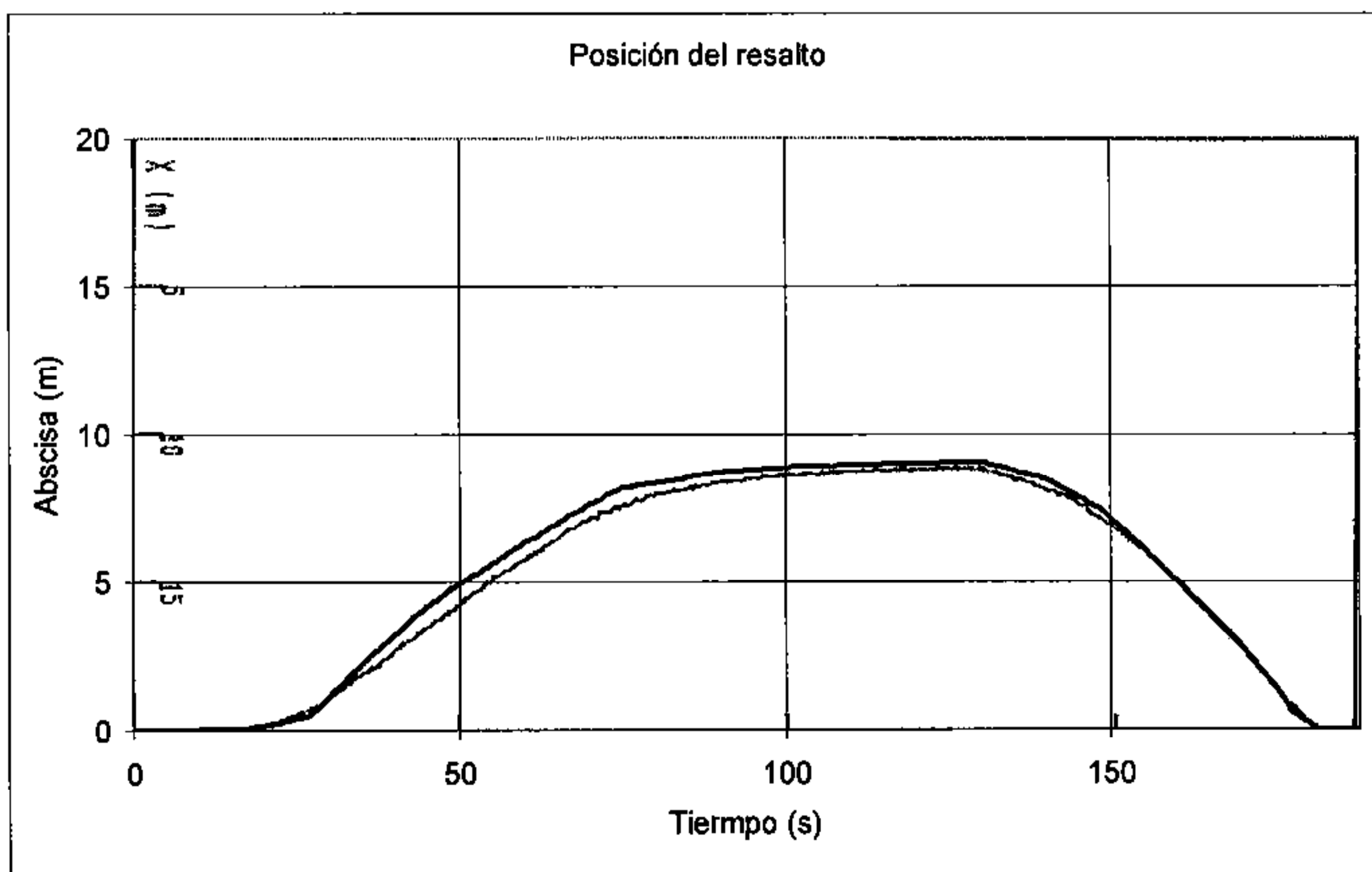


Figura 8.77. Comparación numérico-experimental de la posición del resalto.

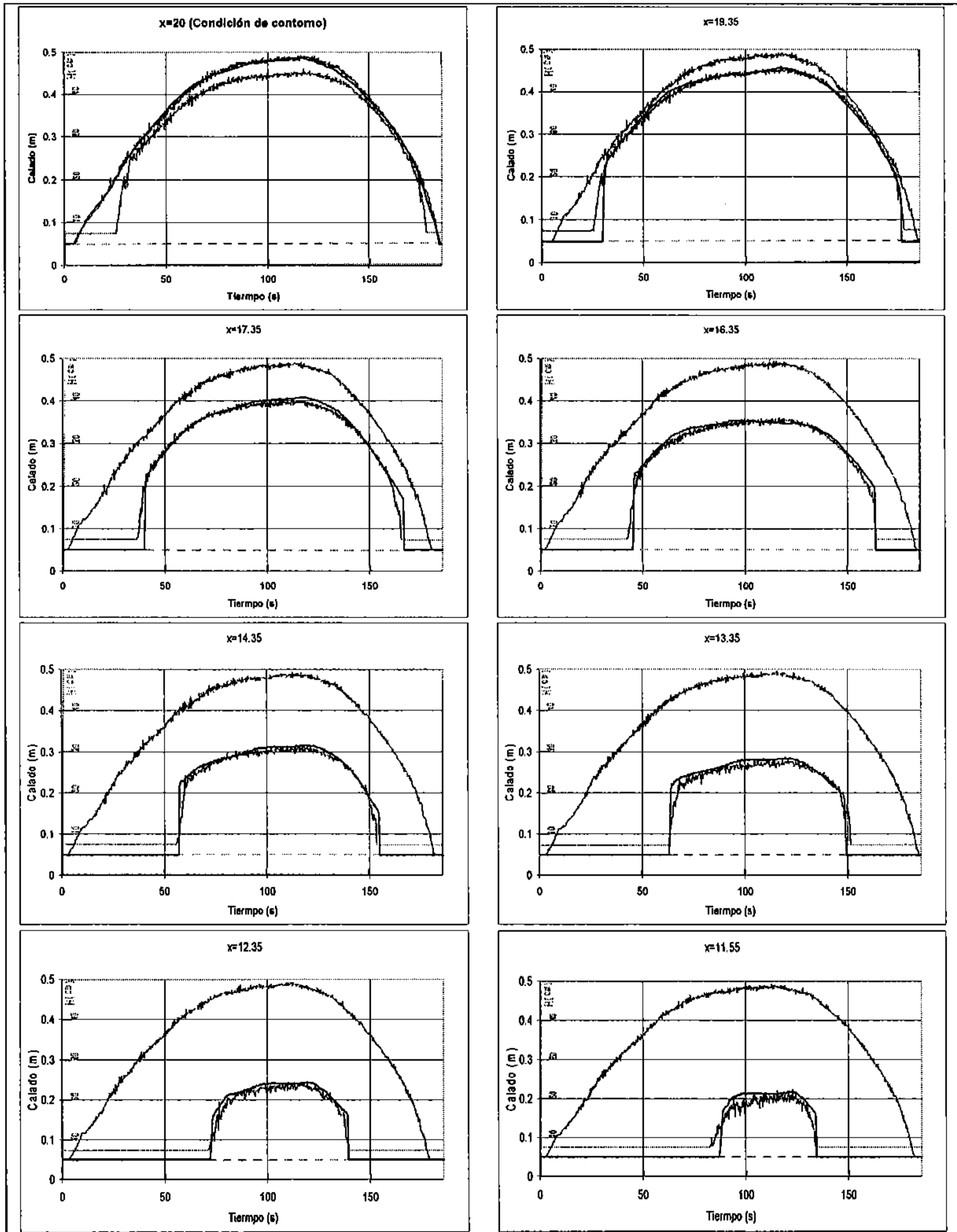


Figura 8.78. Comparación numérico-experimental de los calados en distintas secciones del canal.

8.8. Verificación experimental

8.8.1. Distribución del flujo en un cruce de calles

Para la verificación experimental se utilizó una instalación en el Laboratorio de Modelos Reducidos de la Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica del Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima i Ambiental de la U.P.C., que se construyó para el estudio de la distribución de caudales en un cruce de calles (Nania 1999).

La instalación consiste en dos canales de 1.5 m de ancho que se cruzan. La pendiente de los canales es variable excepto la zona del cruce donde la solera es horizontal. Los dos canales disponen de alimentación de agua independiente, y existen vertederos para aforo del caudal tanto en las dos entradas como en las dos salidas. La geometría en planta de la instalación se puede observar en la Figura 8.79. Una parte de la tesis de Nania (1999) consistió en una serie de ensayos para determinar la distribución de caudales con distintos caudales de entrada y distintas pendientes de los canales.

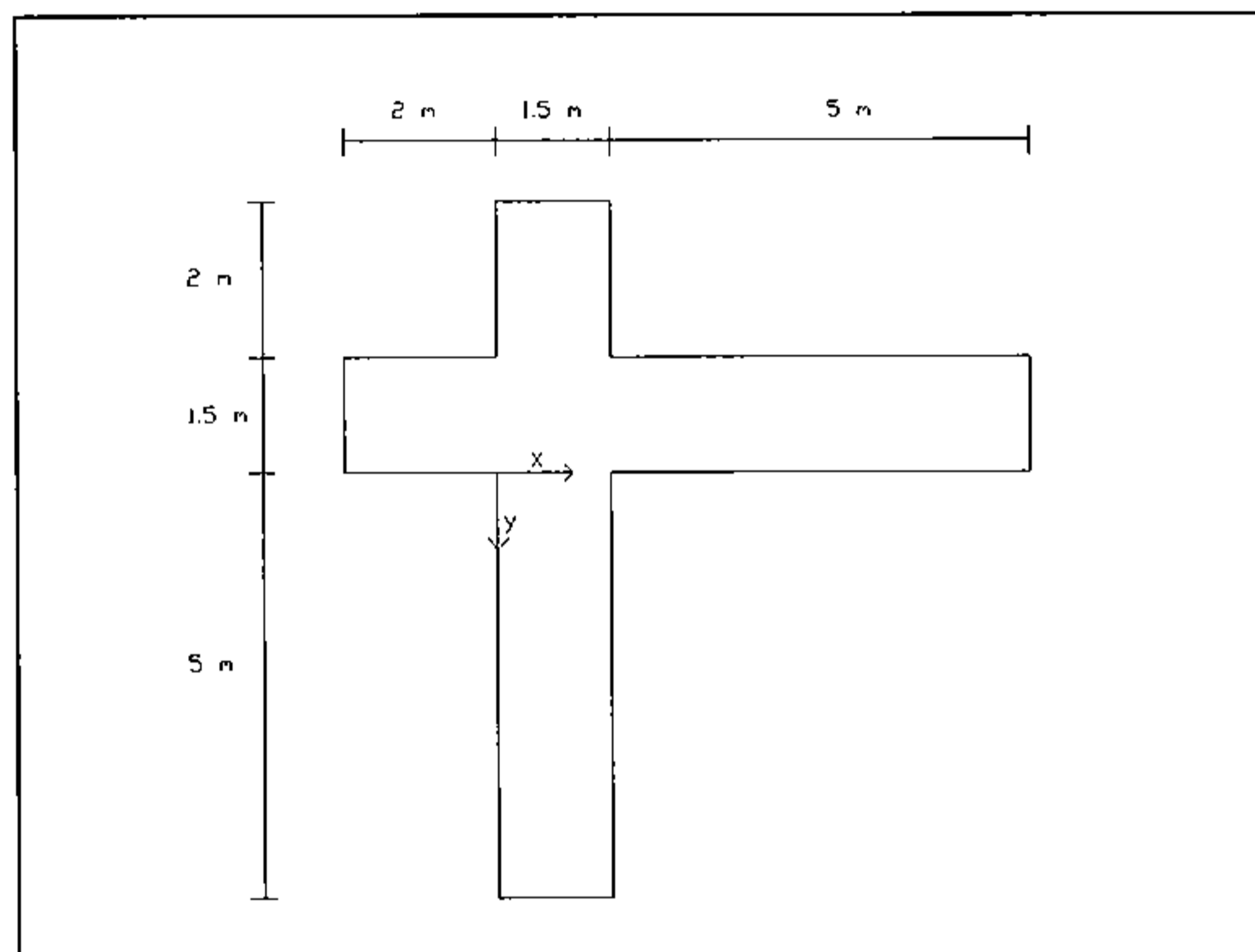


Figura 8.79. Geometría en planta de la instalación del cruce de calles

La verificación experimental para el cruce de calles se ha realizado a dos niveles:

- Modelación numérica de los ensayos realizados por Nania (1999) y comparación de la distribución de caudales medida con la calculada.
- Campaña de medida de calados y velocidades para una geometría y una combinación de calados determinados, y comparación numérico-experimental de los campos de calados y velocidades

8.8.1.1 Distribución de caudales

Para la modelación numérica de la distribución de caudales se utilizó una malla formada por 2920 elementos (Figura 8.80). El flujo es en régimen rápido. La condición de contorno aguas arriba es de caudal uniformemente repartido en todo lo ancho y como calado se utilizó el medido por Nania para su tesis. Aguas abajo no es necesaria ninguna condición de contorno.

En la Tabla 8.1 se presentan los resultados de la comparación numérico-experimental. Las dos primeras columnas son la pendiente, en tanto por ciento, de cada calle, seguido de los caudales de entrada medidos (e impuestos como condición de contorno en el cálculo), a continuación se detallan los caudales de salida medidos y finalmente los calculados. La última columna representa el porcentaje de error (porcentaje de exceso de caudal por el eje x respecto al total de caudal entrante). Se observa que los máximos errores alcanzan el 3.1%.

ix (%)	iy (%)	Qx entrada (l/s)	Qy entrada (l/s)	Qx salida exp. (l/s)	Qy salida exp. (l/s)	Qx salida calc (l/s)	Qy salida calc (l/s)	Error (l/s)	Error (%)
1	1	35.7	38.0	34.8	38.9	35.6	38.1	0.9	1.2
1	1	35.6	52.0	36.6	51.0	38.1	49.5	1.5	1.7
1	1	34.4	70.7	35.3	69.9	35.1	70.1	-0.2	-0.2
1	1	70.4	104.7	79.1	96.0	80.2	94.9	1.1	0.6
1	1	104.5	104.5	105.5	103.6	105.1	104.0	-0.4	-0.2
1	1	69.7	35.0	75.7	29.1	72.7	32.0	-3.0	-2.8
1	1	52.2	34.9	56.2	30.9	54.7	32.4	-1.5	-1.7
1	1	52.3	51.9	55.2	49.1	53.4	50.8	-1.8	-1.7
1	1	52.2	69.6	56.8	65.0	56.0	65.8	-0.9	-0.7
1	1	70.1	70.6	76.5	64.2	74.6	66.1	-1.9	-1.4
1	1	69.6	52.2	72.7	49.1	69.4	52.4	-3.3	-2.7
1	2	35.3	35.1	35.3	35.1	34.6	35.8	-0.7	-1.0
1	2	34.8	52.0	34.2	52.7	34.1	52.7	-0.1	-0.1
1	2	34.7	69.4	32.7	71.5	33.0	71.1	0.3	0.3
1	2	34.6	104.0	29.0	109.6	25.0	113.6	-4.0	-2.9
1	2	52.6	104.1	51.6	105.1	49.5	107.2	-2.1	-1.3
1	2	69.9	104.9	71.2	103.6	70.5	104.2	-0.6	-0.4
1	2	104.6	34.8	113.0	26.4	109.4	30.0	-3.6	-2.6
1	2	69.9	34.7	75.5	29.1	73.4	31.2	-2.1	-2.0
1	2	52.3	34.5	58.3	28.5	55.6	31.2	-2.7	-3.1
1	2	52.0	52.1	49.1	55.0	49.0	55.0	0.0	0.0
1	2	52.2	70.2	51.7	70.7	51.7	70.8	-0.1	-0.1
1	2	70.1	70.2	69.0	71.2	69.0	71.2	0.0	0.0
1	2	69.7	51.7	75.5	45.9	74.5	46.9	-1.0	-0.8
2	2	34.7	34.8	38.9	30.6	37.2	32.3	-1.7	-2.4
2	2	34.5	52.1	33.8	52.9	33.8	52.9	0.0	0.0
2	2	35.2	69.4	33.3	71.3	33.1	71.5	-0.2	-0.2
2	2	34.9	105.0	30.3	109.7	29.8	110.2	-0.5	-0.4
2	2	52.7	104.9	52.4	105.2	52.0	105.6	-0.4	-0.2
2	2	69.3	104.3	71.5	102.1	71.6	102.0	0.1	0.1
2	2	86.4	103.6	90.1	99.9	90.2	99.7	0.2	0.1
2	2	69.1	35.9	78.5	26.5	76.3	28.8	-2.3	-2.2
2	2	52.6	34.7	60.6	26.7	58.5	28.8	-2.1	-2.4
2	2	52.3	52.1	56.3	48.0	55.4	49.0	-0.9	-0.9
2	2	52.1	69.9	50.6	71.4	50.8	71.2	0.2	0.2
2	2	69.7	70.5	73.7	66.6	71.9	68.4	-1.8	-1.3
2	2	69.9	51.6	79.6	41.9	76.6	44.9	-2.9	-2.4
2	2	18.4	17.7	20.9	15.2	21.0	15.2	0.1	0.2

Tabla 8.1 Comparación numérico-experimental de la distribución de caudales

8.8.1.2 Campos de calados y velocidades

Para el estudio de los campos de calados y velocidades, se realizó una campaña de medidas. El campo de velocidades se midió con la ayuda de un correntímetro electromagnético bidimensional (E-800 de Valeport). El mismo aparato sirvió para la determinación de niveles de agua utilizándolo a modo de limnómetro. Se tomaron medidas en un total de 720 puntos, con un espaciado de 0.15 m a lo ancho de las calles, también 0.15 m de espaciado longitudinal en la zona del cruce y 1.5 m aguas arriba ya aguas abajo del mismo, y 0.30 m de espaciado longitudinal en el resto. Para la simulación numérica se utilizó un malla 3 veces más densa, pero de manera que cada punto de medida coincidiera con un volumen finito para facilitar la comparación, obteniéndose un total de 6480 elementos (Figura 8.81).

La toma de medidas se realizó para una pendiente del eje x del 1% y un 2% para el eje y . Los caudales de entrada eran de 42.86 l/s por la calle x y 100 l/s por la calle y . Esto provoca que la aproximación al cruce por el eje y sea en régimen rápido, mientras que por el eje x es en régimen lento. En el cruce aparece un resalto hidráulico oblicuo que se inicia en una esquina, de manera que el flujo por el eje y pasa a régimen lento. A la salida del cruce las dos calles vuelven a funcionar en régimen rápido.

En la *Fotografía 8.2*, *Fotografía 8.3*, *Fotografía 8.4* y *Fotografía 8.5* se puede observar la instalación en funcionamiento durante la campaña de medidas

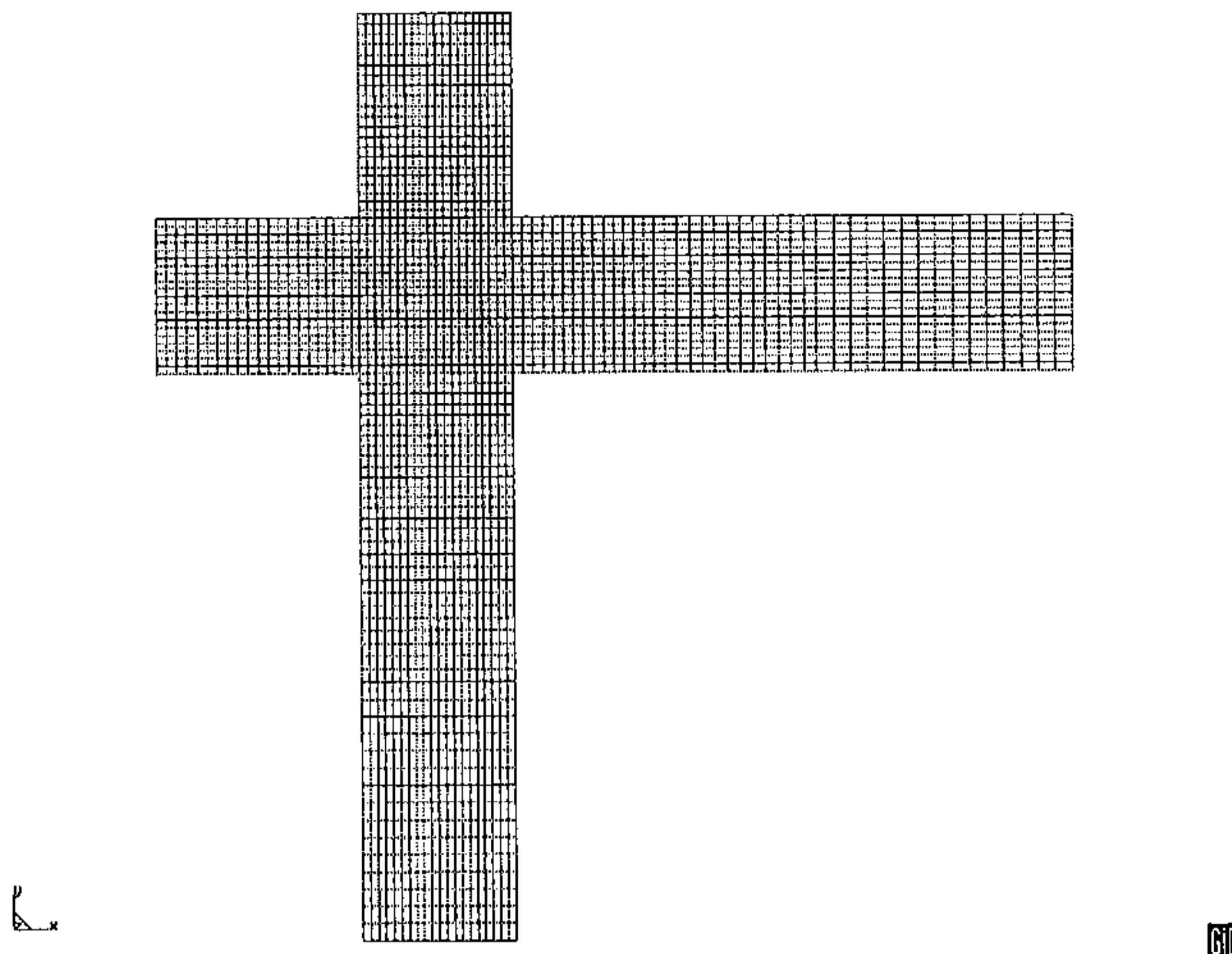


Figura 8.80. Malla utilizada en la simulación numérica de la distribución de caudales

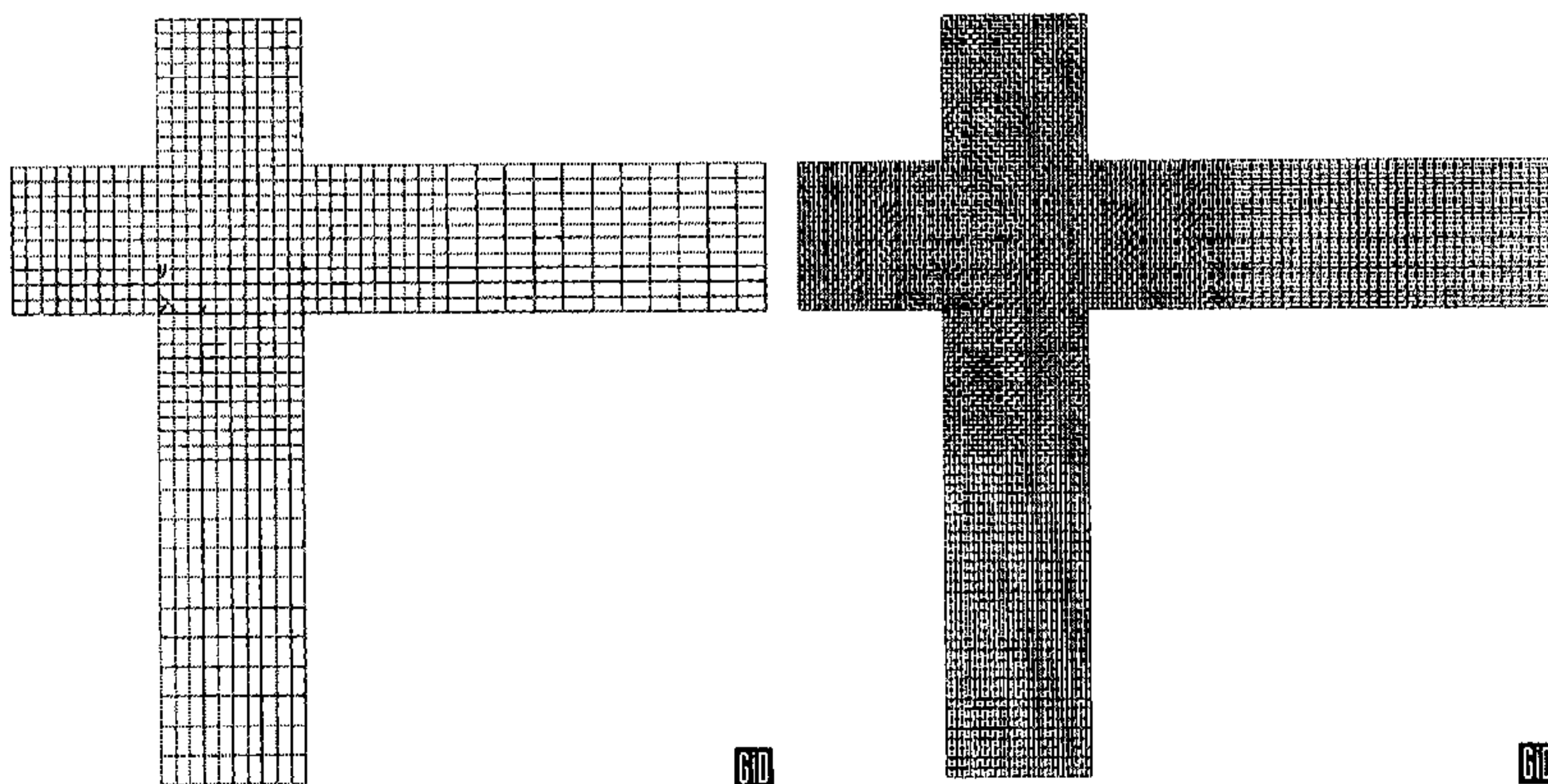
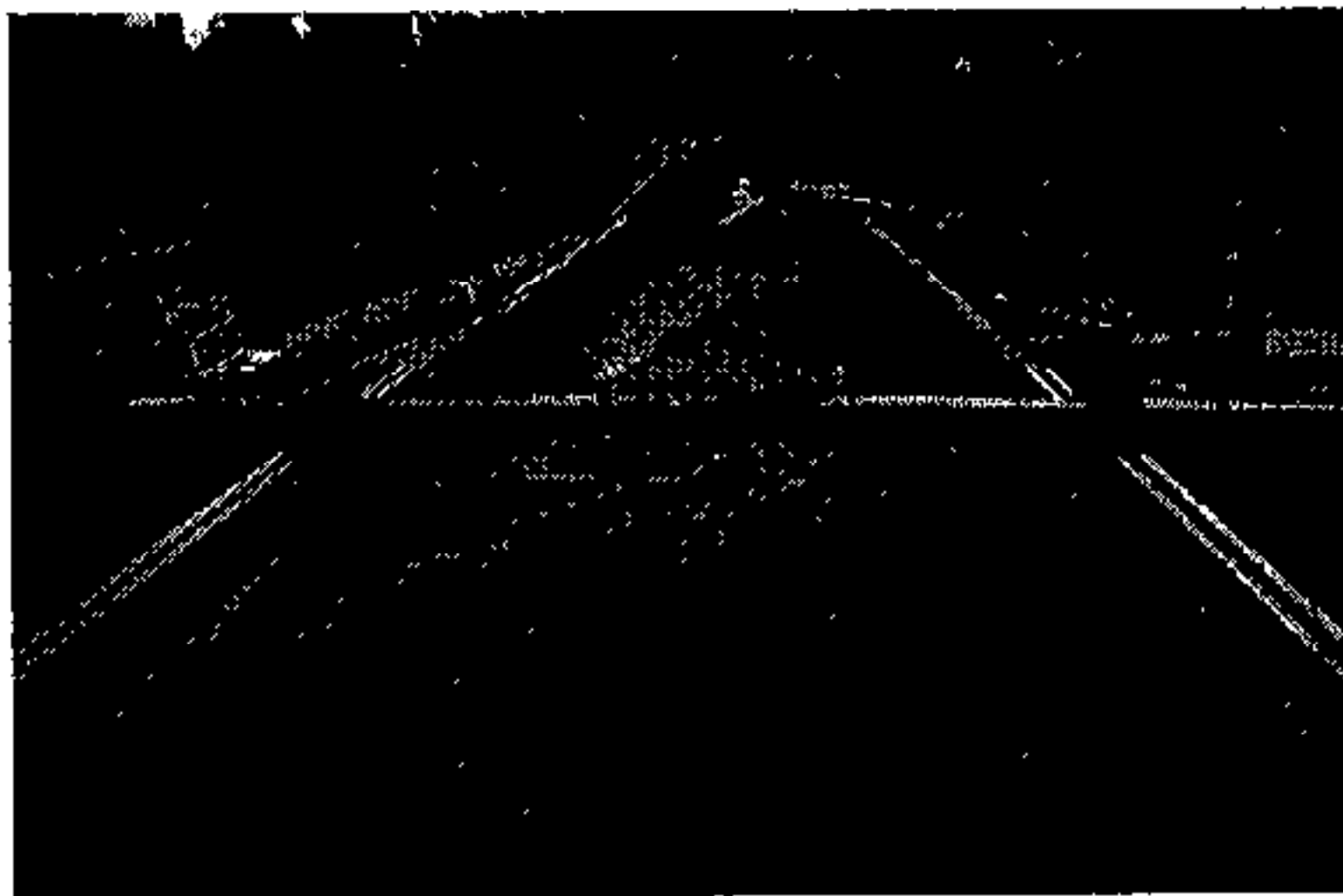
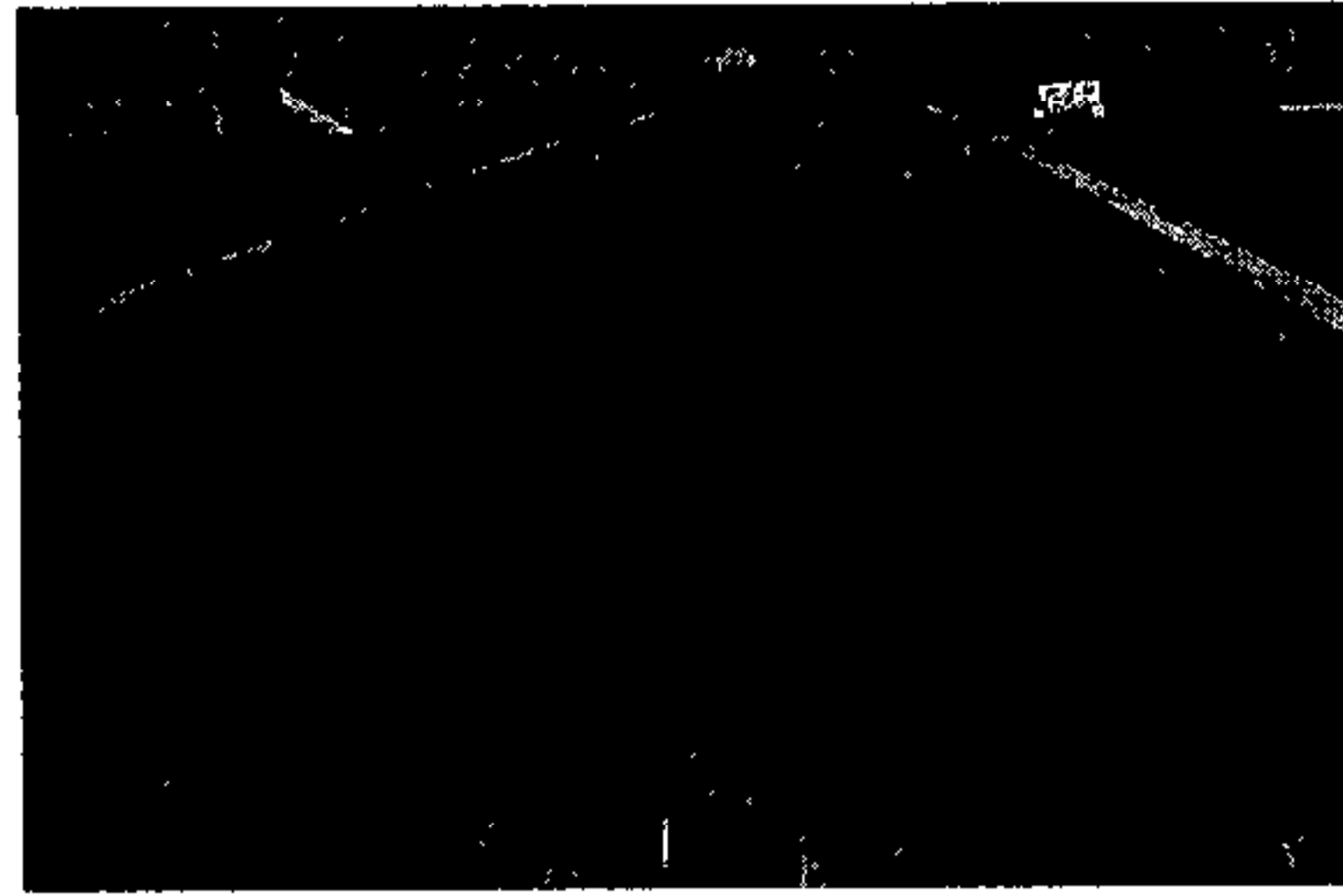


Figura 8.81. Malla utilizada para la campaña de medidas (izquierda, una medida en el centro de cada elemento), y malla utilizada en la simulación numérica (derecha).



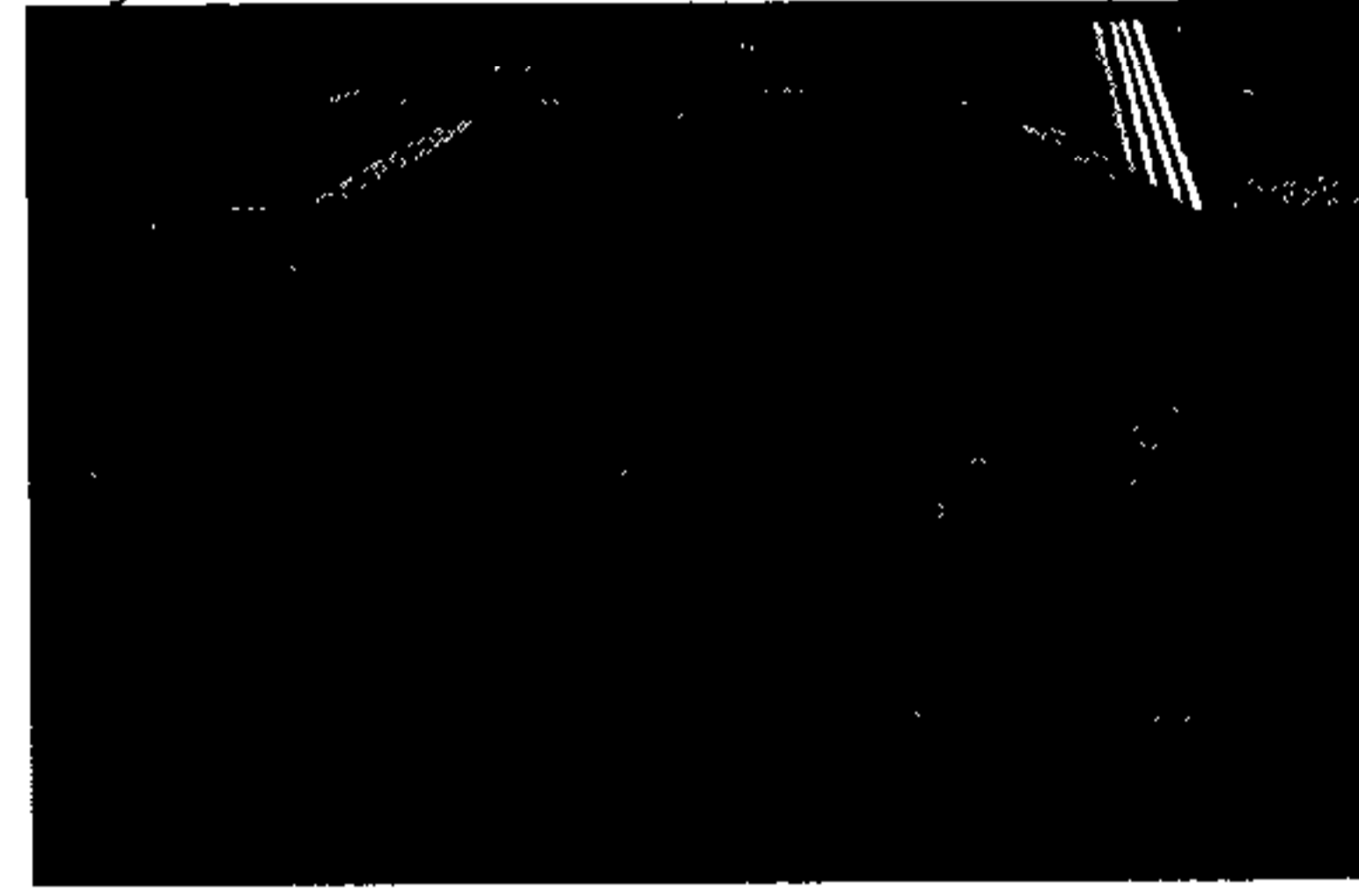
Fotografía 8.2 Canal según el eje x desde aguas arriba



Fotografía 8.3 Canal según el eje y desde aguas abajo



Fotografía 8.4 Detalle del cruce (entrada de la calle según el eje x a la izquierda).



Fotografía 8.5 Detalle del cruce

En la Figura 8.82, Figura 8.83, Figura 8.84 y Figura 8.85 se realiza, en escala de colores, la comparación numérico-experimental de calado, módulo de velocidad, componente x de la velocidad y componente y de la velocidad. Se aprecia gran concordancia entre las medidas y los resultados numéricos. Es de destacar, que justo aguas abajo del cruce, en la margen izquierda del canal según el eje x, existe una zona con calados inferiores a 5 mm, fuera del rango de medida del sensor, por lo que la diferencia en el campo de velocidades es más debido a la falta de medidas (donde no existe medida se ha representado con valor cero) que a una discrepancia.

En la Figura 8.86 y la Figura 8.87 se presenta la comparación numérico-experimental de calados y velocidades en forma de perfiles longitudinales por todas las líneas paralelas a los ejes de la instalación..

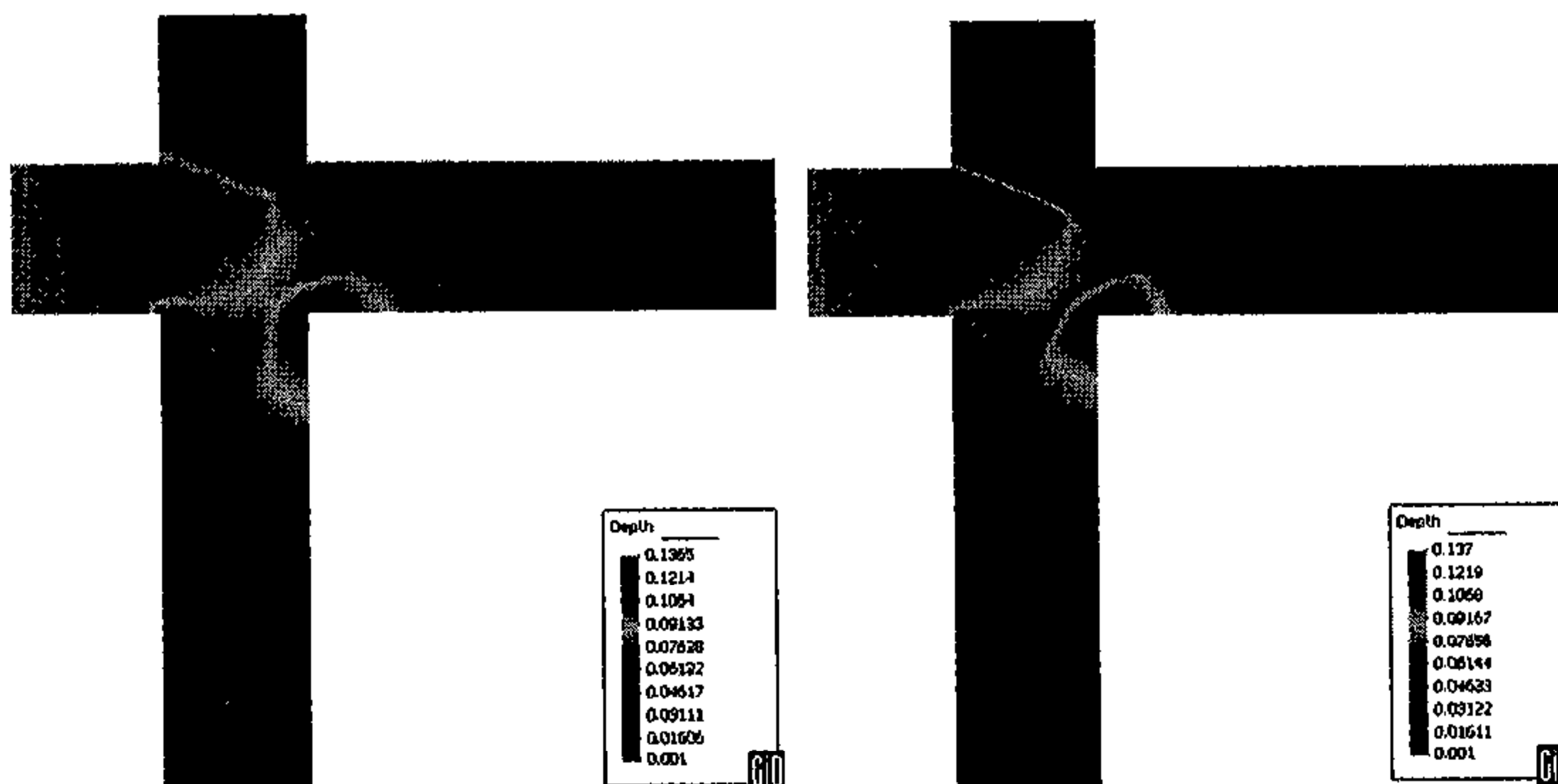


Figura 8.82. Calados medidos (izquierda) y calculados (derecha)

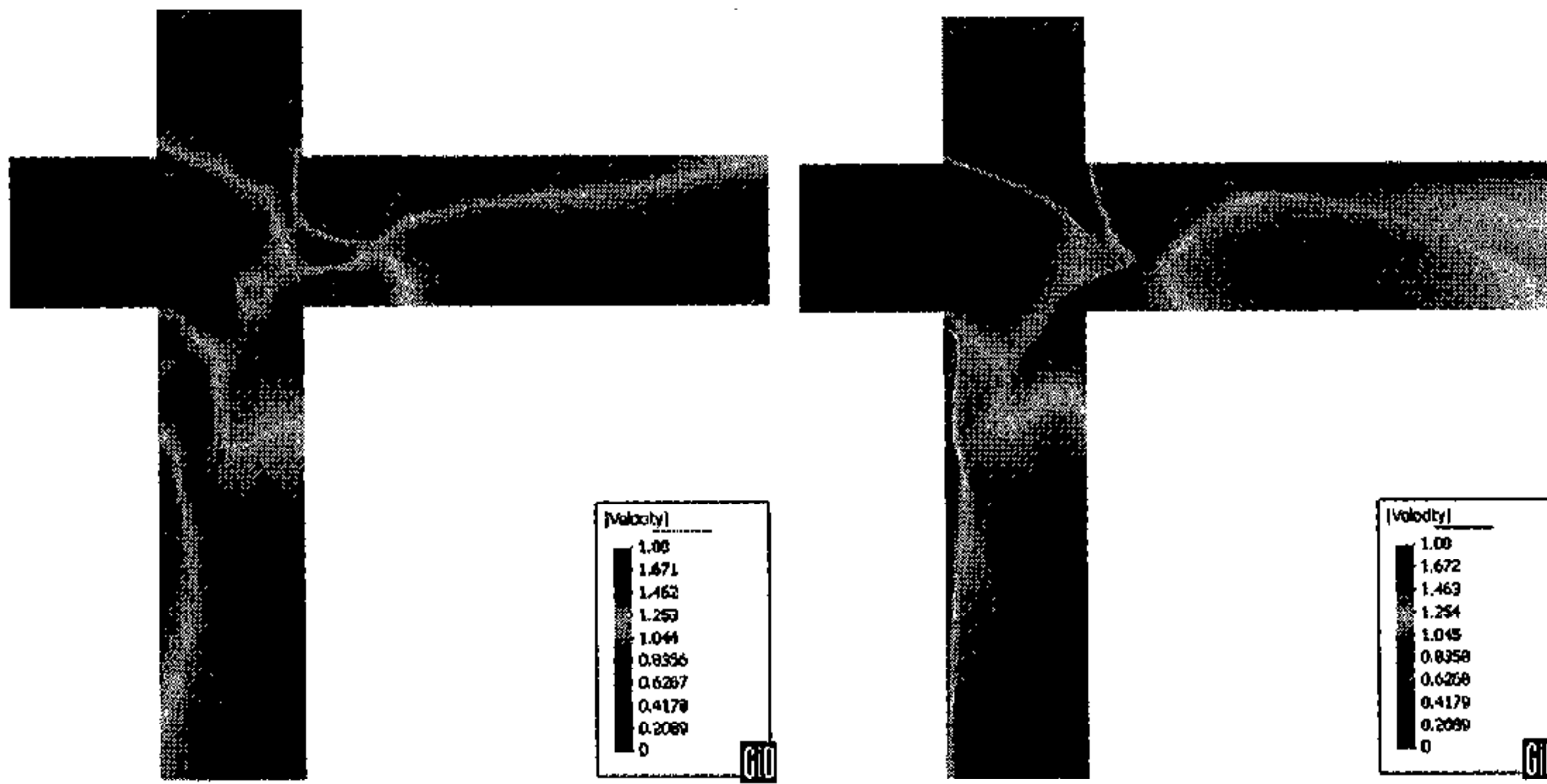


Figura 8.83. Módulo de velocidades. Experimental (izquierda) y numérico (derecha)

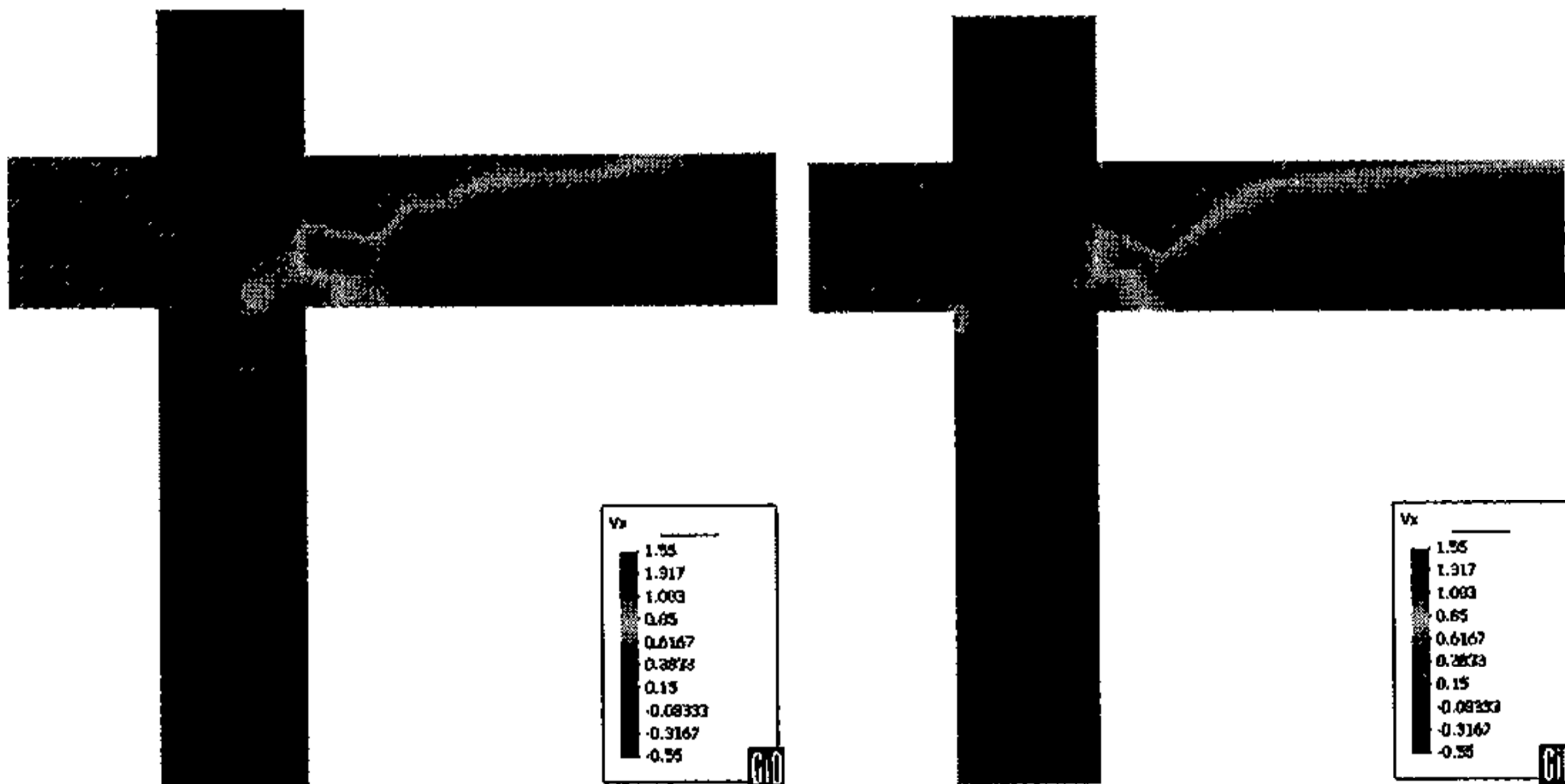


Figura 8.84. Componente de la velocidad según el eje x. Experimental (izquierda) y numérica (derecha)

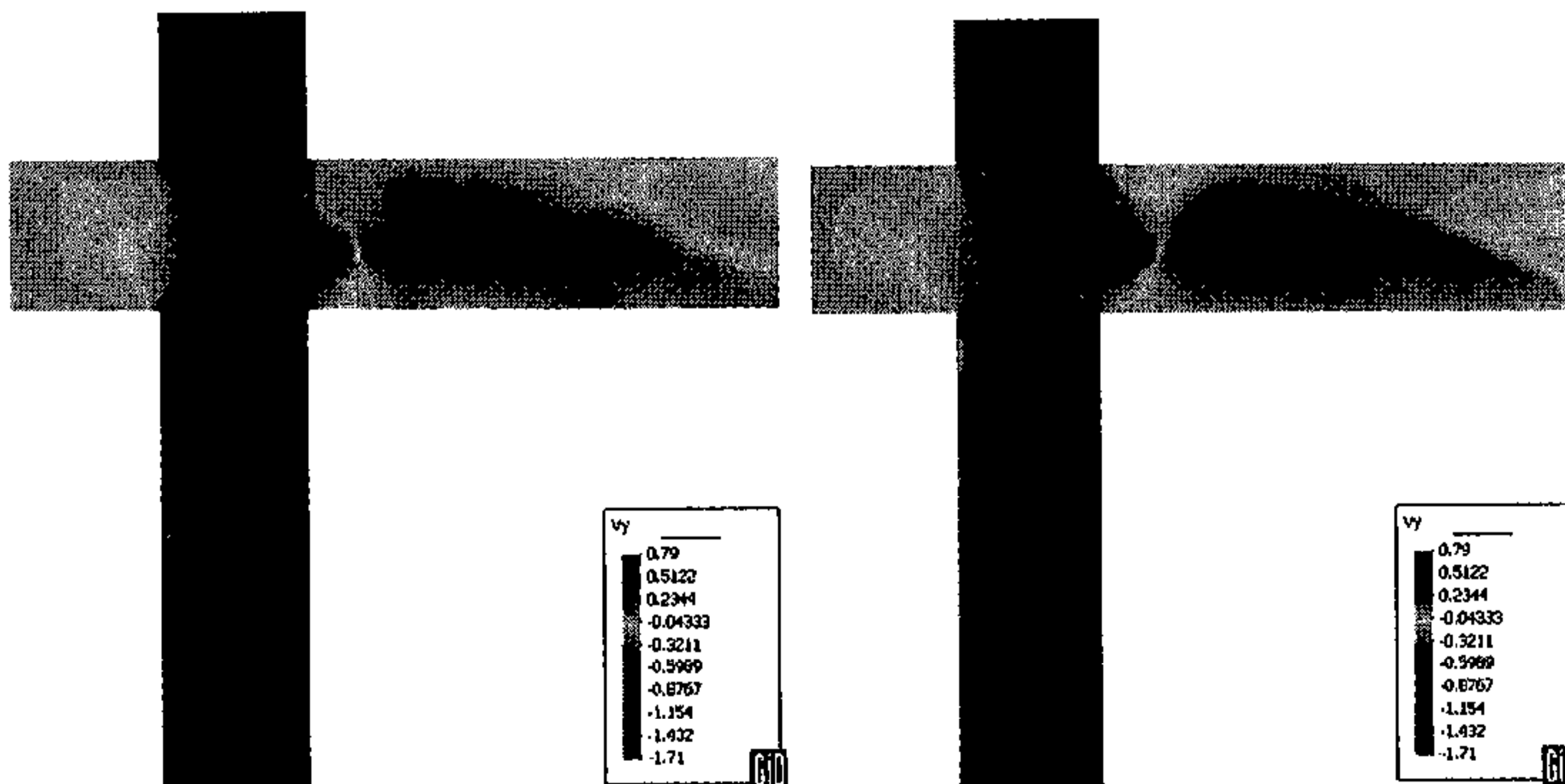


Figura 8.85. Componente de la velocidad según el eje y. Experimental (izquierda) y numérica (derecha)

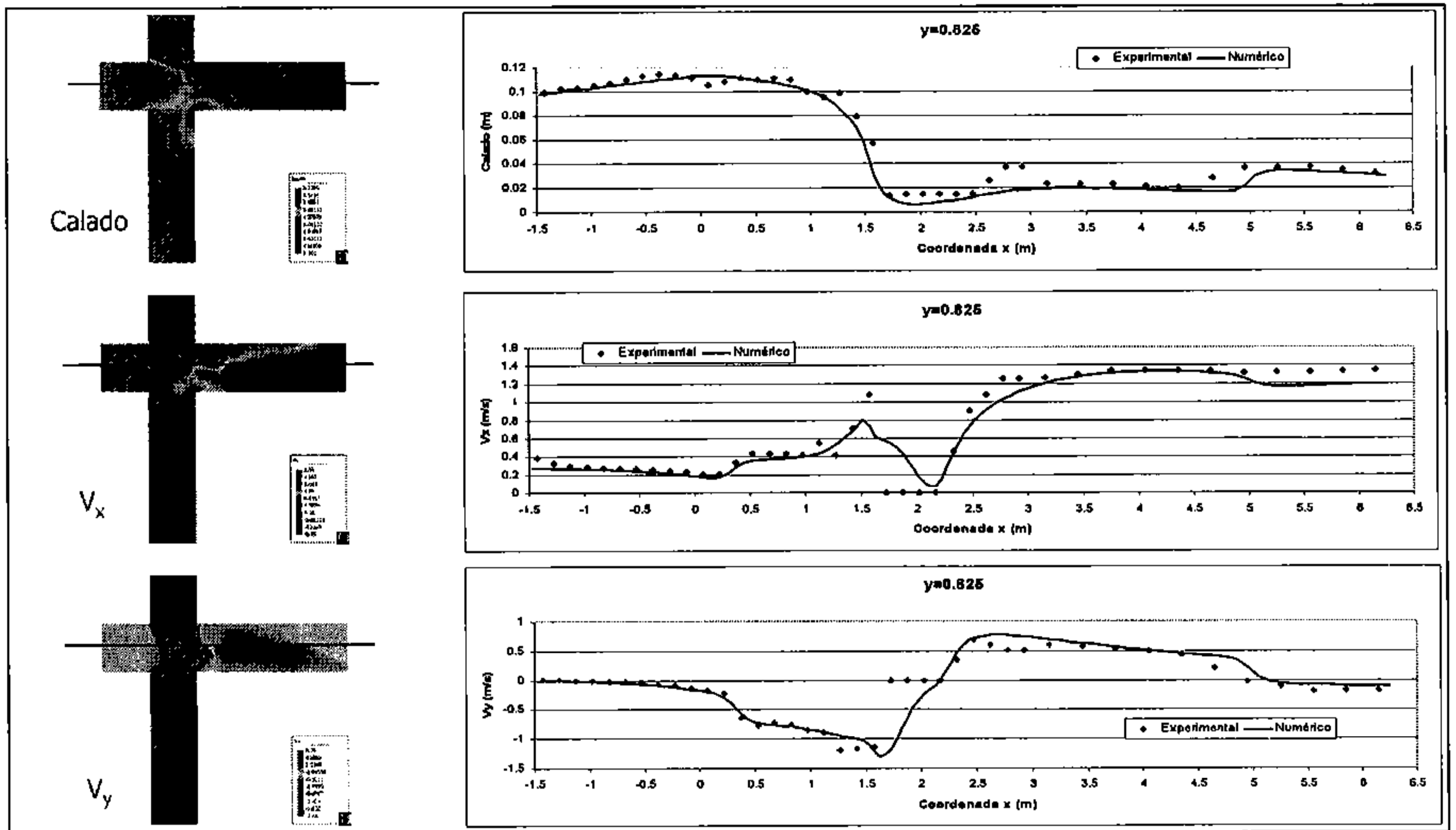


Figura 8.86. Comparación numérico – experimental según el eje x

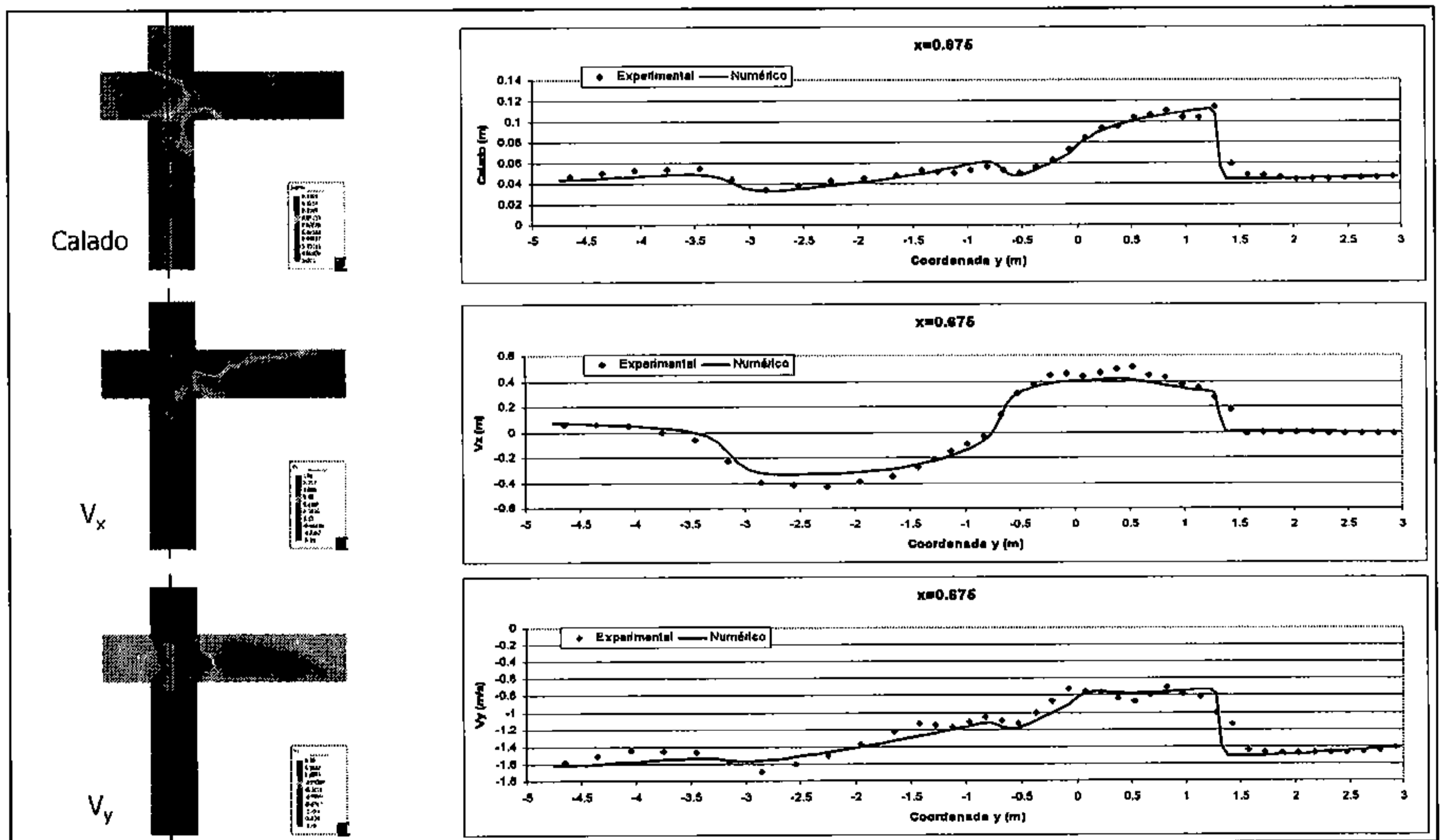


Figura 8.87. Comparación numérico – experimental según el eje y

8.8.2. Modelo reducido del río Besòs

En junio de 2000, en el Laboratorio de Modelos Reducidos de la Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica del Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental de la U.P.C. se realizó un estudio en modelo reducido de un tramo de 1400 m del río Besòs (DEHMA, 1999). Posteriormente se realizó una campaña de medida de calados y velocidades en el modelo, resultados utilizados en los trabajos mencionados, y en el presente apartado.

La experiencia consistió en un modelo físico de lecho fijo (Fotografía 8.6), que representaba los 1400 m de cauce en prototipo, a escala 75:30 (horizontal:vertical). Ello, en modelo, representa un tramo curvo de 18.67 m de longitud y 1.75 m de ancho. Por la parte central del mismo discurre un cauce central de 0.33 m de ancho en su base, con un trazado sinusoidal (Figura 8.89). La pendiente media según el eje del cauce central es del 0.0067.

El cauce central estaba formado por gravas de 25 mm de diámetro según DEHMA(1999) o 20 mm según Martín-Vide et al. (2004). A partir de una serie de ensayos del mismo material granular en un canal rectangular recto, en DEHMA (1999) se determina que el coeficiente de rugosidad de Manning de dicho material es de $n_c = 0.025$. Este coeficiente de rugosidad es la media de los obtenidos a partir de 5 pares de datos de calado y caudal en régimen uniforme (calados entre 0.053 m y 0.149 m para una pendiente del 0.0065).

En la llanura de inundación se simuló el efecto de una vegetación flexible mediante la colocación de plantas ornamentales de plástico (isolepsis) sobre la misma grava. La experiencia que se considera corresponde a una densidad de 100 plantas/m². En el trabajo DEHMA (1999) se determina la rugosidad de este tipo de plantas sobre grava, para distintas densidades, mediante ensayos en un canal rectangular. Para cada densidad se obtiene una relación entre el coeficiente de rugosidad de Manning y el producto de la velocidad por el calado. Para la densidad de 100 plantas/m² los resultados se muestran en la Tabla 8.2 y la Figura 8.88. Finalmente, para los muros del encauzamiento, de mortero, en el mismo estudio se estimó un coeficiente de rugosidad de Manning de $n_m = 0.012$.

En la campaña de medidas, los campos de velocidad se midieron mediante correntímetro bidimensional electromagnético (el mismo instrumento que para el cruce de calles) por lo que en cada sección se dispone de los datos de las componentes de la velocidad según un eje x perpendicular a las secciones, y según un eje y paralelo a la sección hacia la margen izquierda. Se han utilizado los datos de cota de lámina de agua y velocidad en 12 secciones transversales (PK 5+850 a PK 6+950) separadas 1.33 m entre ellas (100 m en prototipo). Las secciones utilizadas se muestran en planta en la Figura 8.89.

Vy (m2/s)	n _{II}
0.0234	0.074
0.0469	0.057
0.0704	0.049
0.094	0.045
0.1125	0.04

Tabla 8.2. Rugosidad en la llanura en función del producto de velocidad por calado

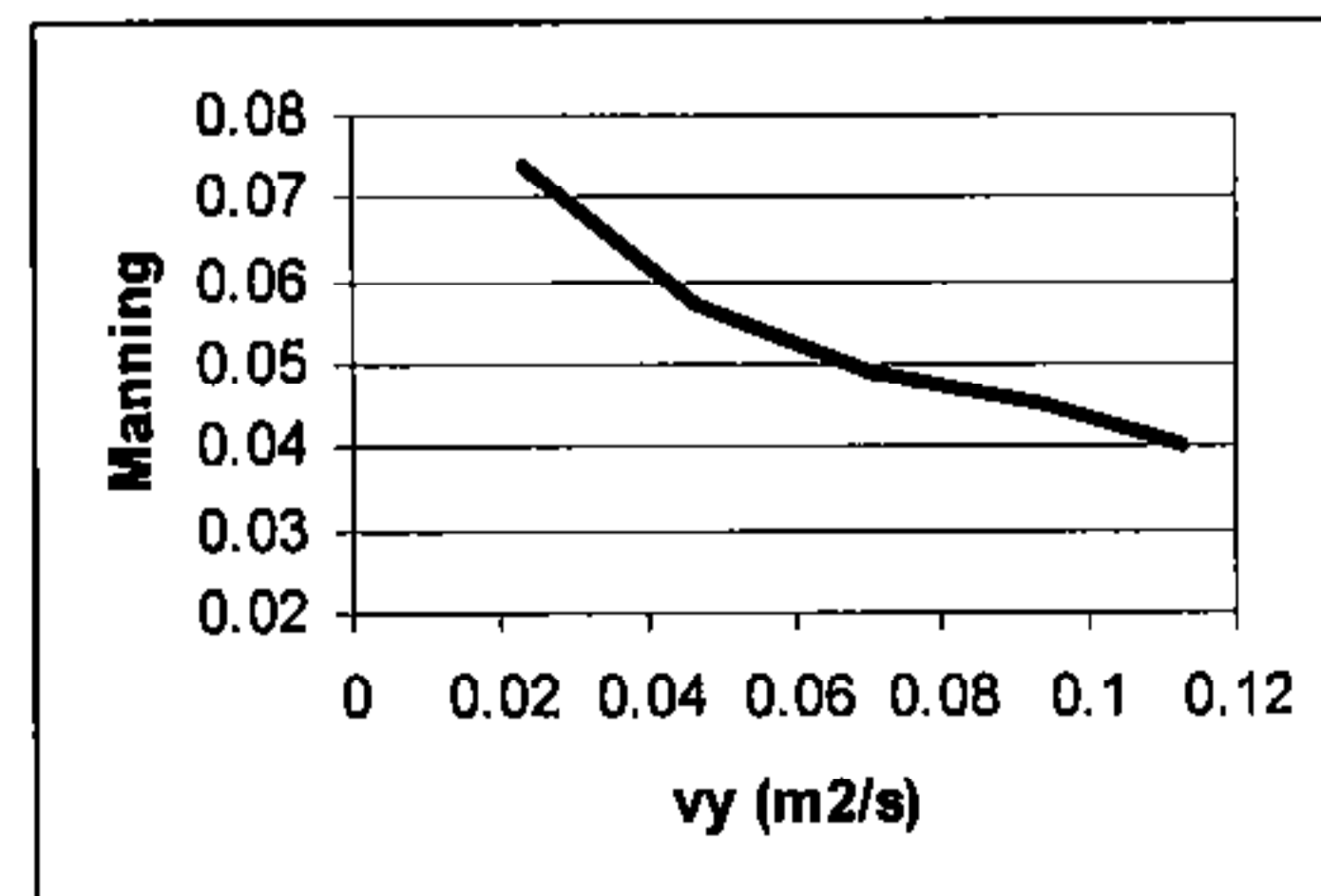


Figura 8.88. Rugosidad de las plantas en función del producto de velocidad por calado.

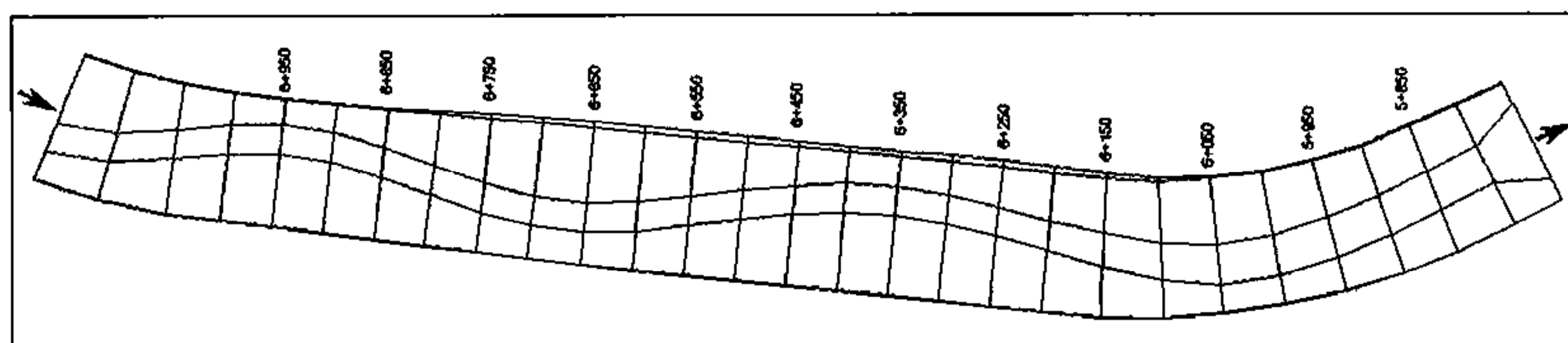


Figura 8.89. Planta del modelo reducido del río Besòs.



Fotografía 8.6. Modelo reducido del río Besòs. Fotografía tomada de (Martín-Vide et al., 2004)

En este trabajo, se ha realizado una calibración con el modelo CARPA, con los datos de laboratorio correspondientes al modelo reducido del río Besòs. Para ello se ha realizado una serie de simulaciones con distintos valores para el coeficiente de rugosidad de Manning de cauce central y llanuras, algunas con simulaciones con un único coeficiente de rugosidad constante en las llanuras, y otras con un coeficiente de rugosidad que en cada instante de cálculo y cada elemento de volumen depende del valor del producto de calado por velocidad.

Para determinar la bondad de cada uno de los ensayos, se han usado una serie de indicadores estadísticos que son:

1. Media, para las 12 secciones consideradas, de las diferencias cuadráticas entre valores numéricos y experimentales para:
 - a. Cota de la lámina de agua en el punto central del cauce central
 - b. Cota de la lámina de agua junto a la margen izquierda del cauce de avenida
 - c. Cota de la lámina de agua junto a la margen derecha del cauce de avenida
 - d. Velocidad en la dirección perpendicular a la sección en el punto central del cauce central
2. Media de las diferencias cuadráticas entre valores numéricos y experimentales para la velocidad en la dirección perpendicular a la sección en todos los puntos de medida.
3. Media, para las 12 secciones consideradas, de las diferencias entre valores numéricos y experimentales para:
 - a. Cota de la lámina de agua en el punto central del cauce central
 - b. Cota de la lámina de agua junto a la margen izquierda del cauce de avenida
 - c. Cota de la lámina de agua junto a la margen derecha del cauce de avenida
 - d. Velocidad en la dirección perpendicular a la sección en el punto central del cauce central
4. Coeficiente de correlación entre valores numéricos y experimentales para series de datos formadas por:
 - a. Velocidad en la dirección perpendicular a la sección en el punto central del cauce central
 - b. Velocidad en la dirección perpendicular a la sección en todos los puntos de medida de velocidad

Entre estos indicadores, las medias de las diferencias cuadráticas informan de la magnitud de las discordancias, mientras que la media de las diferencias indica el sentido del error. Como parámetro complementario pueden servir los coeficientes de correlación.

A parte de los indicadores numéricos mencionados, para cada simulación se han realizado las comparaciones gráficas de perfiles longitudinales de velocidad (ambas componentes) y niveles de agua en el cauce central, margen derecha y margen izquierda, así como perfiles longitudinales de coeficientes de Coriolis (α) y de Boussinesq (β). También se han representado gráficamente las correlaciones (nubes de puntos) entre resultados numéricos y experimentales para las dos componentes de velocidad en todos los puntos de cálculo, así como la comparación gráfica sección a sección de las dos componentes de la velocidad y cota de agua en todos los puntos.

La primera simulación se realizó con los coeficientes de rugosidad originales de DEHMA (1999), y con un único coeficiente constante en toda la llanura ($n_c = 0.025$, $n_H = 0.0487$, $n_m = 0.012$). La distribución en planta de los valores de velocidad resultantes (Figura 8.90) indica que la línea de máxima velocidad no sigue la sinuosidad del cauce central, sino que existen zonas en la llanura de inundación, aguas abajo de los puntos de máxima curvatura y en su lado exterior, con velocidades elevadas. Esto hace pensar, a partir de los datos de la Tabla 8.2, que en esta zona la rugosidad debería reducirse respecto el valor de referencia, mientras que en los puntos de velocidad y calados menores debería aumentar. Por ello, se decidió incorporar al modelo CARPA la posibilidad de considerar una rugosidad variable en función precisamente del valor de v_y .

A pesar de lo dicho, se realizaron dos simulaciones más con rugosidad constante pero valores del coeficiente de Manning inferiores en el cauce (Simulación 2) y en el cauce y llanuras (Simulación 3). En las comparaciones realizadas se pudo ver que la calibración mejora sensiblemente con las reducciones de rugosidad mencionadas.

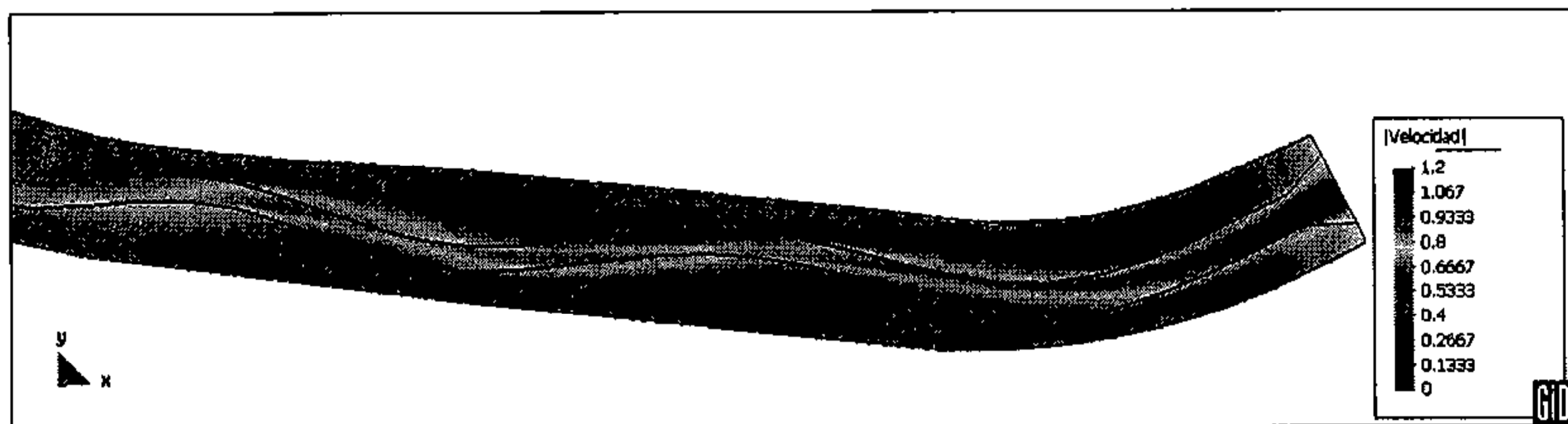


Figura 8.90. Distribución en planta del módulo de la velocidad para los valores originales de rugosidad (Simulación 1)

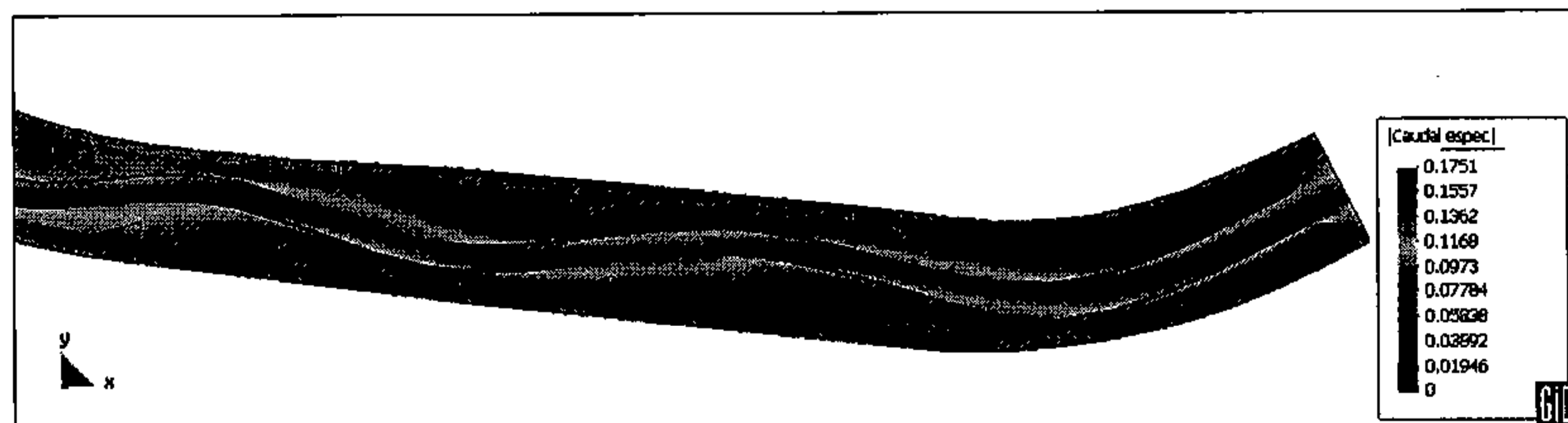


Figura 8.91. Distribución del caudal específico (v_y) para los valores originales de rugosidad (Simulación 1)

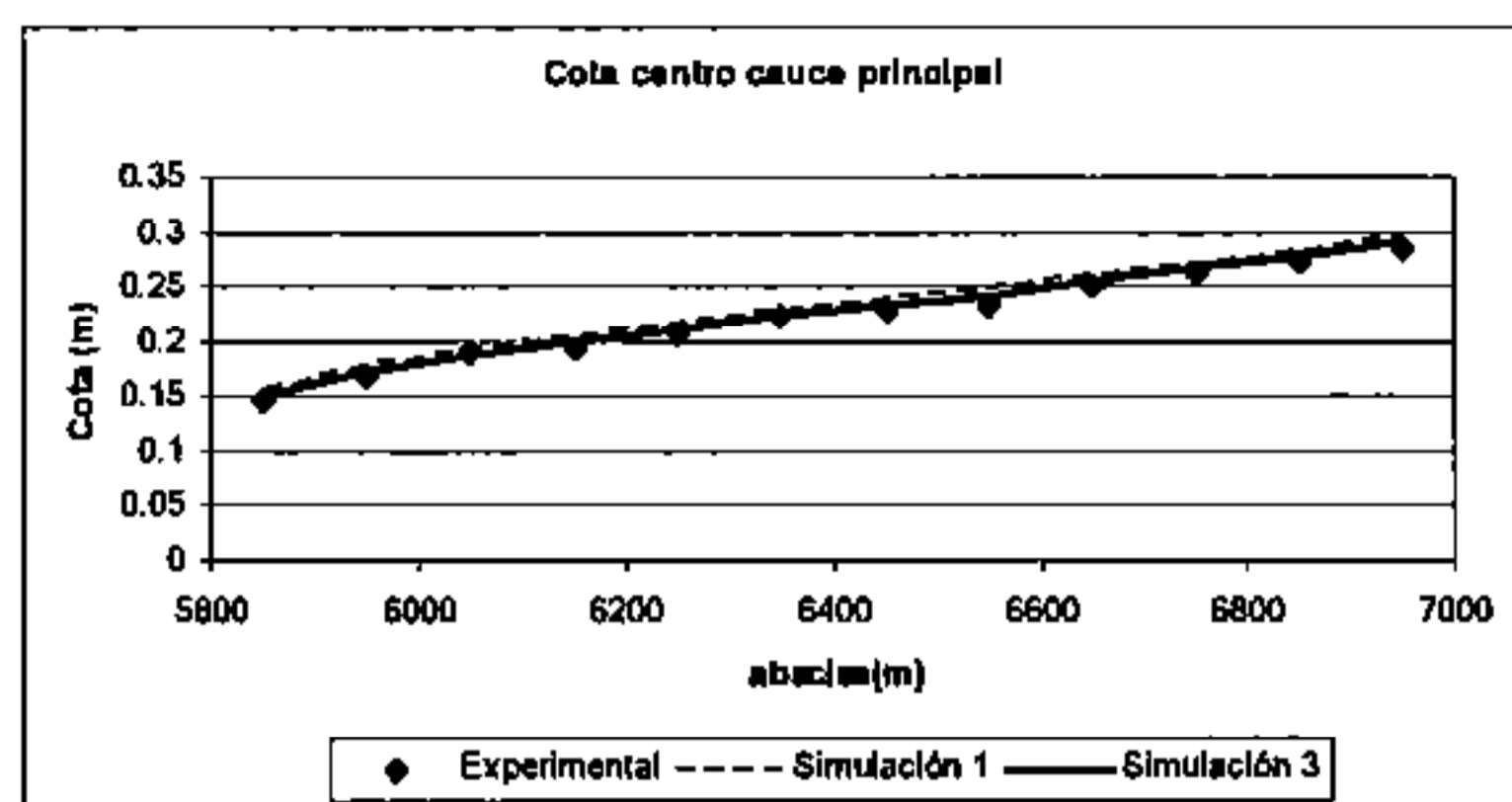


Figura 8.92. Perfil longitudinal de cota de lámina de agua por el centro del cauce. Simulaciones 1 y 3

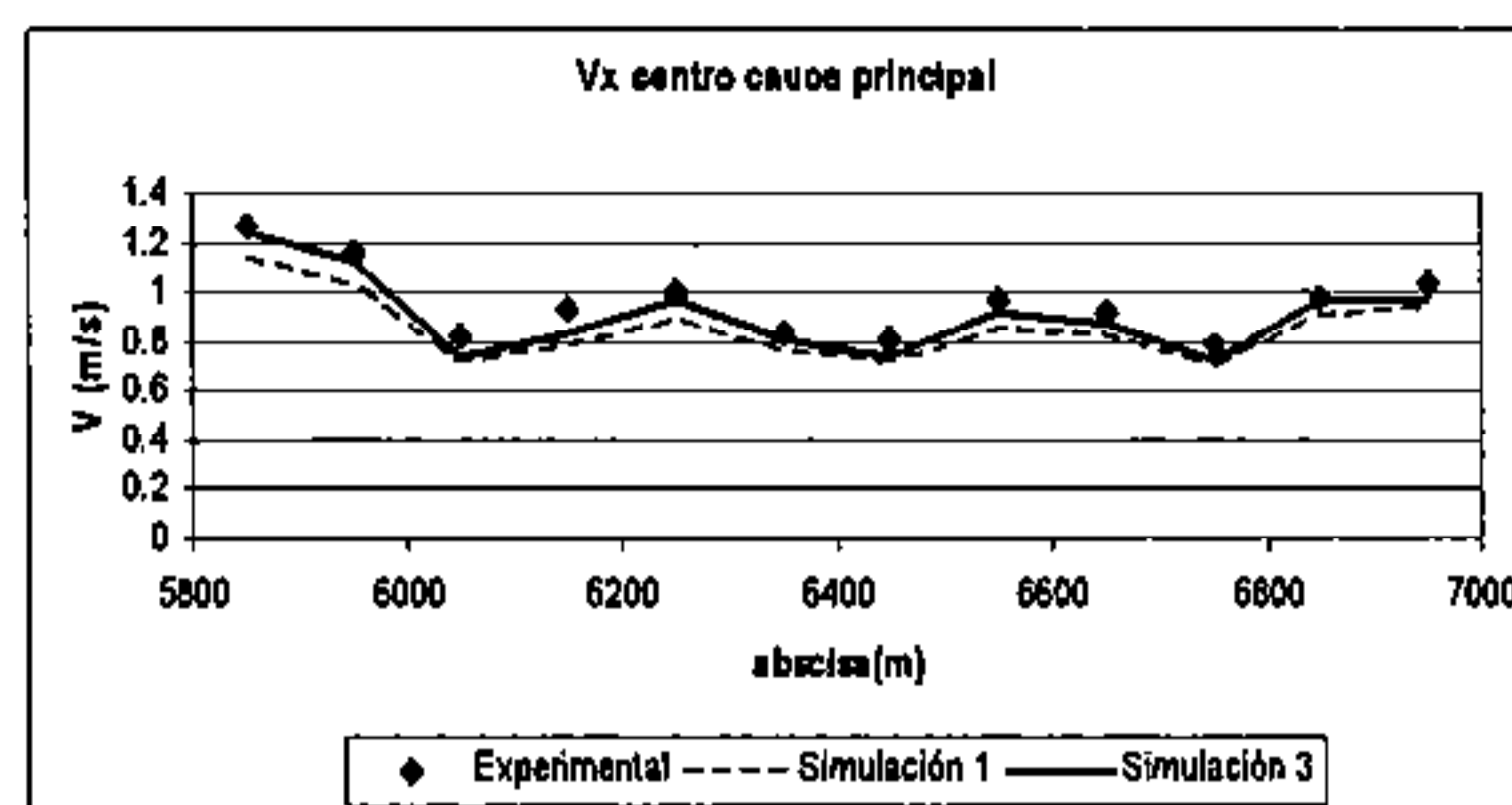


Figura 8.93. Perfil longitudinal de v_x por el centro del cauce. Simulaciones 1 y 3

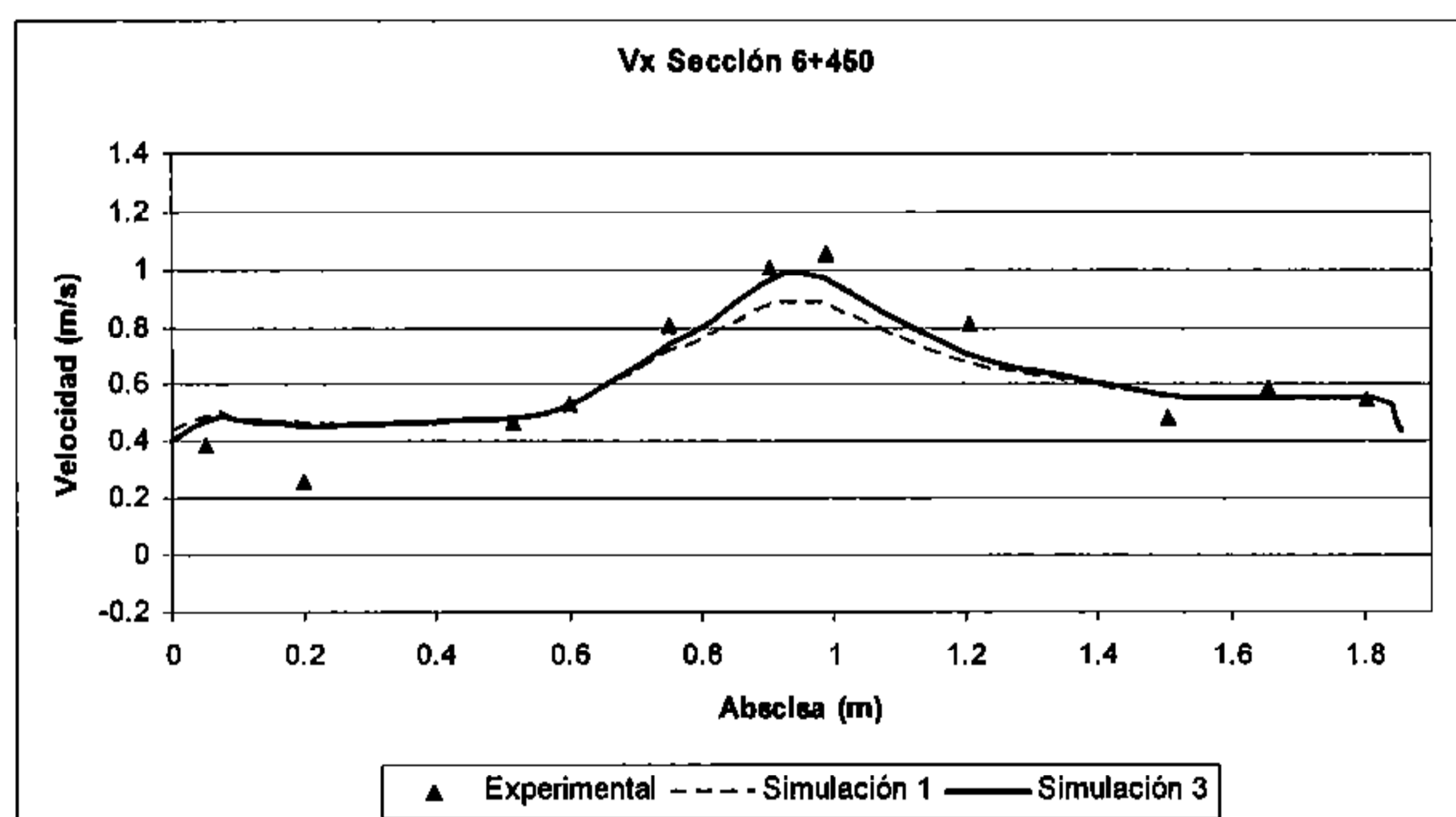


Figura 8.94. Comparación numerico-experimental de v_x Sección 6+450. Simulaciones 1 y 3

En la serie de simulaciones realizadas a continuación (Simulaciones 4 a 13) se realizaron variaciones en los coeficientes de rugosidad, tanto en el cauce como en las llanuras, siguiendo un proceso iterativo en función del valor de los indicadores estadísticos y de la observación gráfica de los resultados. Los valores originales de rugosidad propuestos en DEHMA (1999) resultan ser demasiado altos (como se indica también en el trabajo de Martín-Vide et al (2004) con códigos diferentes). Los valores que se considera que ajustan mejor con los resultados experimentales serían un coeficiente de rugosidad en el cauce central de $n_c = 0.018$ y una reducción del 2.5% respecto los valores de la Tabla 8.2 en el coeficiente de rugosidad variable en las llanuras (Simulación 10). En la Figura 8.95 se muestra la distribución en planta del módulo de la velocidad para dicha simulación, mientras que en la Figura 8.97 se muestra la distribución en planta del coeficiente de rugosidad de Manning resultante del campo de velocidades. Se aprecian los valores menores de rugosidad en las zonas de llanura con mayor velocidad, de manera que el comportamiento del modelo numérico reproduce más fielmente el funcionamiento hidráulico del modelo reducido.

Los resultados de la calibración se muestran de forma gráfica en la Figura 8.98 (perfil longitudinal de la cota de la lámina de agua), Figura 8.99 (perfil longitudinal de v_x), Figura 8.100 (perfil longitudinal del coeficiente de Coriolis), Figura 8.101 (perfil longitudinal del coeficiente de Boussinesq) y Figura 8.103 (comparación numérico experimental de v_x en la sección 6+450). En las figuras se compara la Simulación 10 (modelo calibrado) con la 4 (coeficientes de rugosidad originales).

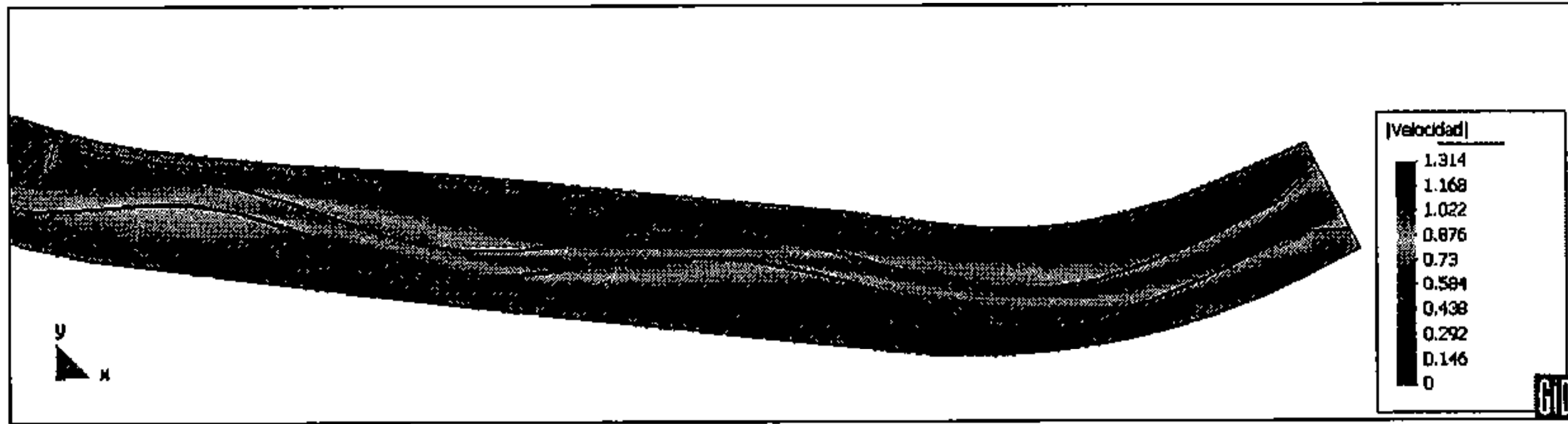


Figura 8.95. Distribución en planta del módulo de la velocidad. Simulación 10 (modelo calibrado)

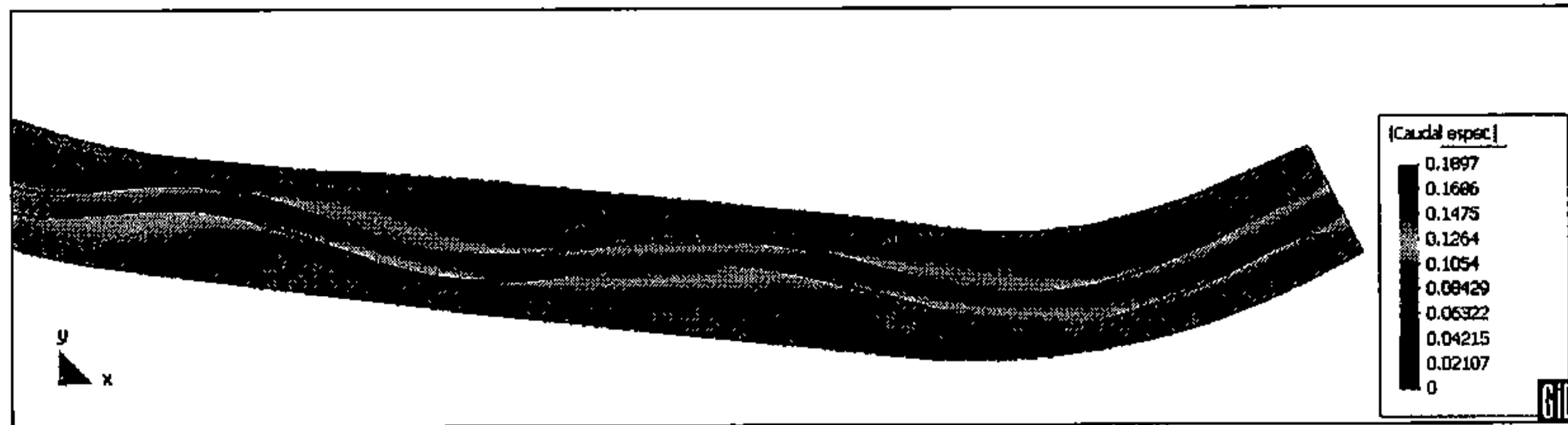


Figura 8.96. Distribución del caudal específico (v_y). Simulación 10 (modelo calibrado)

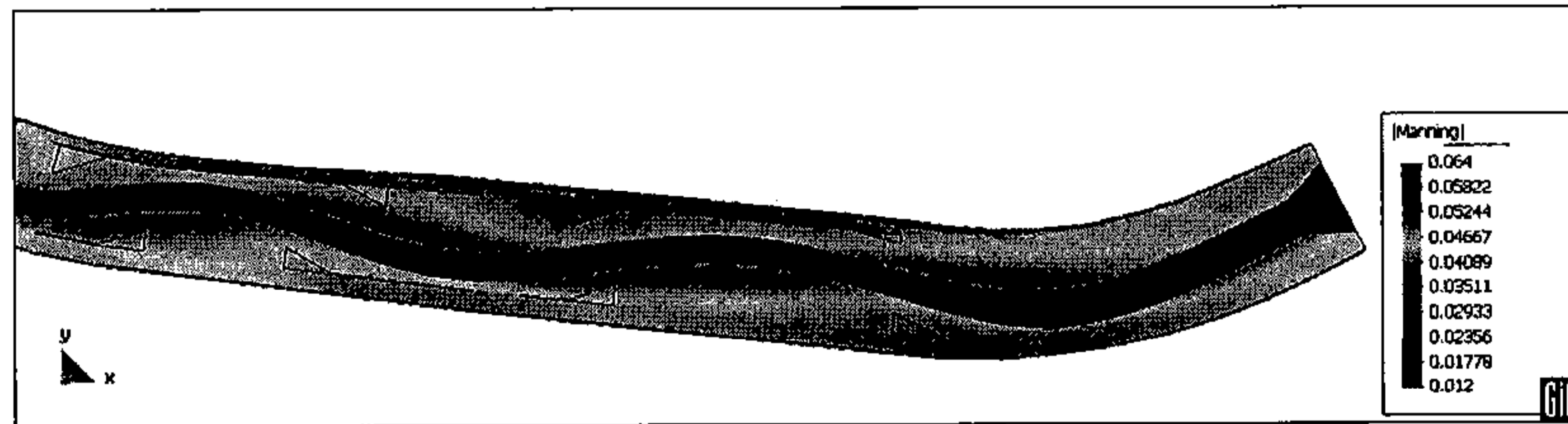


Figura 8.97. Distribución en planta del coeficiente de rugosidad de Manning. Simulación 10 (modelo calibrado)

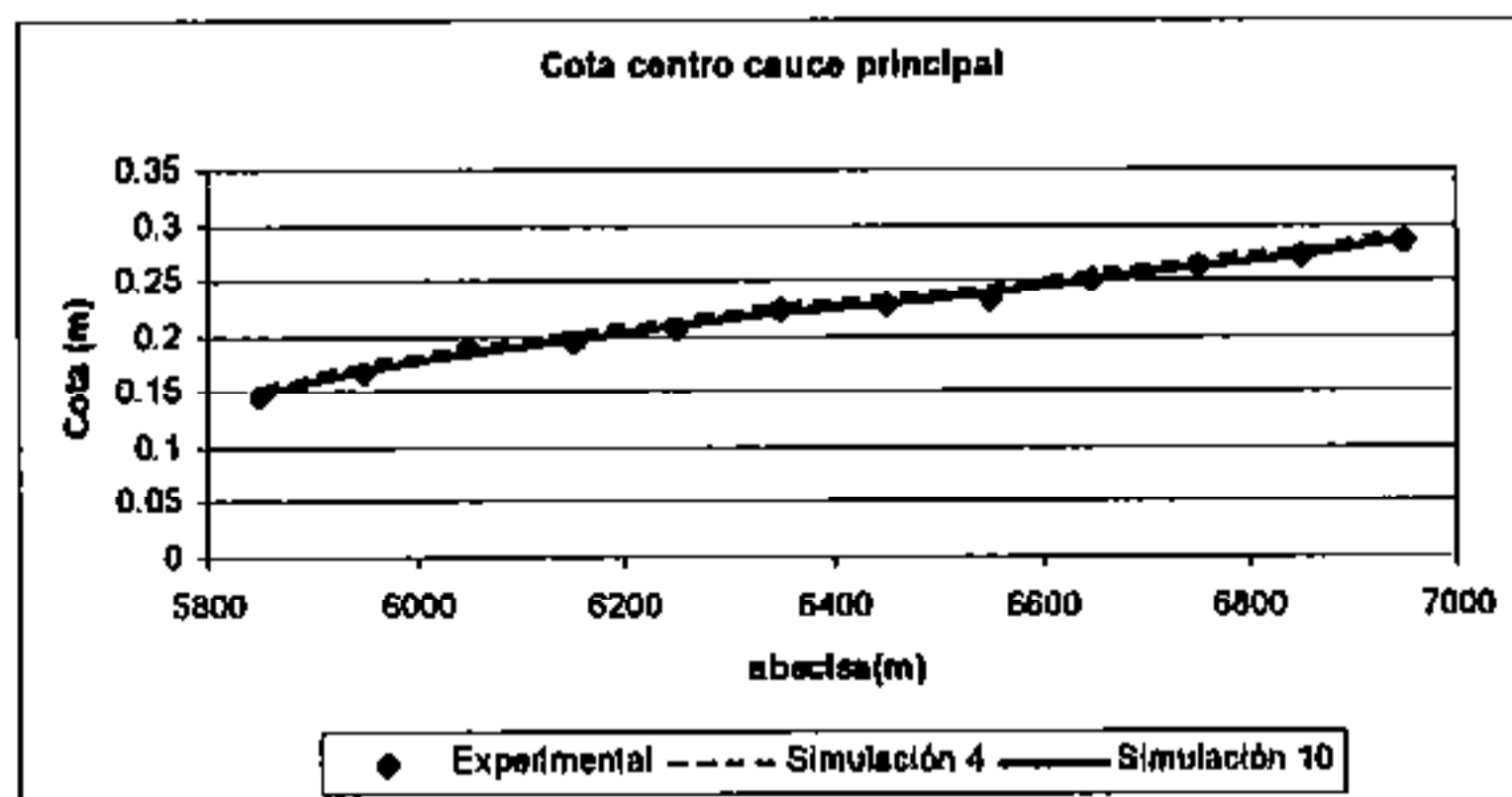


Figura 8.98. Perfil longitudinal de cota de lámina de agua por el centro del cauce. Simulaciones 4 (sin calibrar) y 10 (modelo calibrado)

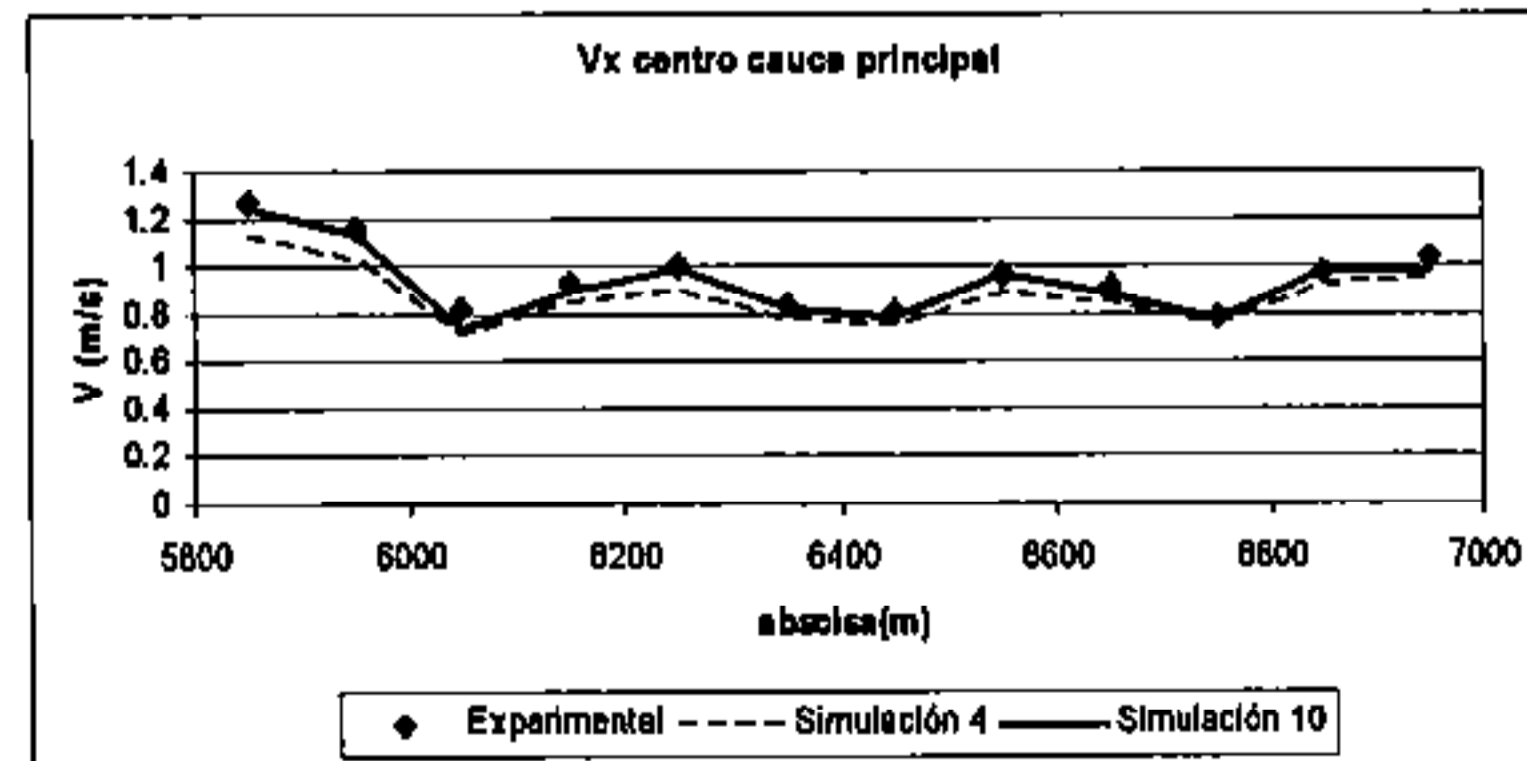


Figura 8.99. Perfil longitudinal de v_x por el centro del cauce. Simulaciones 4 (sin calibrar) y 10 (modelo calibrado)

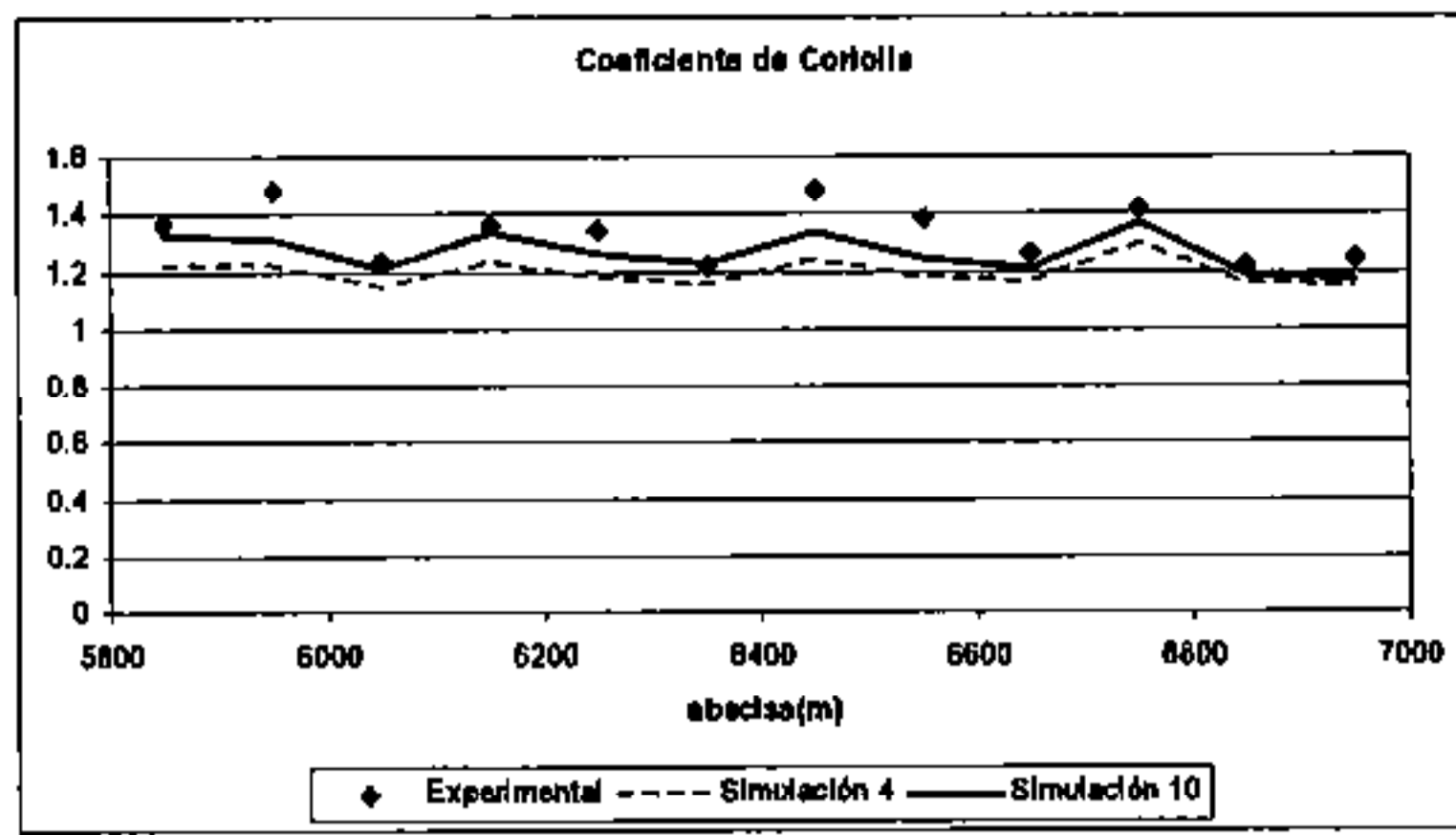


Figura 8.100. Perfil longitudinal del coeficiente de Coriolis. Simulaciones 4 (sin calibrar) y 10 (modelo calibrado)

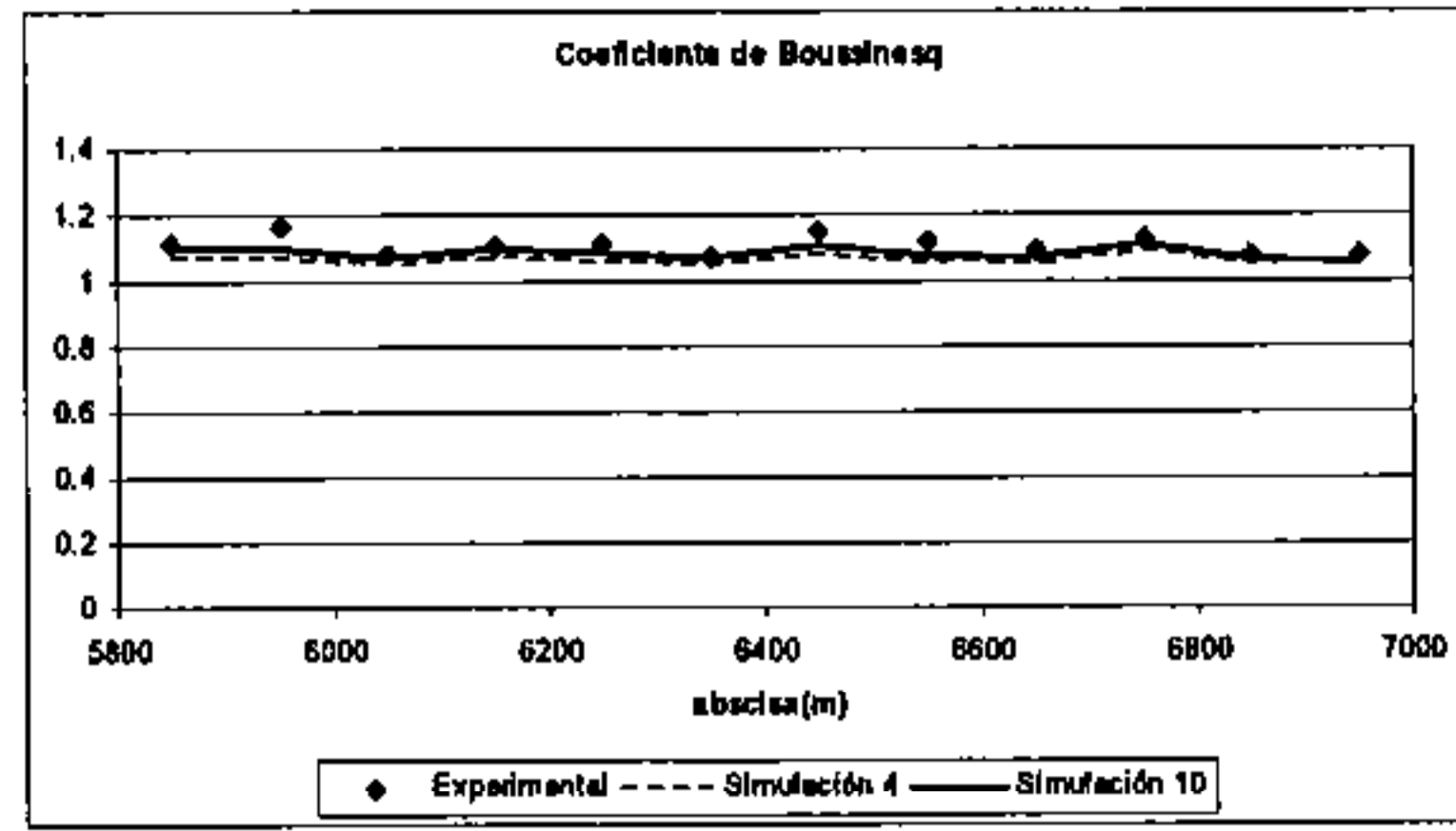


Figura 8.101. Perfil longitudinal del coeficiente de Boussinesq. Simulaciones 4 (sin calibrar) y 10 (modelo calibrado)

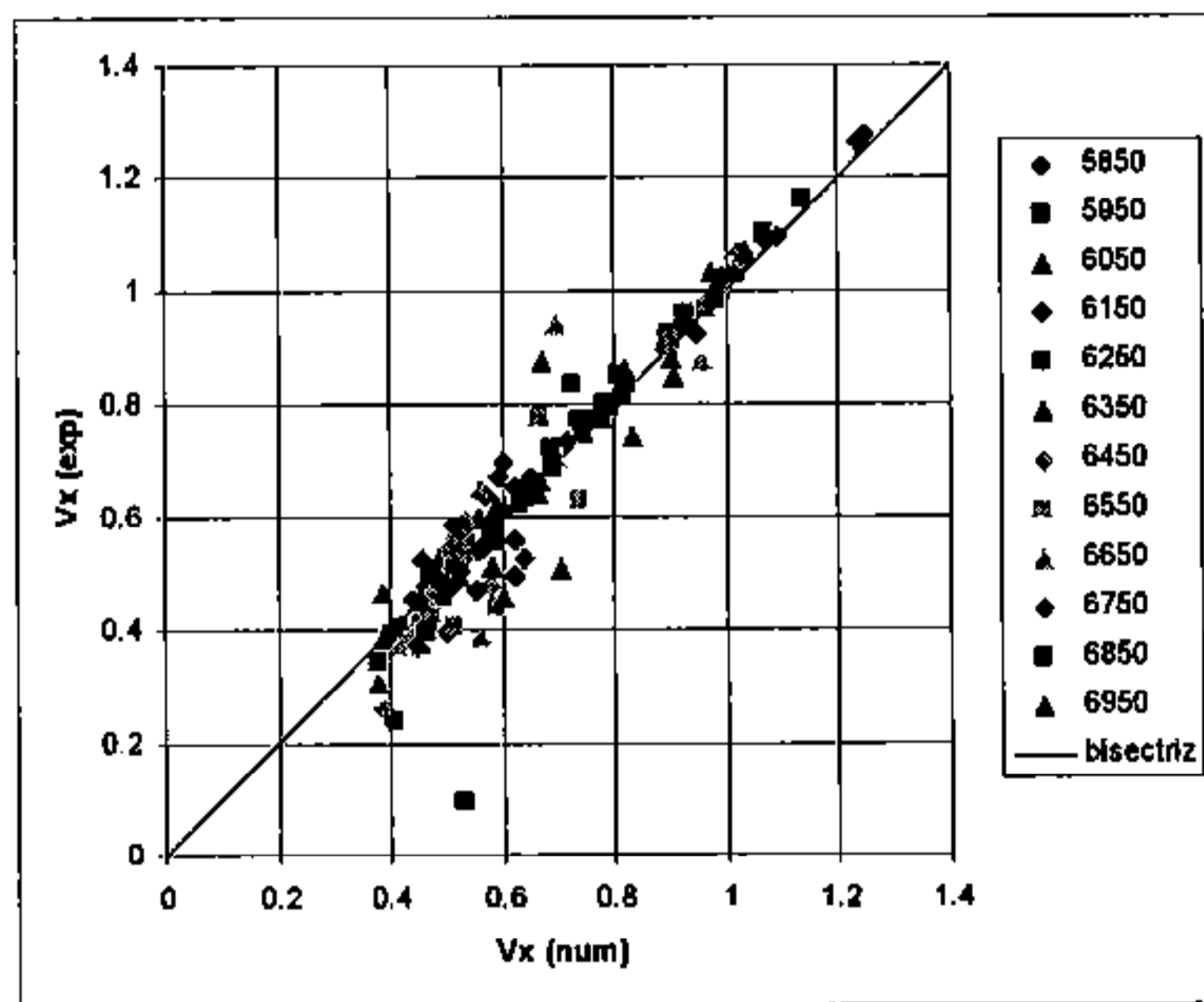


Figura 8.102. Perfil Comparación numérico experimental de los valores de v_x en todos los puntos de medida. Simulación 10 (modelo calibrado)

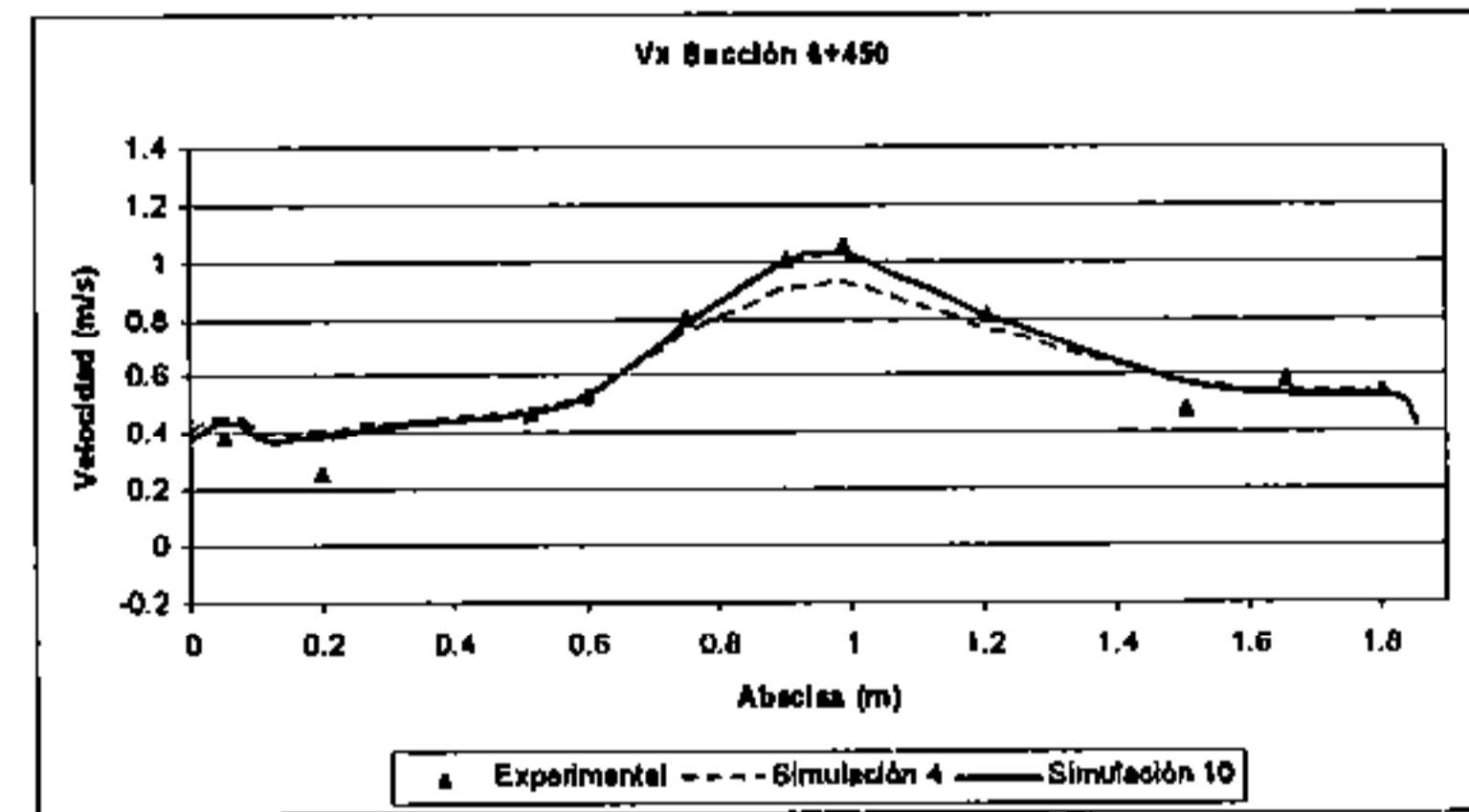


Figura 8.103. Comparación numérico-experimental de v_x Sección 6+450. Simulaciones 4 (sin calibrar) y 10 (modelo calibrado)

Es de destacar el efecto de la rugosidad variable en los resultados. Para ello si se comparan las simulaciones 3 y 10, ambas consiguen una buena aproximación en cotas de agua y velocidades en el centro del cauce, la primera con rugosidad fija en la llanura, y la segunda con rugosidad dependiente del flujo. Sin embargo, el perfil transversal de velocidades es distinto: con rugosidad fija se acentúa la forma cóncava del perfil en la zona de las márgenes del cauce central, es decir, la diferencia de velocidad entre puntos del cauce central y llanura, próximos entre sí, es mayor. Esto conduce a que con la misma rugosidad en el cauce central $n_c = 0.018$ y la misma reducción en la llanura del 2.5%, los resultados con rugosidad variable consiguen un perfil transversal de velocidades que se aproxima mejor a los experimentos, como se muestra en la Figura 8.104 para las secciones 6+250 y 6+450.

La Simulación 10 es la que globalmente presenta una mejor aproximación. Para decidir la bondad de una respecto de la otra, se ha priorizado como criterio la media de las diferencias cuadráticas de cotas de lámina de agua y velocidad por el centro. Las velocidades junto a las márgenes presentan una mayor dispersión, probablemente debido al efecto de los contornos. La simulación 10 también presenta un buen comportamiento en cuanto a valores medios de calados y velocidad, aunque, como todos los casos estudiados, el valor medio de velocidades por el centro del cauce es algo inferior en la modelación numérica. Se ha intentado afinar este valor reduciendo algo más el coeficiente de rugosidad en la Simulación 11, donde se consigue este objetivo pero a costa de aumentar las diferencias cuadráticas en cota de lámina de agua y obtener valores medios de cota de agua por debajo de los medidos. Esto indica que el desajuste en velocidades medias es debido a unos pocos puntos (principalmente a las secciones 6+050 y 6+150, como se observa en la Figura 8.99) donde los valores medidos son algo mayores a los calculados, pero el intento de ajustar mejor estos puntos desajusta el resto.

Lo que si queda patente es la mejora en la calibración al introducir rugosidad dependiente del flujo. Las Simulaciones 1, 2, y 3, con coeficientes de rugosidad fijos, presentan desajustes mayores que sus equivalentes con rugosidad variable.

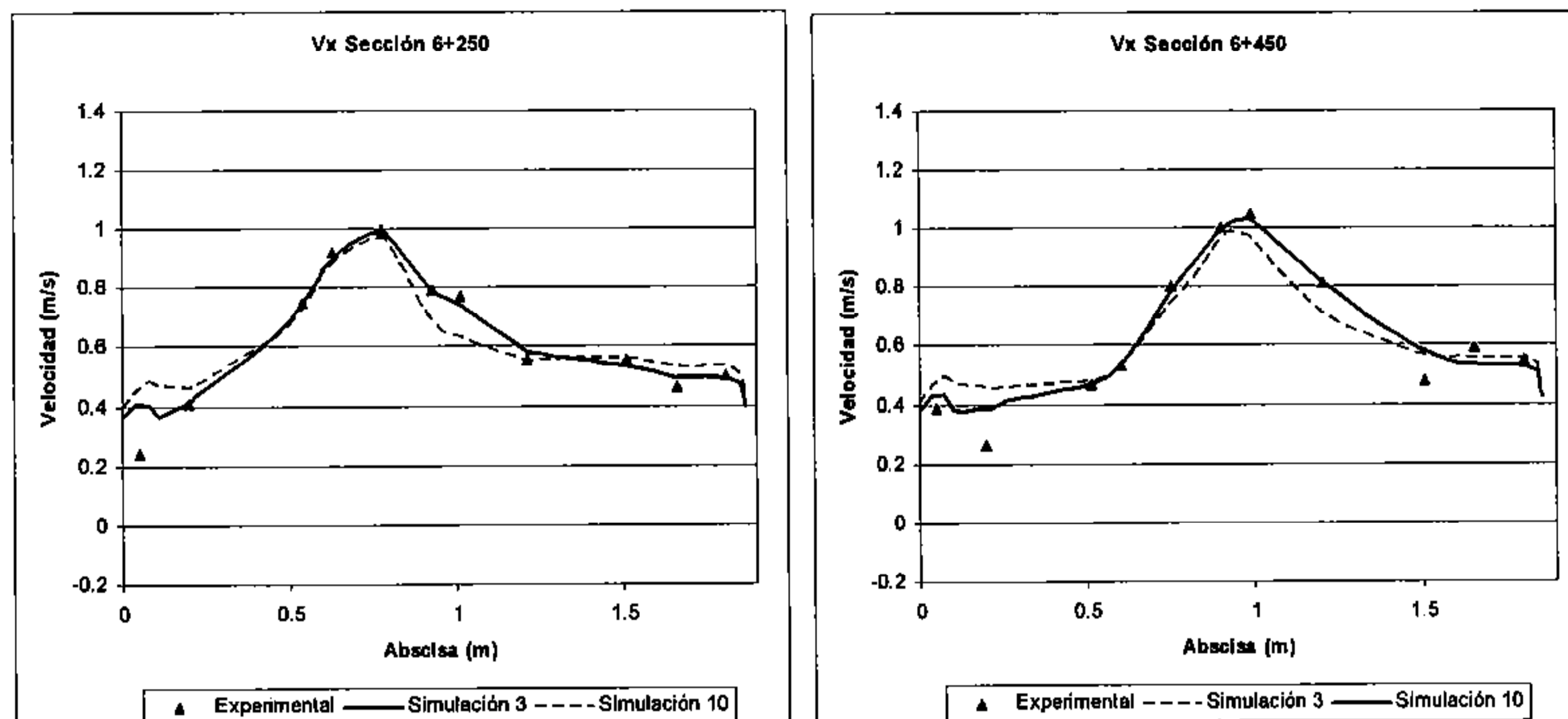


Figura 8.104. Comparación numerico-experimental de v_x Secciones 6+250 y 6+450. Simulaciones 3 (rugosidad fija en llanuras) y 10 (rugosidad dependiente del flujo)

8.8.3. Modelo reducido del río Francolí

En febrero de 2002 En la Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica del Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima i Ambiental de la U.P.C se estudió una nueva geometría para el tramo final del río Francolí (DEHMA 2002). Se realizó un estudio en modelo numérico seguido de un modelo reducido. Este último se construyó en Laboratorio de Modelos Reducidos de la Sección. Era un modelo no distorsionado a escala 65 que se operó con semejanza de Froude. El modelo abarca un tramo de 1448 m de río, que comprende el tramo de río entre un punto situado 242 m aguas arriba del actual puente del ferrocarril Madrid-Barcelona, y un punto situado 200 m aguas abajo del puente de acceso al Puerto por el Eix Transversal (Fotografía 8.7).

El caudal considerado en el estudio es de $1600 \text{ m}^3 / \text{s}$ en prototipo, y el modelo se calibró para conseguir una rugosidad equivalente a un coeficiente de Manning de 0.035 también en prototipo.

Para el estudio se tomaron datos de niveles de lámina de agua en el modelo. Concretamente se tomaron tres datos en cada sección transversal, uno en el centro del cauce central, uno en la margen derecha del mismo y otro en la margen izquierda.

En este trabajo se ha realizado la simulación numérica de la misma geometría representada por el modelo reducido (es decir, la simulación se ha realizado a escala de prototipo, a diferencia del caso del río Besòs). Para ello se ha discretizado el tramo con una malla de volúmenes finitos formada por 8818 elementos, 3748 de los cuales son triángulos y el resto cuadriláteros (Figura 8.105).

En la Figura 8.106, Figura 8.107 y Figura 8.108 se presenta la comparación de la cota de lámina de agua medida (pasada a prototipo) y calculada con la geometría del tramo final del río Francolí. Se observa la capacidad del modelo CARPA para predecir los niveles de agua medidos en el modelo.

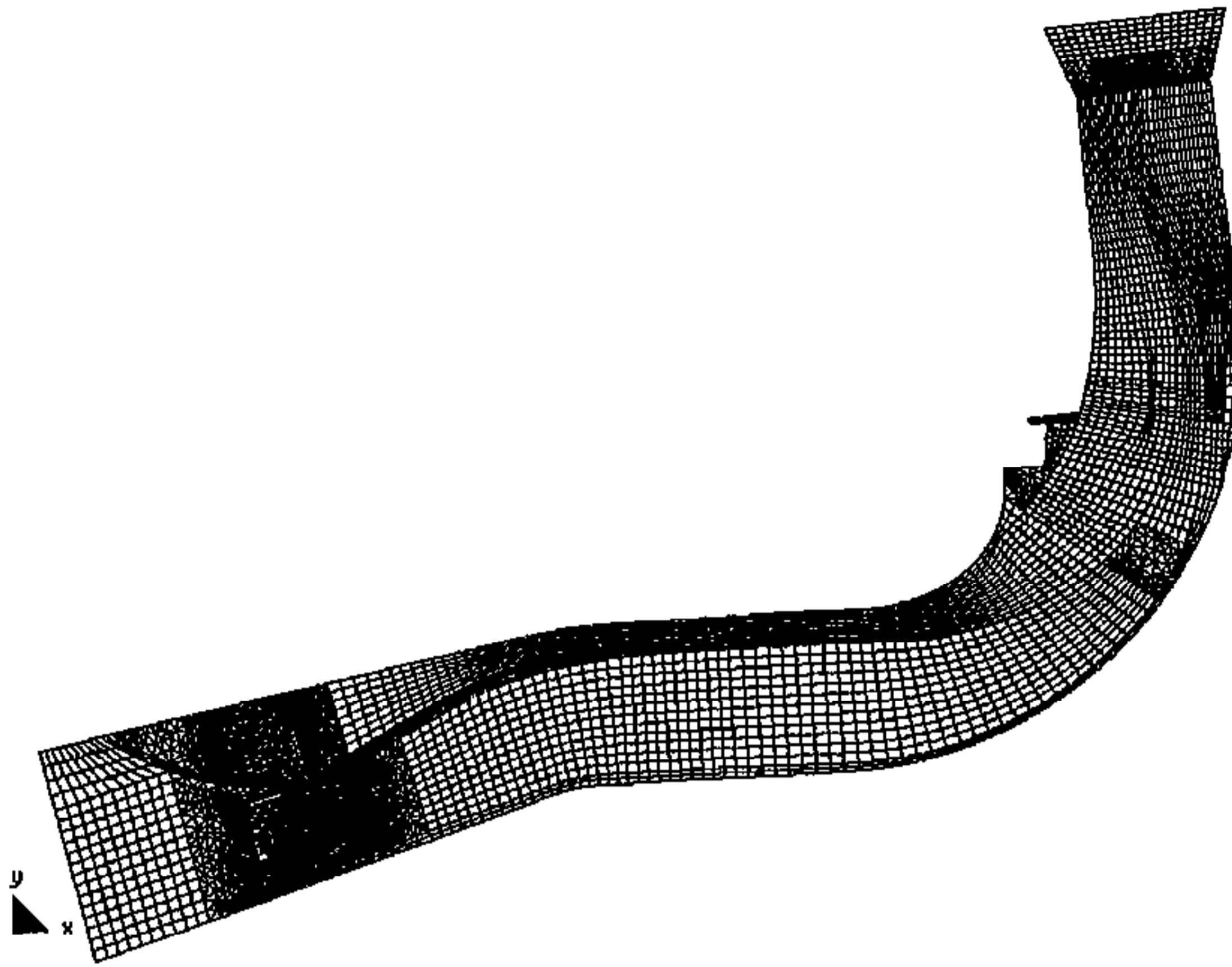
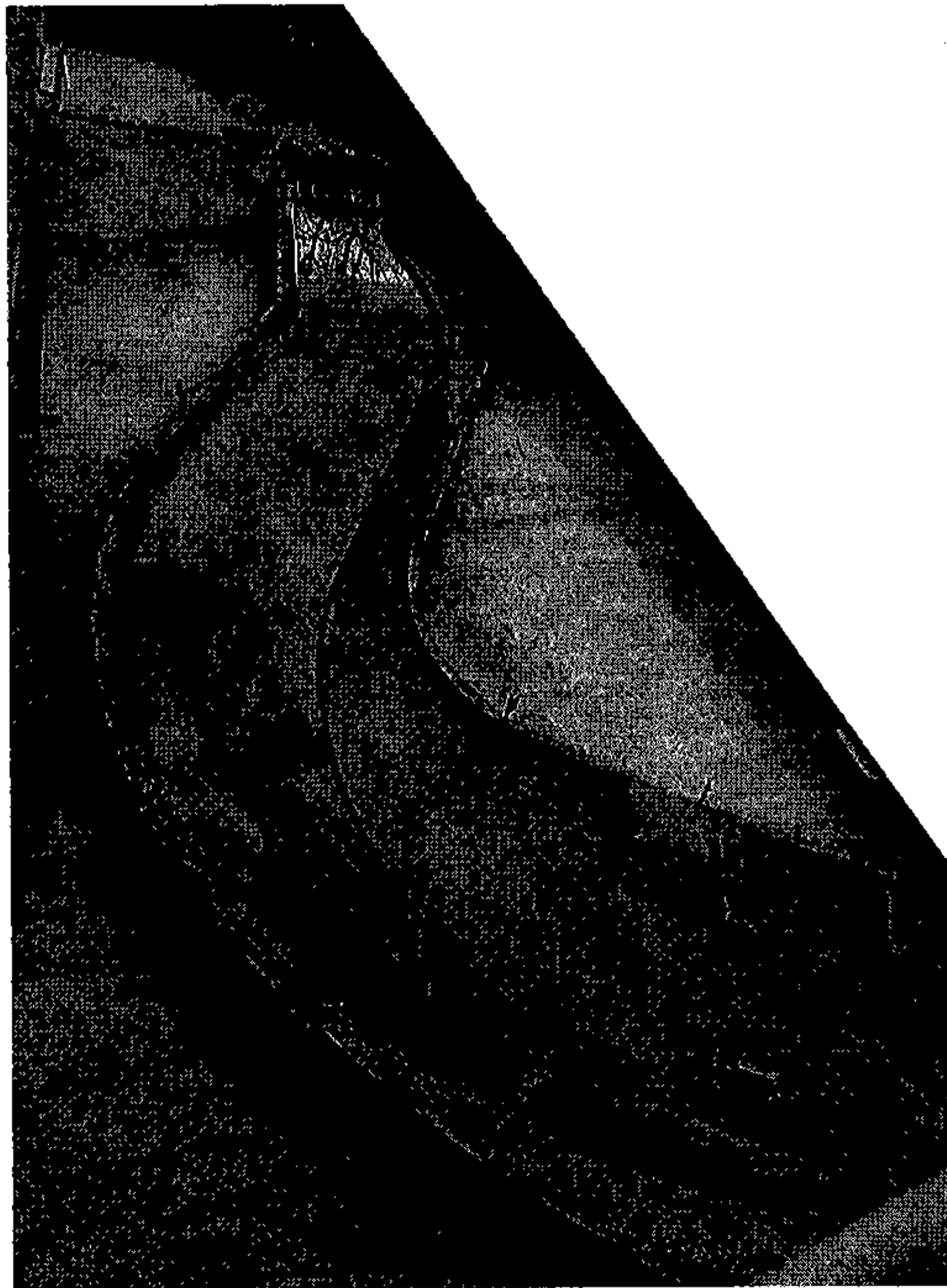


Figura 8.105. Río Francolí. Malla de cálculo



Fotografía 8.7. Visión general del modelo reducido

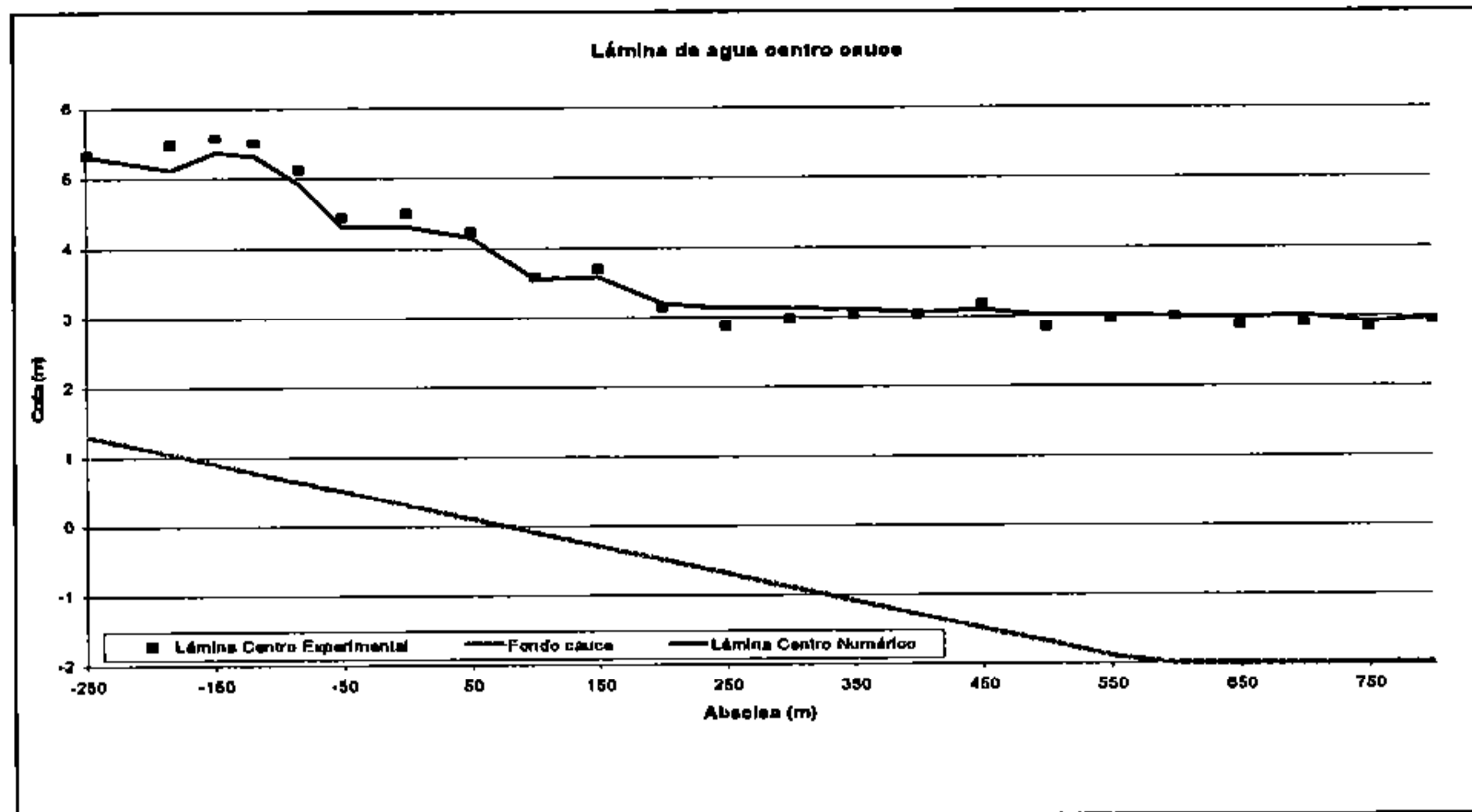


Figura 8.106. Río Francolí. Comparación numérico experimental de la lámina de agua por el centro del cauce

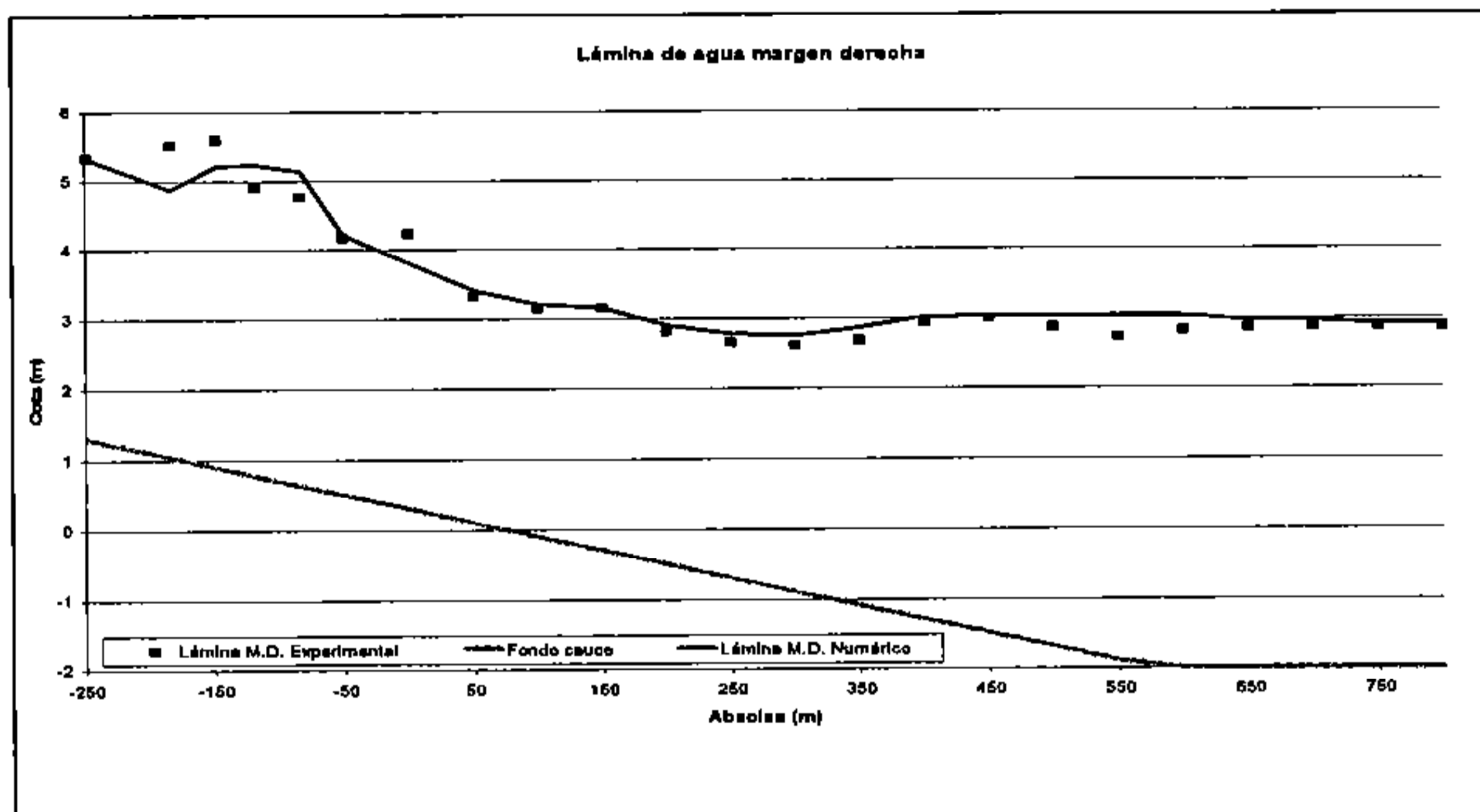


Figura 8.107. Río Francolí. Comparación numérico experimental de la lámina de agua por la margen derecha del cauce central

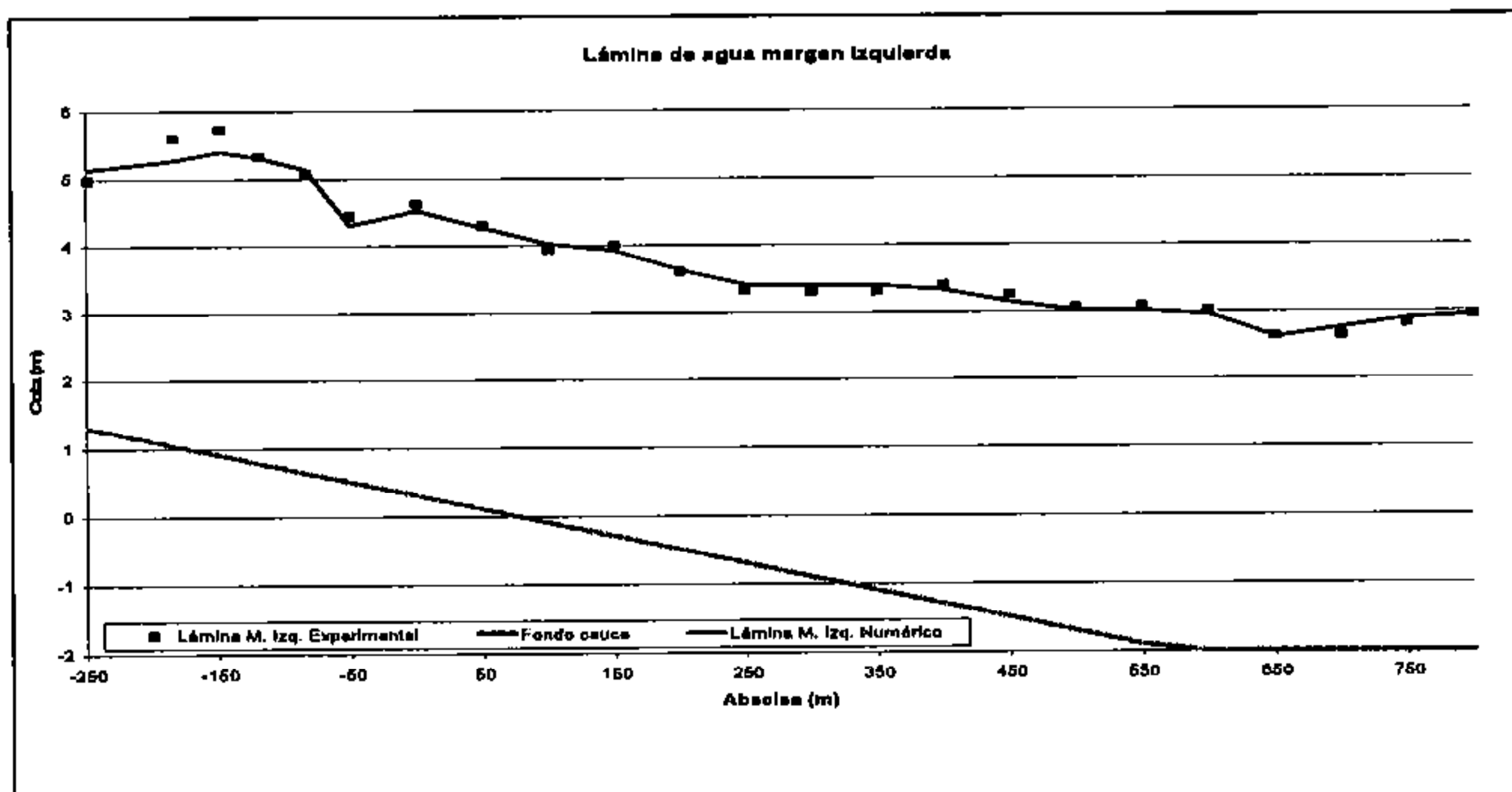


Figura 8.108. Río Francolí. Comparación numérico experimental de la lámina de agua por la margen izquierda del cauce central

9. Aplicaciones

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones del programa CARPA que se han llevado a cabo durante la realización de esta tesis. Todas ellas responden a la necesidad de encontrar soluciones a problemas de ingeniería en ríos, y ponen de manifiesto la utilidad práctica de la metodología desarrollada.

9.1. Canal de slalom de Ponts en el río Segre

9.1.1. Introducción

Por encargo de GAENA ENVIRONMENT S.L. se llevó a cabo el estudio hidráulico del río Segre en el entorno del canal de slalom de Ponts (Noguera) (DEHMA 2003). El estudio se enmarca dentro del proyecto de recuperación del río Segre tras las afecciones a este río del proyecto de la presa de Rialb que se encuentra a unos 3 km aguas arriba del citado canal de slalom.

Para la delimitación del canal de slalom se dispone una estructura longitudinal de escollera en el centro del río, con el objetivo de dividir el cauce en dos zonas: el canal de slalom por la derecha y el retorno por la izquierda. En el lado correspondiente al canal de slalom se disponen otras estructuras de escollera para conseguir el flujo adecuado para la práctica del piraguismo (Figura 9.1).

El extremo aguas abajo del canal de slalom se encuentra a unos 2400 m aguas arriba del azud de toma del Canal d'Urgell mientras que su extremo aguas arriba se encuentra unos 3 km del pie de la presa de Rialb. En todo este tramo el río transcurre en una sección delimitada por dos motas de unos 7 m de altura y una anchura de unos 60 m. En el tramo del canal de slalom la pendiente media se encuentra entorno al 6.4‰, mientras que, tanto en el tramo aguas arriba como en el tramo aguas abajo su pendiente es menor, cercana al 1‰.

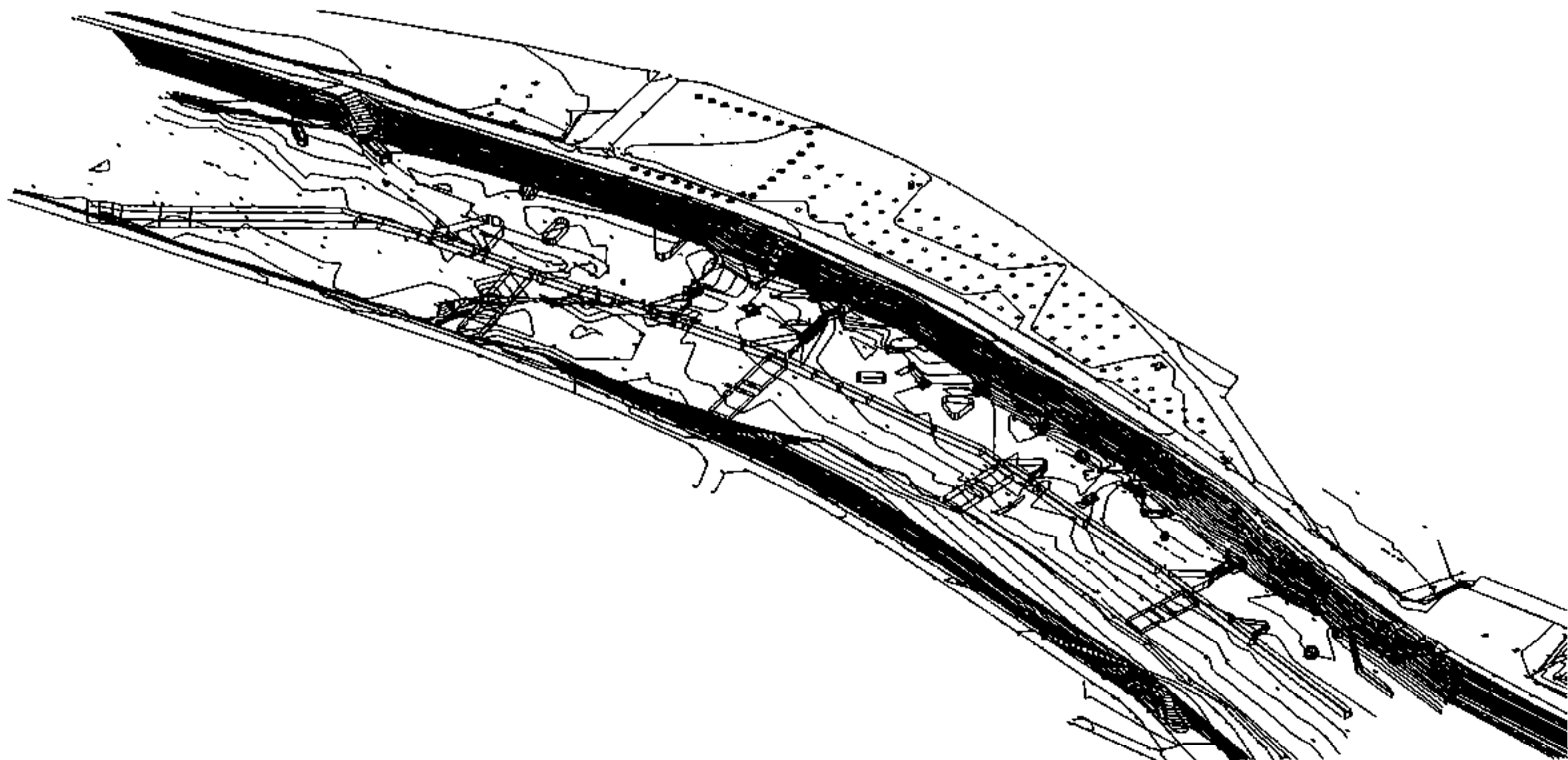


Figura 9.1. Detalle del canal de slalom

Dos de los objetivos del estudio, entre otros, eran:

1. Asegurar que para el caudal de estudio ($33 \text{ m}^3/\text{s}$, que corresponde a la dotación del Canal d'Urgell más el caudal ecológico) dos terceras partes pasen por el canal de slalom (derecha del dique central) y el resto por el canal de retorno (izquierda).
2. Conocer aproximadamente el flujo (calados y velocidades) en el canal de slalom y el canal de retorno para comprobar que son adecuados para la práctica del piragüismo.

Ello se estudió numéricamente con el programa CARPA. La discretización del campo de slalom se realizó mediante una malla irregular, con zonas de malla estructurada en base a cuadriláteros y otras de malla no estructurada de elementos triangulares. El número total de elementos de la malla es de 19062. En la Figura 9.2 se muestra la malla utilizada en el cálculo, mientras que en la Figura 9.3 se puede ver un detalle de la misma.

El coeficiente de rugosidad de Manning utilizado en el cálculo bidimensional es $n = 0.028$. Este coeficiente es inferior al que se utilizaría en un cálculo unidimensional debido a que la resistencia ocasionada por la geometría de los bloques de escollera está implícitamente considerada al introducir en detalle la geometría de dichos bloques. La condición de contorno aguas arriba es el caudal de estudio y aguas abajo se determinó la cota de la lámina de agua a imponer (348.46 m) con un cálculo en régimen permanente del tramo aguas abajo.

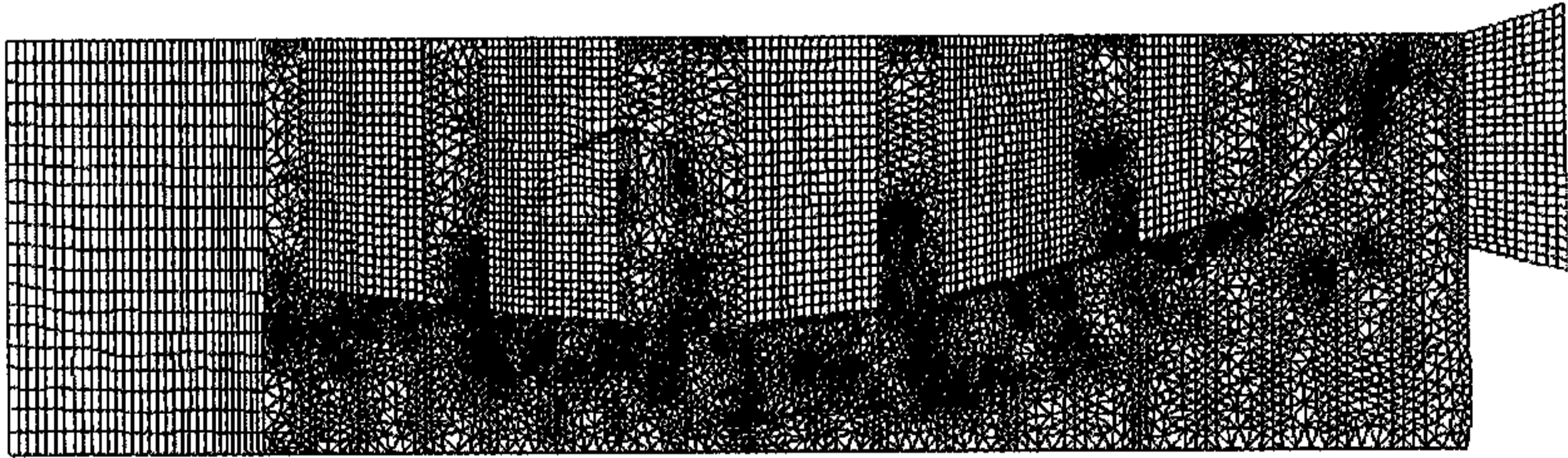


Figura 9.2. Malla de cálculo para la discretización bidimensional del campo de slalom (aguas arriba corresponde a la derecha de la figura).

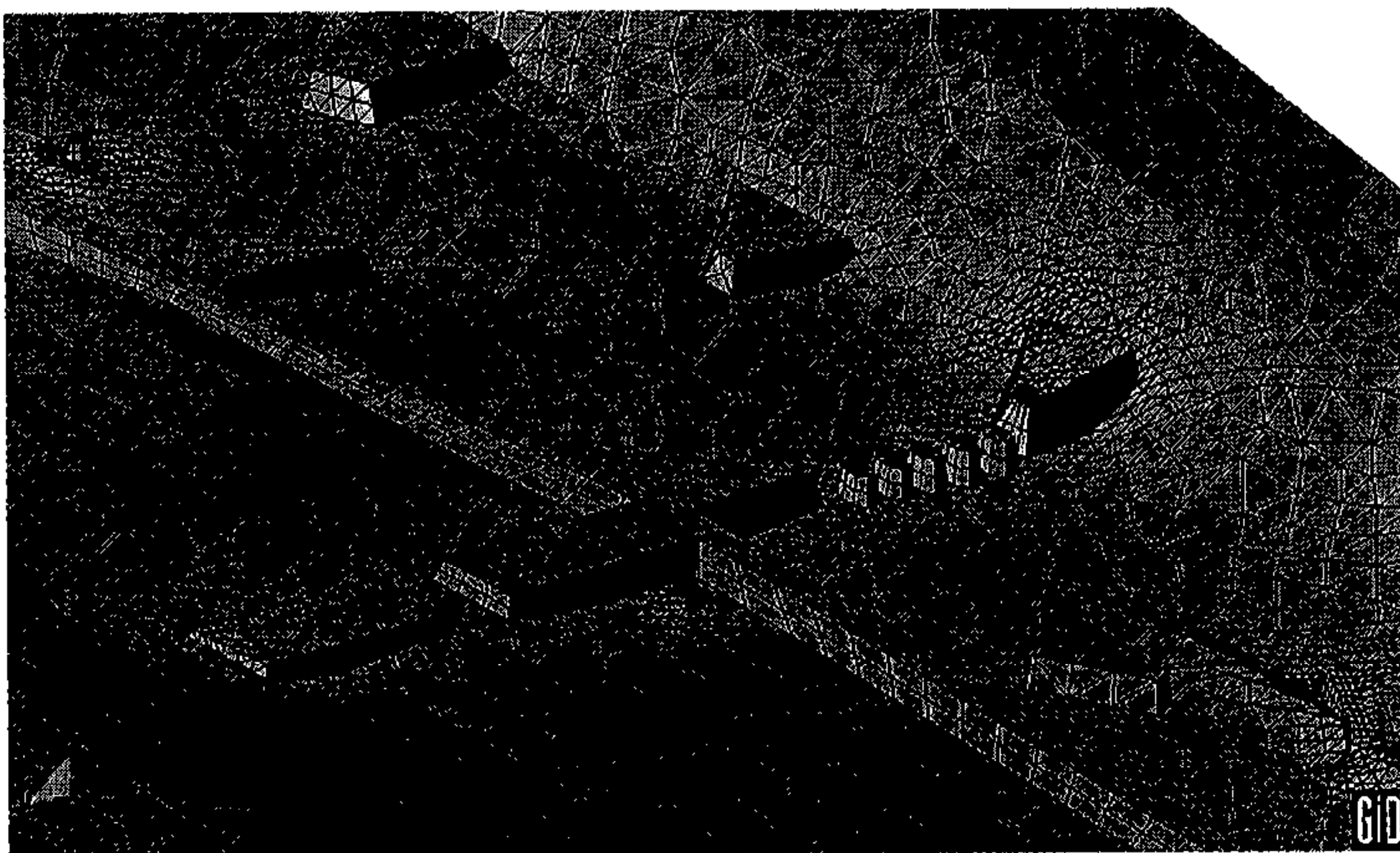


Figura 9.3. Detalle de la malla de cálculo del campo de slalom.

El estudio se realizó siguiendo la siguiente metodología:

- 1- Estudio de los niveles de agua, distribución de caudales y campos de velocidades con la geometría de proyecto. El cálculo indica que la escollera proyectada dentro del cauce tiene una gran repercusión en el campo de calados y velocidades, obteniéndose una gran irregularidad en la distribución en planta de dichas variables dentro del canal de slalom. Con esta geometría, la escollera longitudinal quedaba sumergida en prácticamente toda su longitud para el caudal de estudio de $33\text{m}^3/\text{s}$, de la misma manera que la mayor parte de las estructuras de escollera proyectadas dentro del canal. Por otro lado se vio que existía un flujo transversal por encima de la escollera longitudinal central del canal de slalom al canal de retorno, incluso con la hipótesis realizada en el cálculo de total impermeabilidad de la misma, de manera que en el extremo aguas abajo del canal de slalom el caudal circulaba mayoritariamente ($20.1\text{m}^3/\text{s}$) por el canal de retorno. De todo ello se deduce que el dique longitudinal era demasiado bajo.
- 2- Para determinar la cota de coronación del dique longitudinal, lo que se hizo fue recrearlo en gran medida, y hacer circular por el cauce $22\text{m}^3/\text{s}$. La geometría del extremo aguas arriba del dique desvía el caudal hacia el canal de slalom, por lo que con esta modificación los $22\text{m}^3/\text{s}$ pasaban todos por el lado izquierdo del dique central. De esta forma se determinó la cota de la lámina de agua en el canal de slalom para dicho caudal, y se propuso recrear el dique longitudinal precisamente hasta dicha cota.
- 3- Finalmente se realizó la última simulación para $33\text{m}^3/\text{s}$ con la modificación de geometría mencionada, para el estudio de niveles y campos de velocidades tanto en el canal de slalom como en el canal de retorno.

9.1.2. Resultados

Se presentan los resultados en campos de calados y velocidades de la situación definitiva. Se propuso una modificación de la cota de coronación de la escollera longitudinal central del cauce respecto la contemplada en el proyecto. Para asegurar la distribución de caudales deseada ($22\text{m}^3/\text{s}$ en el canal de slalom) se precisa que dicha cota sea superior a la de la lámina de agua, excepto en su extremo aguas arriba que se prevé que funcione como un vertedero de labio grueso que permita el paso de los $11\text{m}^3/\text{s}$ restantes hacia el canal de retorno. La condición de diseño fue de no aceptar vertido transversal entre el canal de slalom y el de retorno fuera de este tramo inicial.

Los resultados indican que las estructuras transversales de escollera provocan un cierto escalonado de la lámina de agua. Ello es así ya que los límites entre los citados tramos están formados por estrechamientos que producen la aceleración del flujo hacia aguas abajo y una sobre elevación de la lámina hacia aguas arriba, como se puede apreciar en la Figura 9.6. Un escalonado similar se produce en el canal de retorno, debido a las estructuras transversales.

La estimación de los campos de velocidades para $33\text{m}^3/\text{s}$ indica que las máximas velocidades se alcanzan en el Tramo 5 (más aguas abajo) con valores que superan los 2m/s y máximos de hasta 5.5m/s por el efecto local de la contracción que supone la entrada a dicho tramo. Todos los tramos aguas arriba presentan menores velocidades, con máximos alrededor de 1.6m/s , existiendo también zonas de recirculación y aguas casi muertas

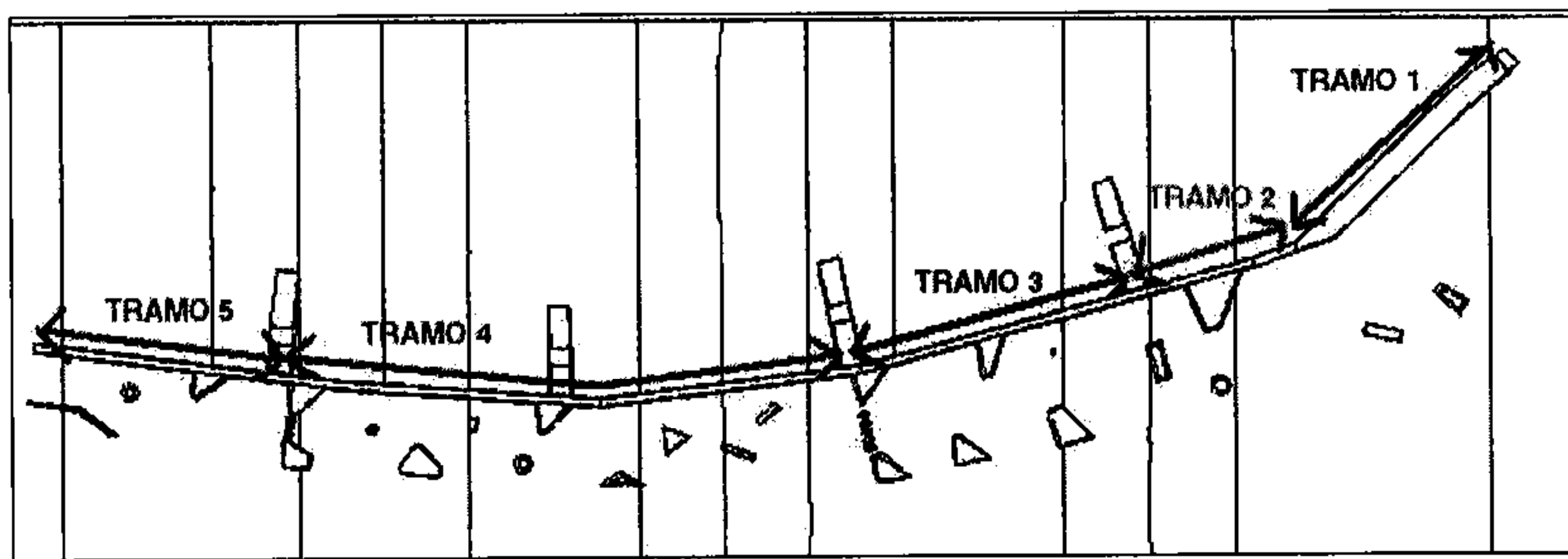


Figura 9.4. Definición de los distintos tramos con cota de coronación constante en la escollera longitudinal central. El tramo 1 funciona como vertedero.

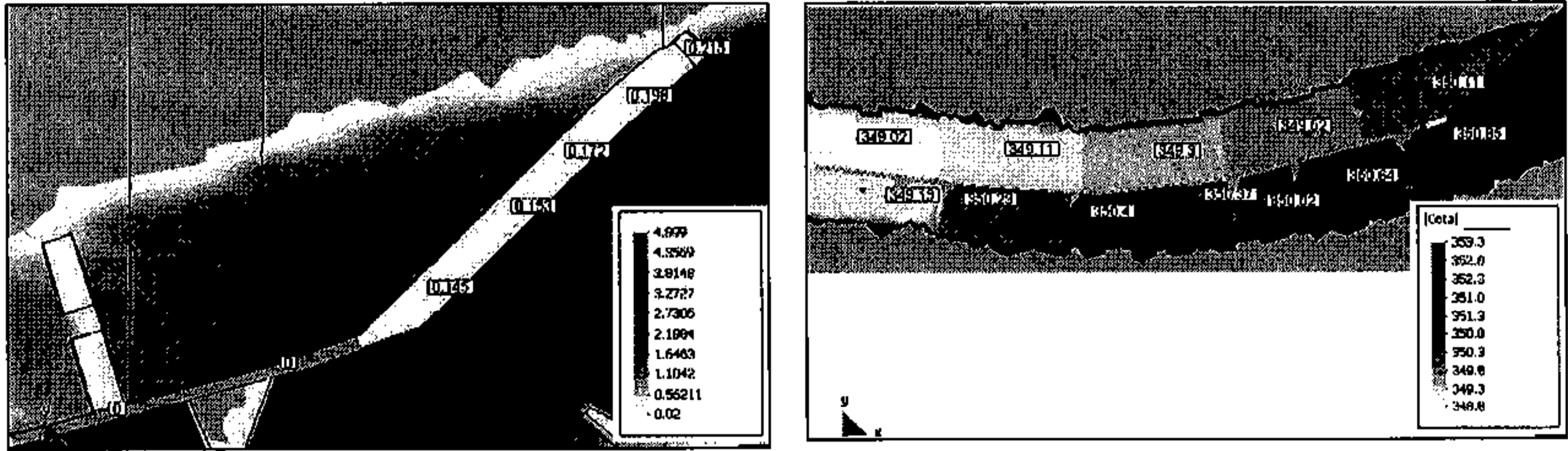


Figura 9.5. Calados sobre la escollera (izquierda) y cotas de la lámina de agua (derecha).

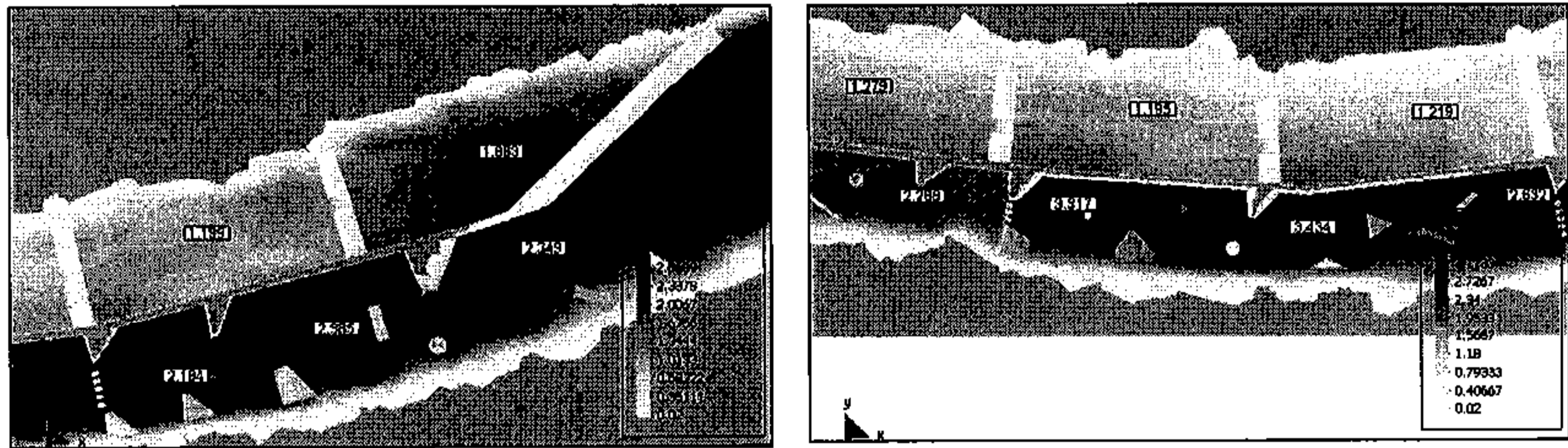


Figura 9.6. Calados en el canal de slalom con la geometría modificada.

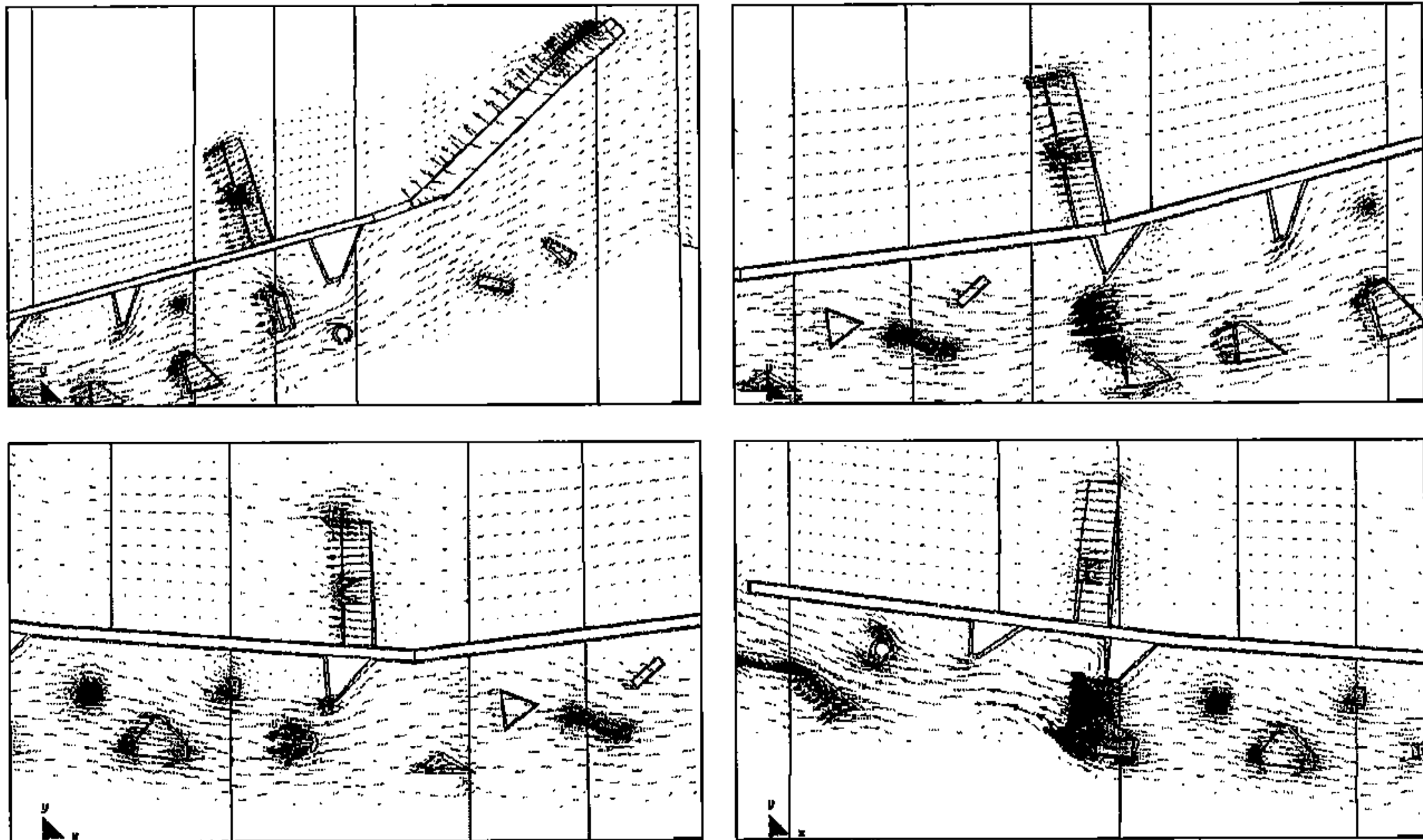


Figura 9.7. Campo de velocidades en distintas zonas del canal de slalom con la geometría modificada.

9.2. Rotura de balsa de riego en Montoliu

Se calcula la propagación producida por la posible rotura de una balsa de riego, para determinar el riesgo que el núcleo urbano de Montoliu sea alcanzado, así como los calados, velocidades, y velocidad de propagación de la inundación. La balsa de Montoliu tiene un volumen de agua de 245000 m^3 y una profundidad de 5 m . Está situada en un punto alto (Figura 9.8) y es de interés conocer el comportamiento de la inundación provocada por una posible rotura de la presa.

Para ello se ha realizado el cálculo numérico con el esquema WAF TVD, suponiendo la balsa llena en el instante inicial y que, de repente, se rompe una parte de la presa provocando una brecha de 45 m de ancho. La zona de estudio se ha discretizado con una malla no estructurada formada por 5041 cuadriláteros (Figura 9.9).

En la Figura 9.11 se presenta una secuencia de la mancha de inundación en distintos instantes de tiempo. Se puede observar como el calado en la presa va disminuyendo al transcurrir el tiempo, mientras la inundación se va propagando por el territorio. También se observa como el pueblo de Montoliu no es alcanzado por la inundación, que se desvía hacia el oeste del mismo.

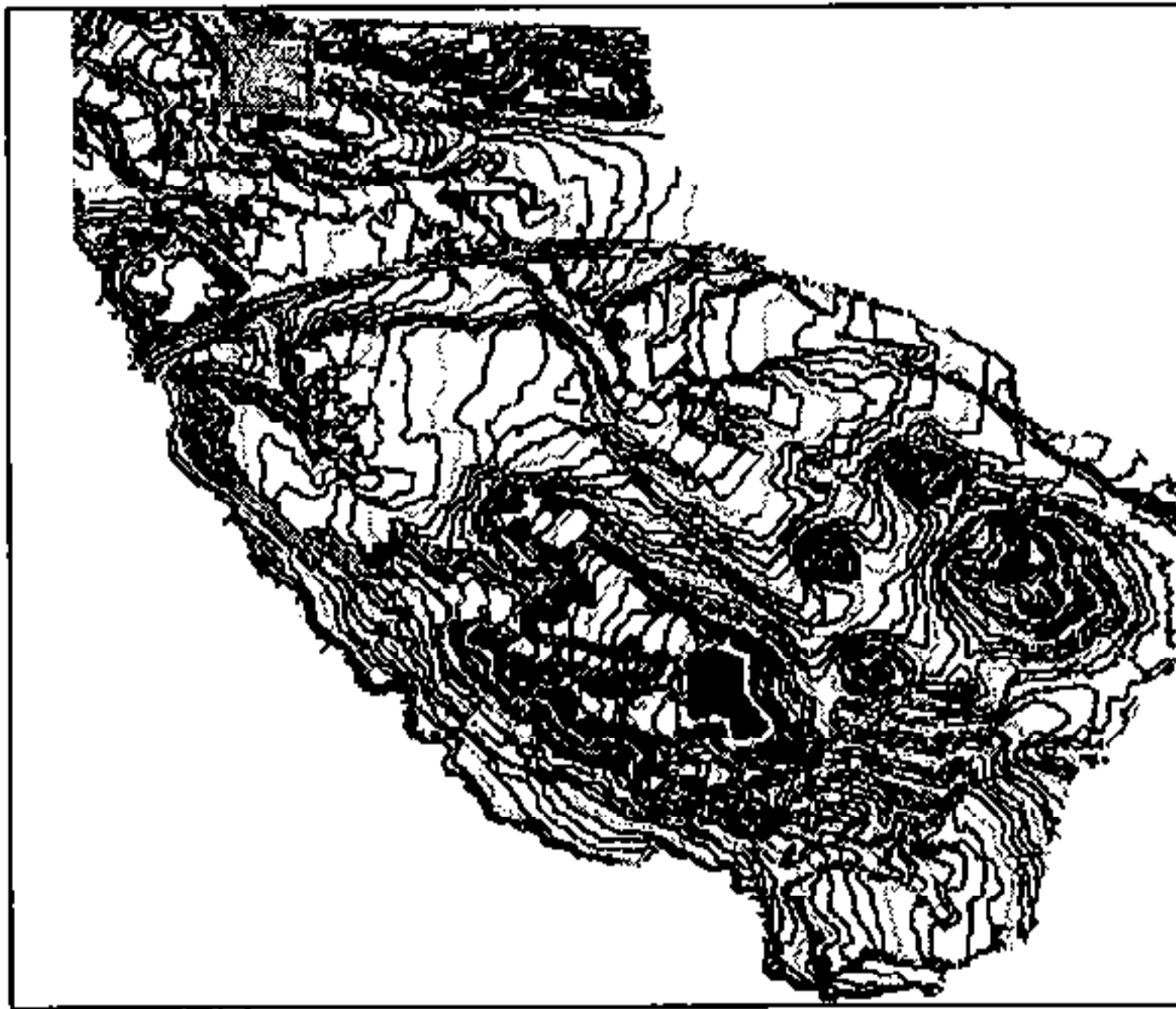


Figura 9.8. Topografía, Situación de la balsa y del pueblo de Montoliu

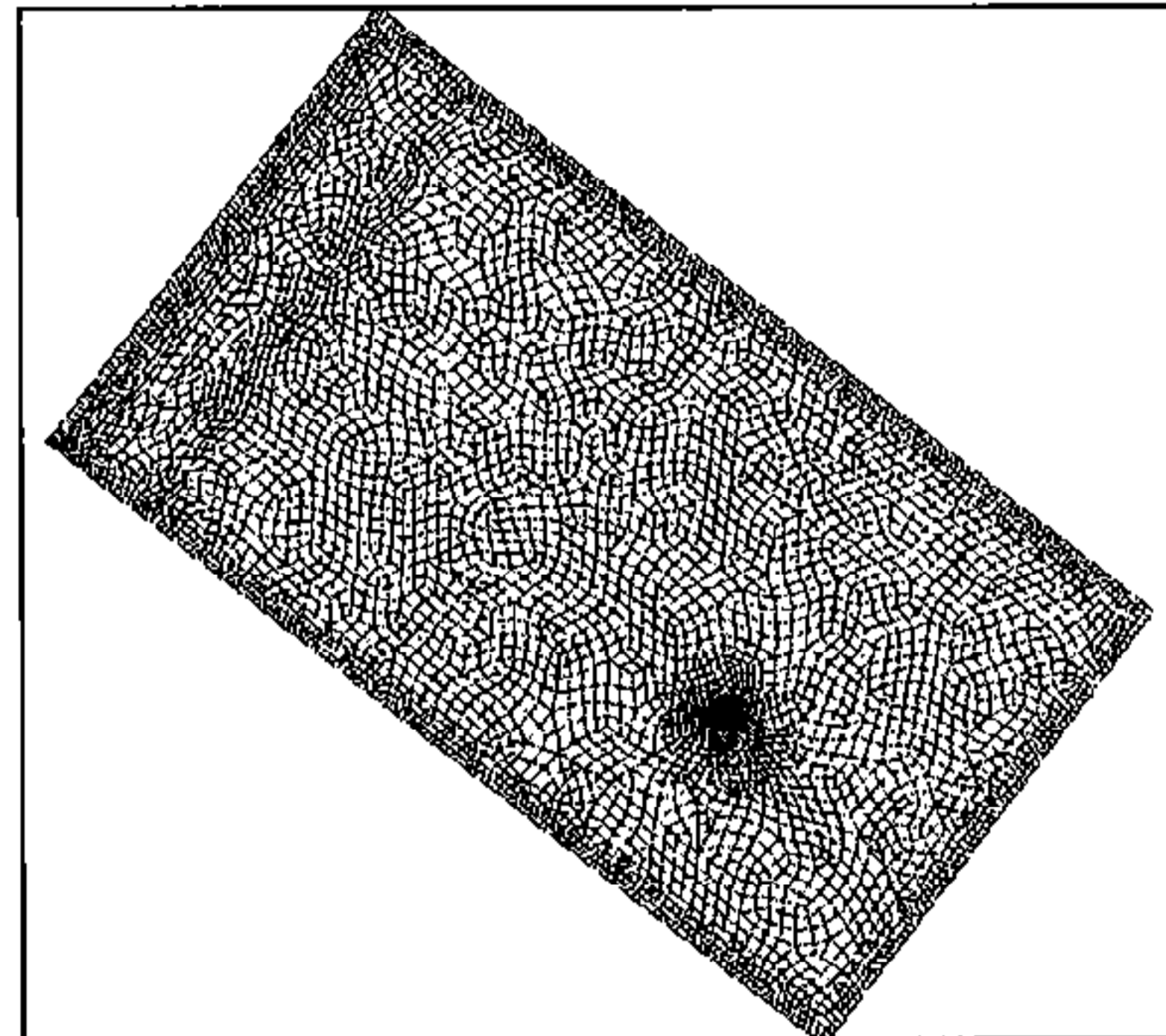


Figura 9.9. Malla utilizada en el cálculo

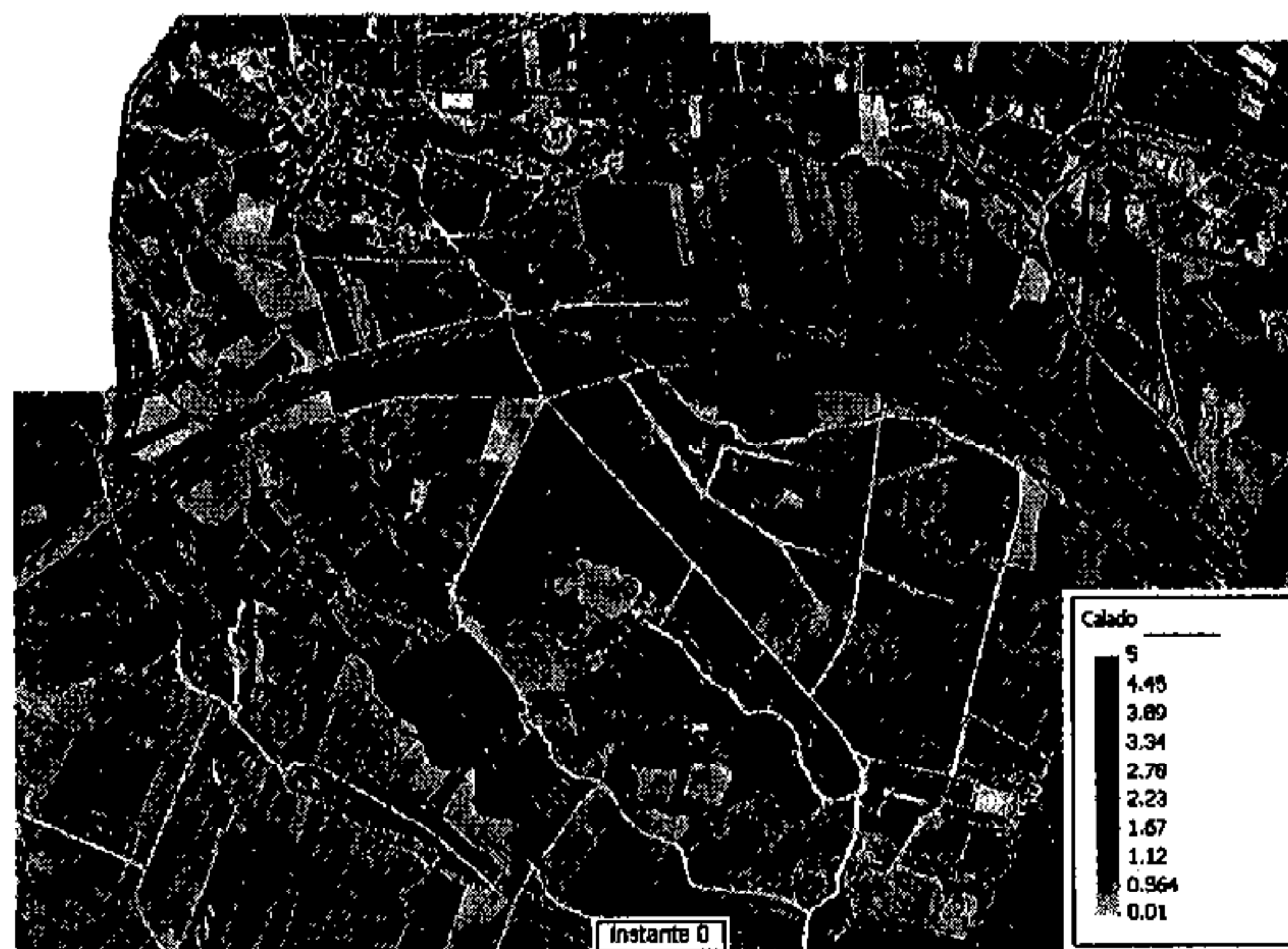


Figura 9.10. Fotografía aérea de la balsa de riego de Montoliu

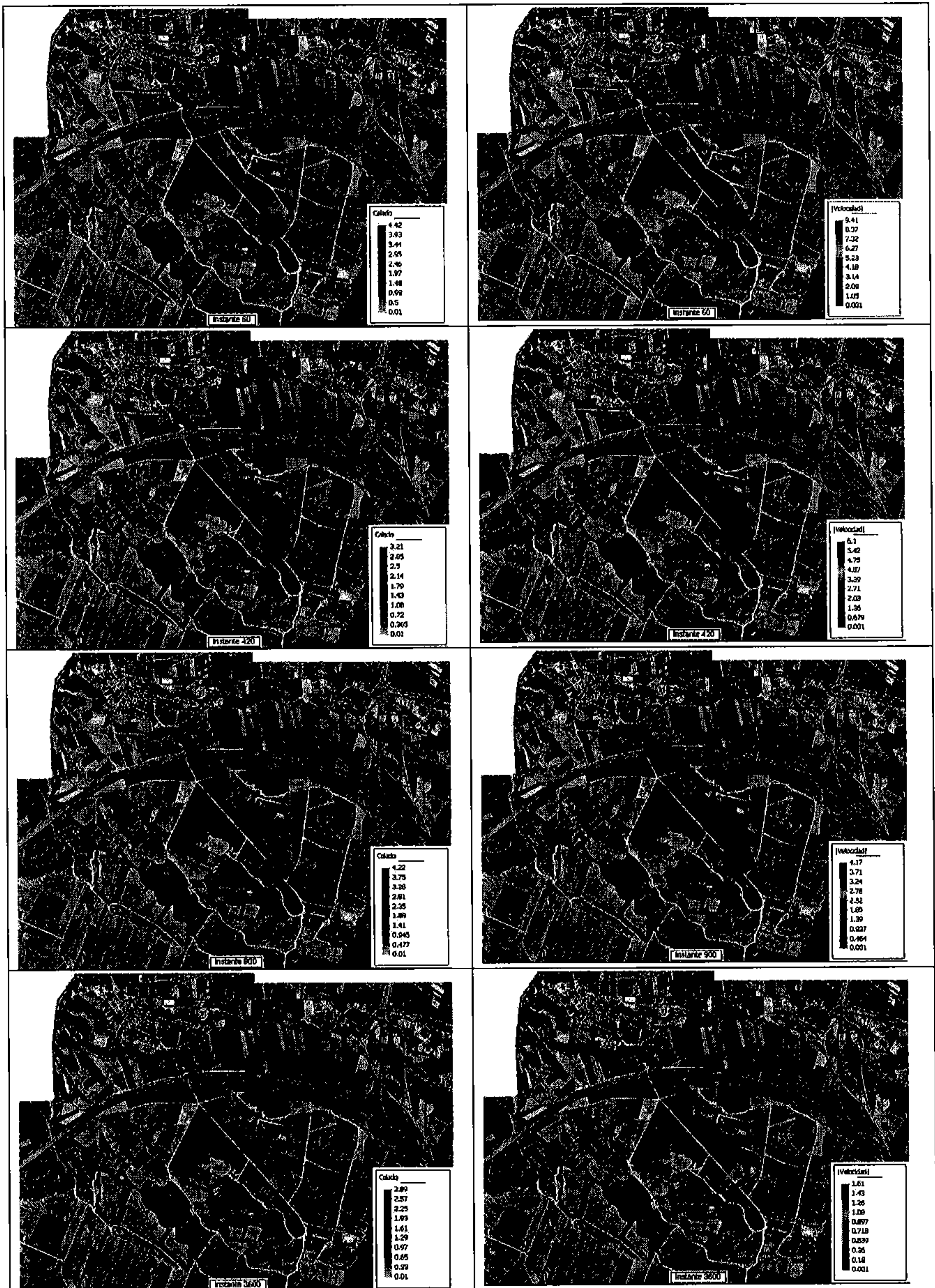


Figura 9.11. Calados (izquierda) y velocidad (derecha) en distintos instantes

9.3. Confluencia de los ríos Fluvià y Llerca

9.3.1. Introducción

En julio de 2004, en el contexto de la duplicación de la carretera N-260, tramo Argelaguer-Montagut, y a petición de la Demarcación de Carreteras del Estado en Catalunya, se realizó el estudio del comportamiento hidráulico de los ríos Llerca y Fluvià en el entorno de su confluencia (DEHMA 2004). Una parte del estudio consistió en la modelación numérica bidimensional del tramo de estudio, que incluye la confluencia de los dos ríos y una curva importante en el río Llerca.

El modelo numérico bidimensional comprende la siguiente zona (Figura 9.12 y Figura 9.13):

- Río Llerca desde 223 m aguas arriba del puente de la antigua N-260, hasta la confluencia con el río Fluvià (longitud total de 535 m).
- Río Fluvià desde 284 m aguas arriba de la confluencia con el Llerca, hasta un punto situado 964 m aguas abajo de la misma.

Para la determinación de los caudales de estudio, se han considerado los contemplados por la Agencia Catalana de l'Aigua en el documento *Delimitació de zones inundables per a la redacció de l'INUNCAT* de Junio de 2001, y que para el período de retorno de 500 años son $893.1 \text{ m}^3 / \text{s}$ en el río Llerca y $897.1 \text{ m}^3 / \text{s}$ en el río Fluvià.

En cuanto a la rugosidad, se ha considerado un coeficiente de rugosidad de Manning variable en función de la cobertura vegetal existente. Se ha utilizado un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.032 en el cauce y zonas con escasa cobertura vegetal, un valor de 0.065 para zonas con cobertura vegetal y de 0.090 para zonas con arbolado denso.

La modelación numérica precisa unas condiciones de contorno en los extremos del tramo de estudio. En el extremo aguas abajo se ha impuesto la cota de la lámina de agua, utilizando los valores que aparecen en el INUNCAT para distintos caudales. Estos valores fueron obtenidos en su día a partir del cálculo en régimen permanente gradualmente variado unidimensional del río Fluvià. En concreto, para el caudal de $1790.2 \text{ m}^3 / \text{s}$ (ríos Fluvià y Llerca en avenida) se ha impuesto una cota de lámina de agua de 179,0 m, mientras que para el caudal de $893.1 \text{ m}^3 / \text{s}$ (avenida sólo en el Llerca) la cota impuesta ha sido de 177.15 m.



Figura 9.12 Fotografía aérea del tramo de estudio antes de las actuaciones

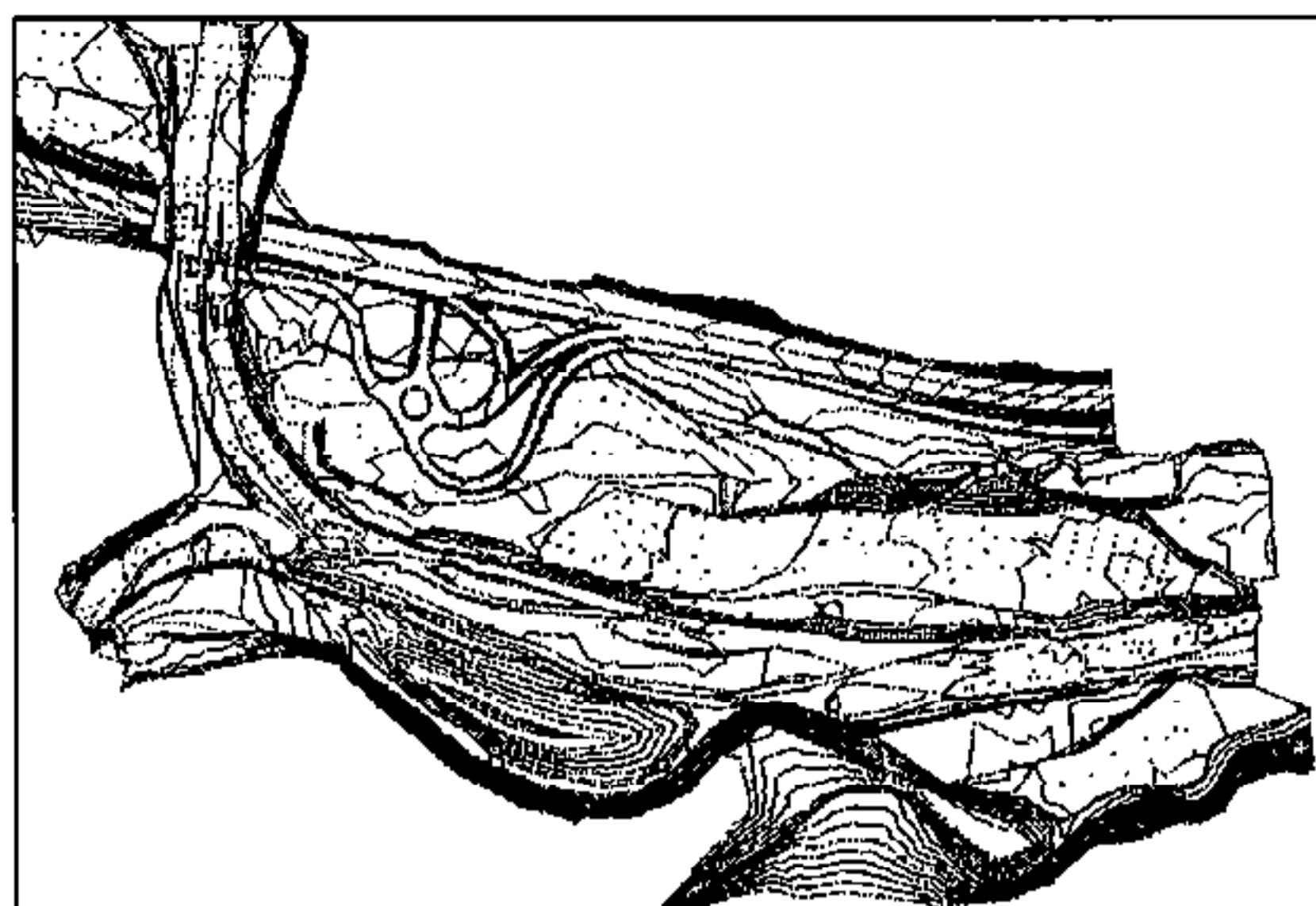


Figura 9.13 Topografía del tramo de estudio. Observese el trazado de la nueva carretera y el enlace.



Figura 9.14 Coeficiente de rugosidad utilizado en la modelación bidimensional: 0.032 (ocre), 0.065 (azul) y 0.090 (verde)

Se presentan los resultados siguientes:

1. Resultados en todo el tramo de estudio. Comparación de la lámina de agua y velocidades en todo el tramo con la hipótesis de avenida tanto por el Llierca como por el Fluvià, con la hipótesis de avenida sólo por el Llierca.
2. Resultados en el entorno de los puentes. Comparación de la lámina de agua y velocidades en el entorno de los puentes con la hipótesis de avenida tanto por el Llierca como por el Fluvià, con la hipótesis de avenida sólo por el Llierca
3. Modificación geométrica de la pila derecha del puente antiguo. Efecto sobre la lámina de agua y campos de velocidades de una posible modificación de la geometría de la pila.

9.3.2. Resultados en todo el tramo de estudio.

Como era de esperar, la hipótesis de cálculo de avenida en ambos ríos es la que produce mayores cotas de lámina de agua.

Los resultados de la modelación con avenida tanto por el río Llierca como por el Fluvià muestran que el régimen hidráulico es subcrítico prácticamente en todo el tramo de estudio. Lejos de la influencia de los puentes, tan sólo existe un punto donde el flujo es crítico, que es justo en el escalón existente en el río Llierca, inmediatamente aguas arriba de la confluencia. Este escalón está producido por un afloramiento rocoso que atraviesa todo el cauce, claramente visible en la fotografía aérea (Figura 9.12). Justo aguas abajo del puente antiguo, existe un corto tramo donde se produce régimen rápido.

En el caso de que la avenida se produzca exclusivamente por el río Llierca el funcionamiento hidráulico del tramo de estudio es distinto aguas abajo de los puentes. Los resultados de esta modelación indican niveles de agua inferiores en todo el tramo aguas abajo de los puentes, velocidades igualmente inferiores en el río Fluvià, pero velocidades superiores en el río Llierca aguas abajo de los puentes. Ahora el flujo hidráulico en el río Llierca entre los puentes y la confluencia es muy próximo al régimen crítico, con zonas ligeramente subcríticas y otras ligeramente supercríticas.

Los resultados en cota de lámina de agua se presentan en la Figura 9.15 y la Figura 9.16, en calados en la Figura 9.17 y Figura 9.18, y los resultados de velocidades en la Figura 9.19 y Figura 9.20.

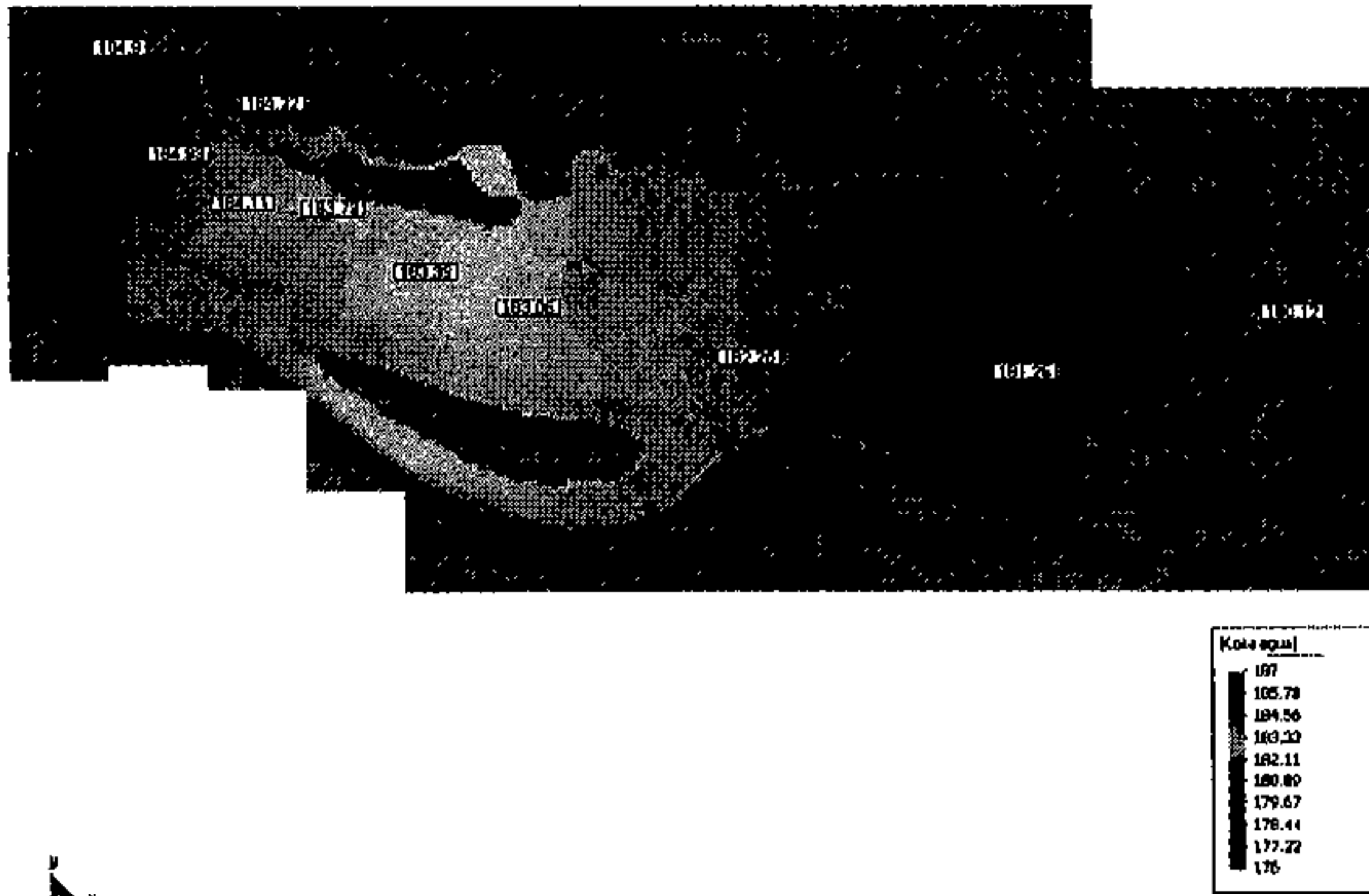


Figura 9.15 Cota de la lámina de agua con el Fluvià y el Llerca en avenida



Figura 9.16 Cota de la lámina de agua con avenida únicamente en el Llerca



Figura 9.17 Calados con el Fluvià y el Llerca en avenida



Figura 9.18 Calados con avenida únicamente en el Llerca

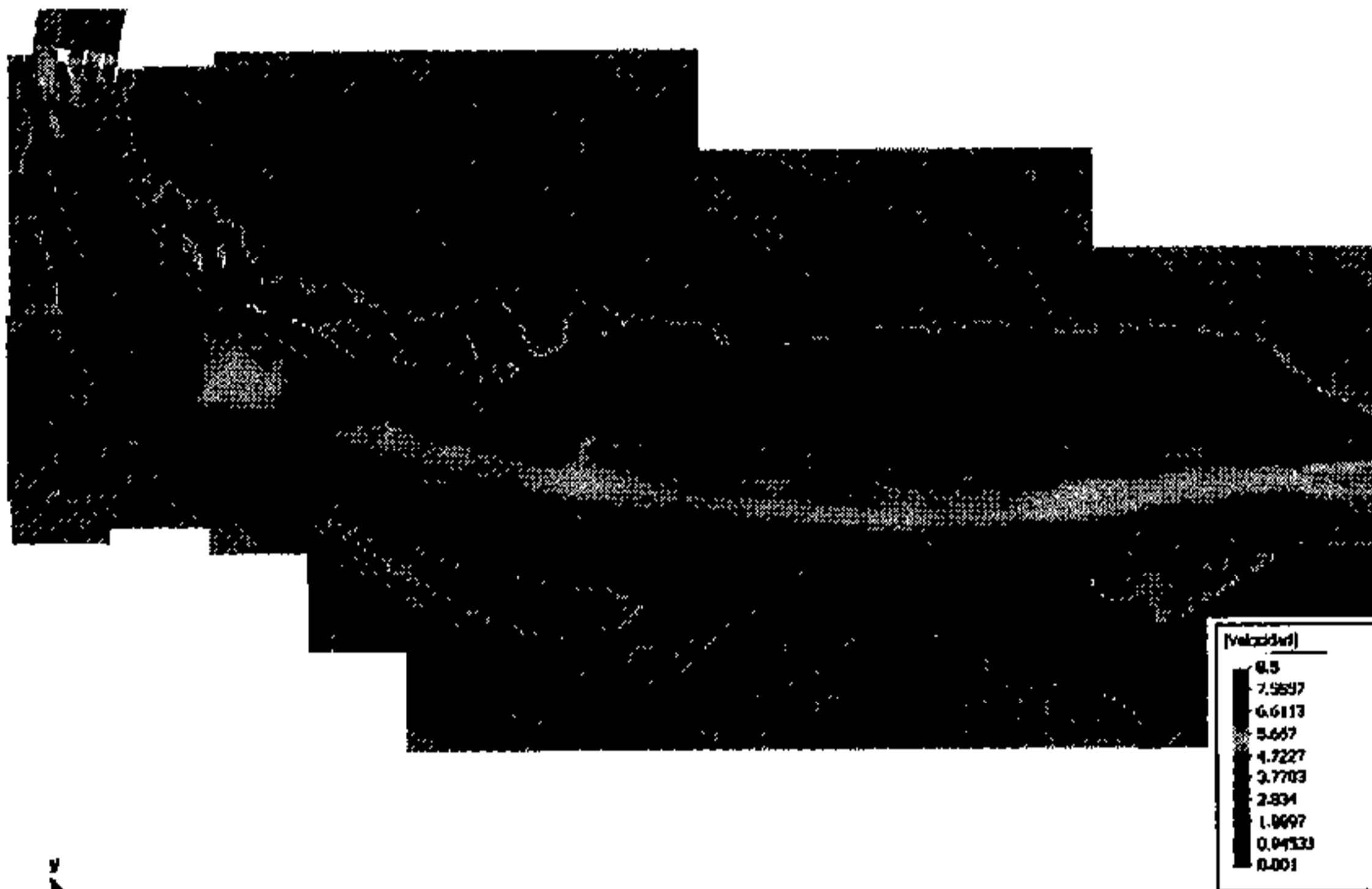


Figura 9.19 Velocidad con el Fluvià y el Llerca en avenida



Figura 9.20 Velocidad con avenida únicamente en el Llerca

9.3.3. Resultados en el entorno de los puentes

El estudio de detalle del funcionamiento hidráulico del río Llerca en el entorno de los puentes indica que aguas arriba de los mismos la influencia de los niveles de avenida en el río Fluvià es nula, pero no lo es aguas abajo. En la Figura 21 se aprecia la geometría del cauce en este entorno, con la disposición de las pilas de los puentes. El puente antiguo representa una sección de control. Esto provoca que el flujo aguas arriba de dicho puente está desacoplado del flujo aguas abajo, tanto para la situación de Fluvià en avenida como para Fluvià bajo. Así, los valores de la cota de la lámina de agua y los campos de velocidad aguas arriba del puente antiguo coinciden en ambas hipótesis de cálculo. En ambos casos, debajo del puente se produce un régimen crítico. Aguas abajo del mismo existe un corto tramo en régimen rápido, y a continuación un resalto hidráulico para volver a pasar a régimen lento. Este patrón se repite en las dos hipótesis de cálculo, aunque si no existe avenida en el Fluvià y debido a los menores calados aguas abajo del puente, el tramo en rápido se prolonga algunos metros más.

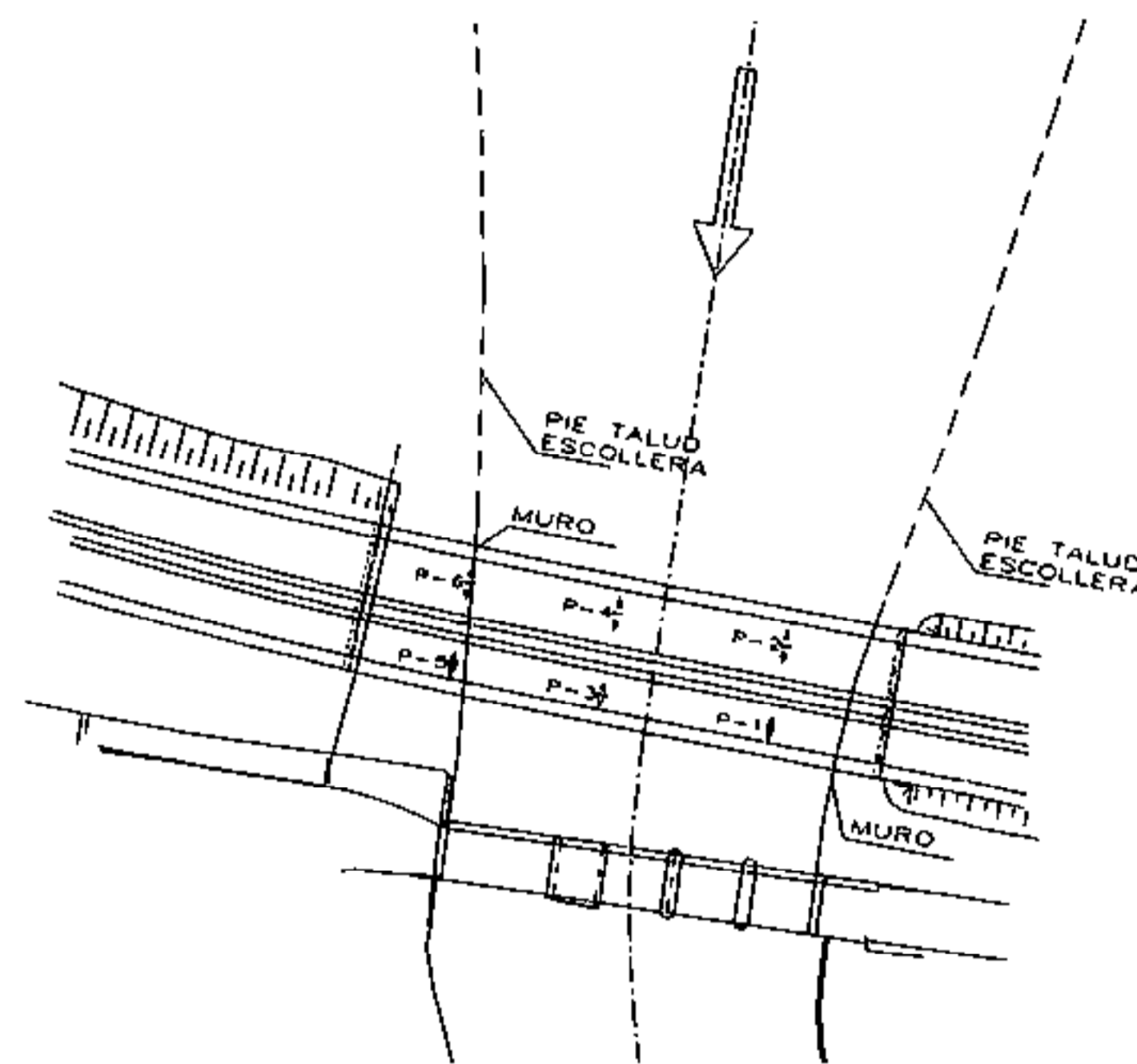


Figura 21 Geometría del cauce en el entorno de los puentes y aguas arriba

Los resultados en cota de lámina de agua se presentan en la Figura 9.22. En la Figura 9.23 se presentan los resultados en velocidades. Se aprecia la influencia de la pila derecha del puente antiguo en el campo de velocidades, que crea zona de aguas muertas (velocidades muy pequeñas) aguas abajo de la misma. En la Figura 9.24 se representa el número de Froude en las zonas en las que existe régimen lento (número de Froude menor que la unidad). Las áreas negras indican zonas con número de Froude mayor que uno. Queda patente que en ambas hipótesis el puente antiguo funciona como sección de control (paso de régimen lento a rápido).

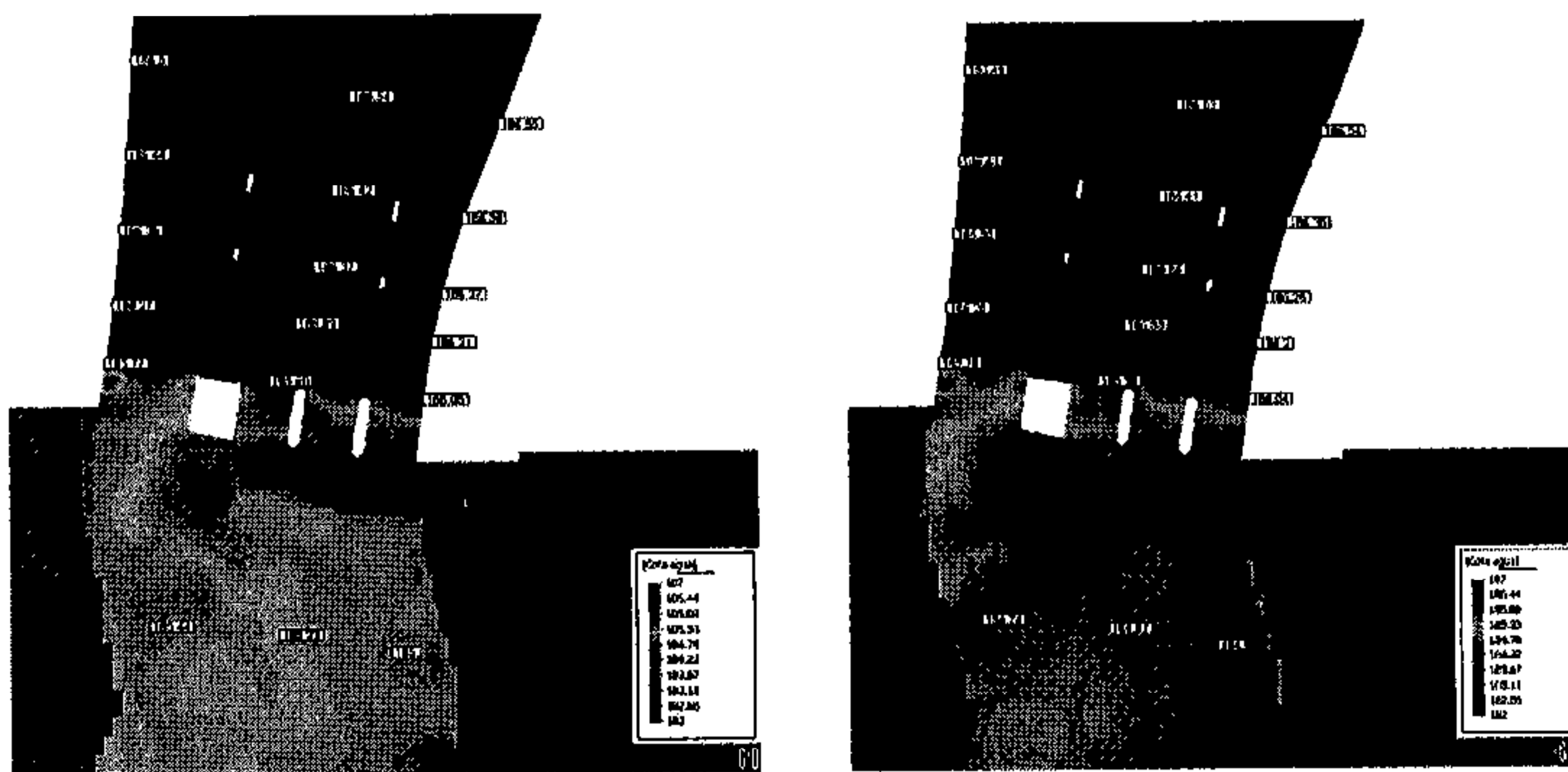


Figura 9.22 Cota de la lámina de agua en la zona de los puentes con el Fluvià en avenida (izquierda) y con el Fluvià bajo (derecha)

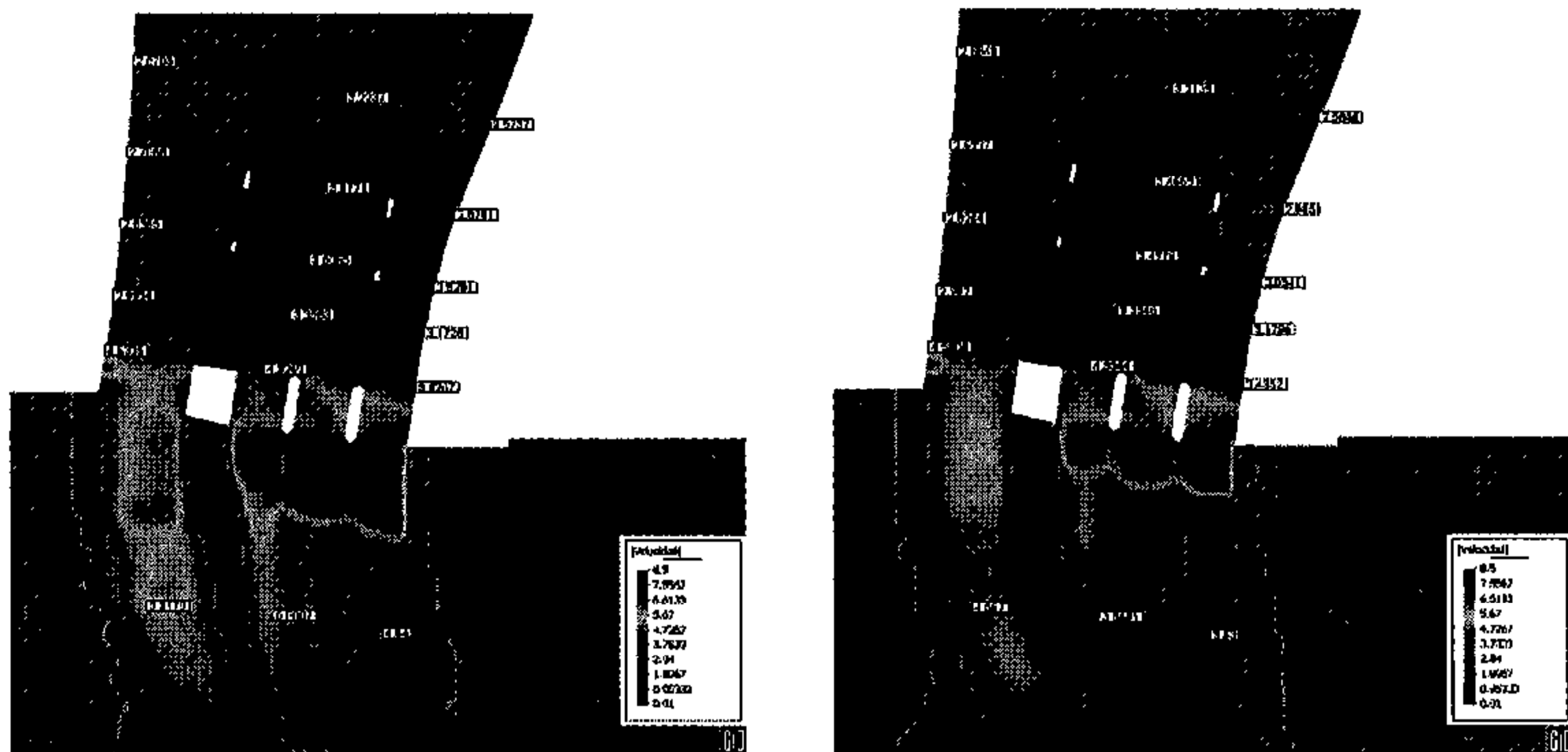


Figura 9.23 Velocidad en la zona de los puentes con el Fluvià en avenida (izquierda) y con el Fluvià bajo (derecha)

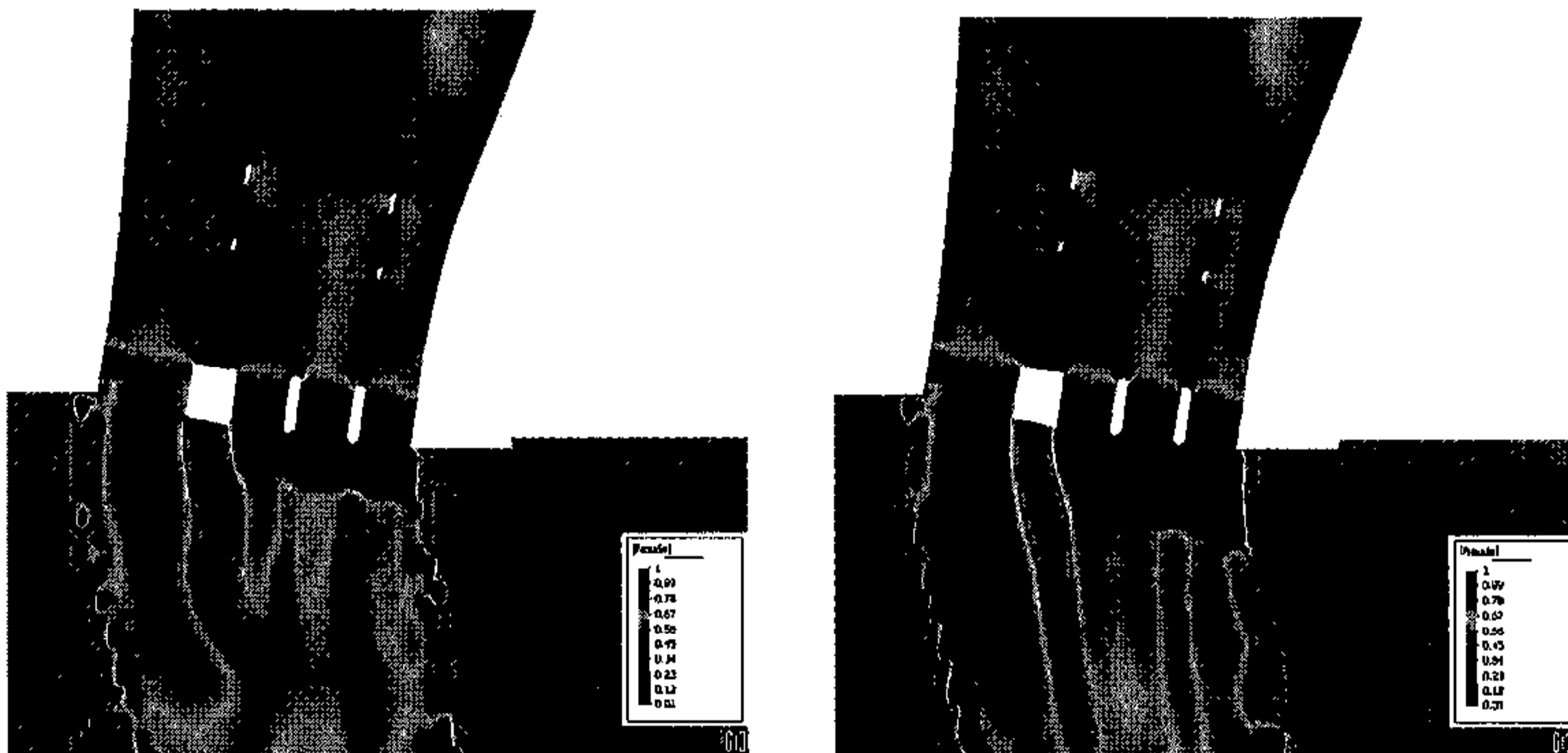


Figura 9.24 Número de Froude en la zona de los puentes con el Fluvià en avenida (izquierda) y con el Fluvià bajo (derecha). En negro se indica el régimen rápido (número de Froude mayor que 1)

9.3.4. Modificación geométrica de la pila derecha del puente antiguo.

La pila derecha del puente antiguo, con sus casi 10 m de ancho, presenta un importante obstáculo al flujo que queda reflejado en el campo de velocidades, como se ha visto en el apartado anterior. Con el objetivo de minimizar su influencia, se pensó en estudiar el efecto de carenar la pila. En este apartado, se presentan los resultados de la simulación para la pila representada en la Figura 9.25: carenado aguas arriba de la pila mediante un semicírculo, y carenado aguas abajo mediante un perfil de Joukovsky de 10.5 m de largo.

En la Figura 9.26, Figura 9.27 se presentan respectivamente los resultados de la comparación en las cotas de agua, velocidad para la situación con la pila original y la pila carenada. Aunque sí se aprecia una variación en el campo de velocidades, con una disminución del área de aguas muertas aguas abajo de la pila, ello tiene una mínima repercusión en la lámina de agua. También se aprecia una ligera uniformización del flujo a lo ancho del puente con el carenado, aunque dichas diferencias tampoco tienen repercusión significativa en los niveles aguas arriba.

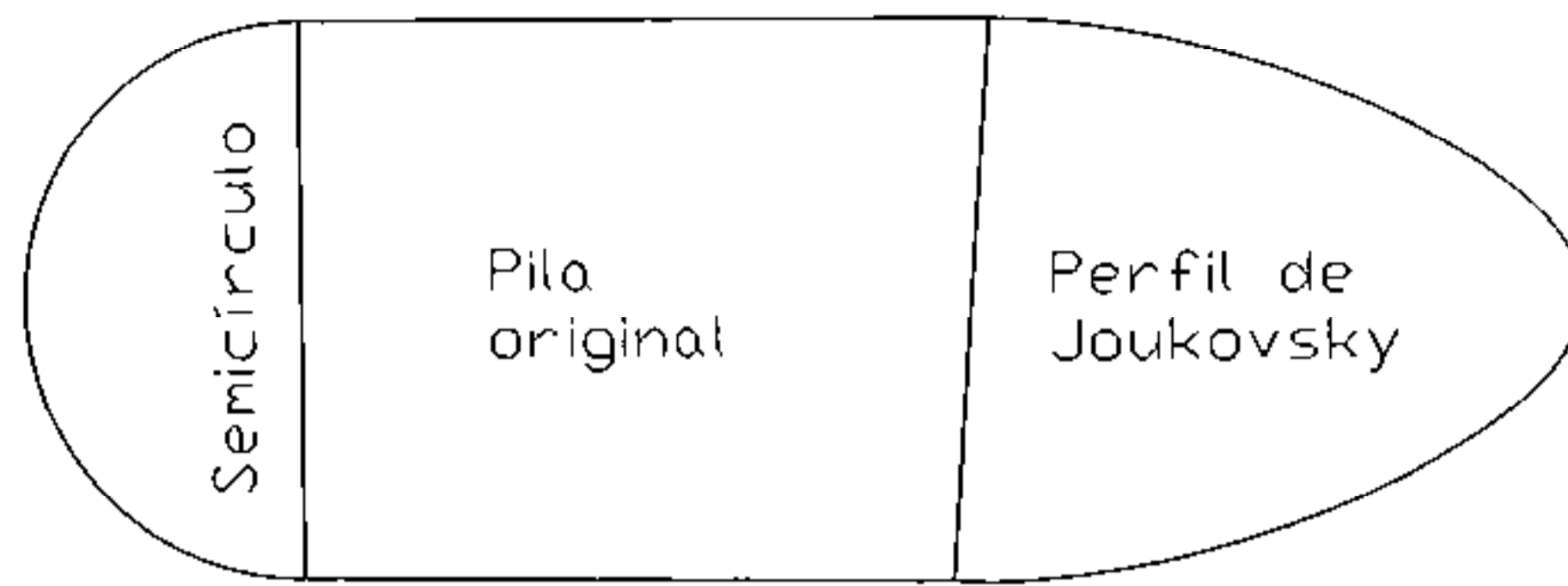


Figura 9.25 Modificación de la geometría de la pila del puente antiguo

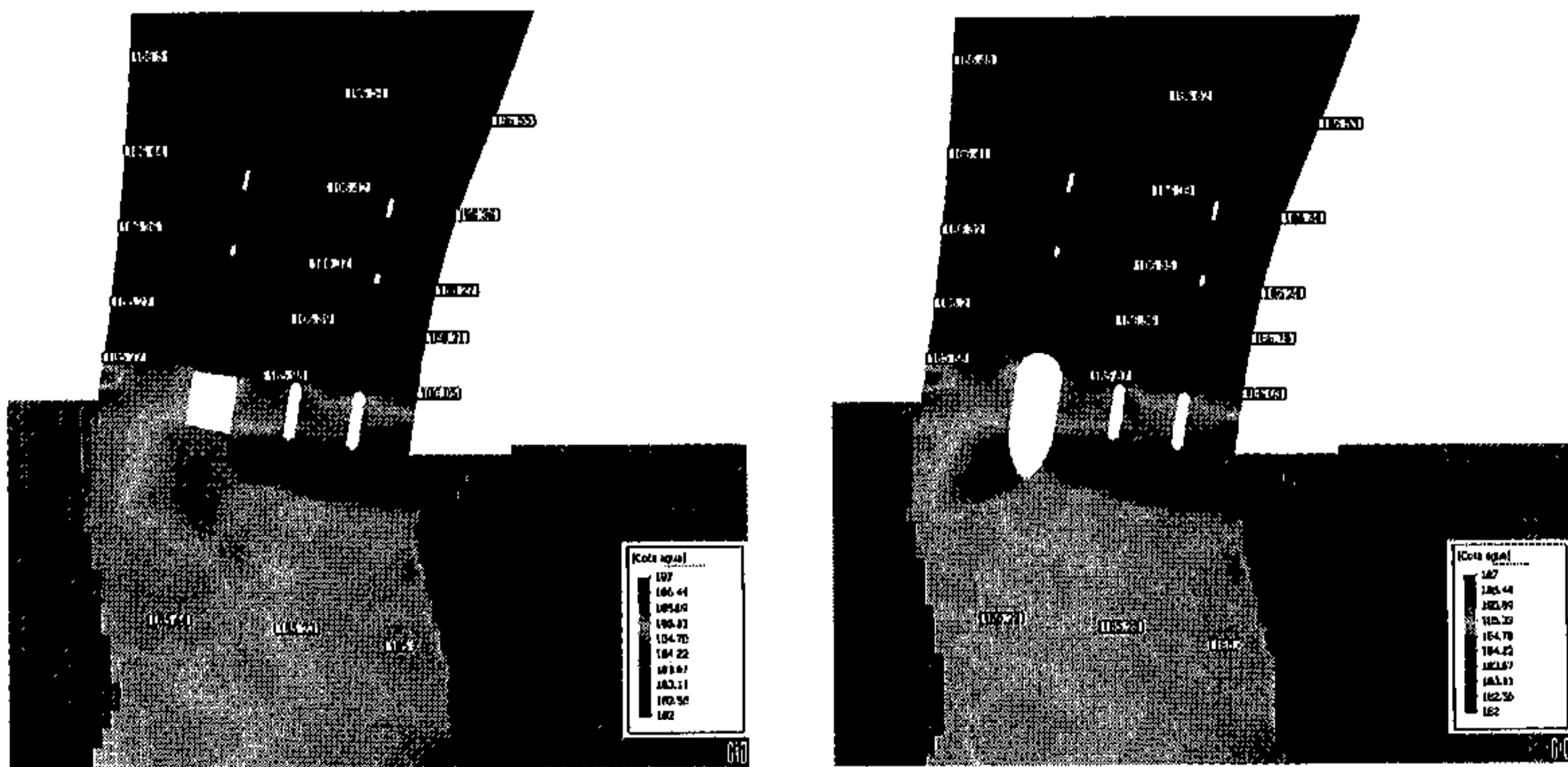


Figura 9.26 Efecto del carenado de la pila en la cota de la lámina de agua

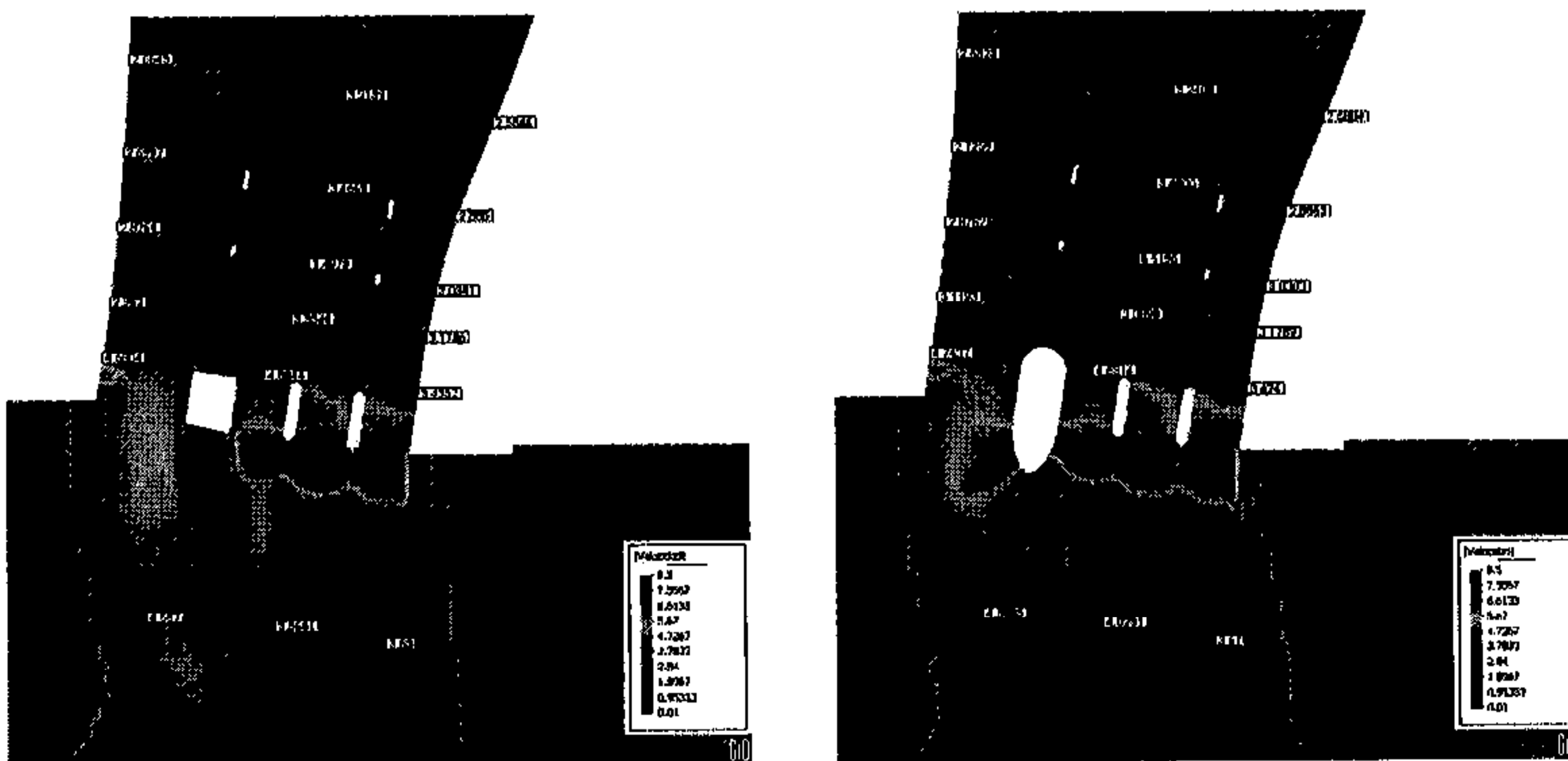


Figura 9.27 Efecto del carenado de la pila en el campo de velocidades

9.4. Ramflood. Sistema de ayuda a la toma de decisiones para determinación y gestión del riesgo de inundación

RAMFLOOD, (*Decision Support System For Risk Assessment and Management of Floods*) es un proyecto de investigación subvencionado por el 5º Programa Marco de la Unión Europea (proyecto número IST-2001-37581). El objetivo principal de RAMFLOOD es desarrollar y verificar un nuevo sistema de soporte para la toma de decisiones (DSS, *Decision Support System*) para la determinación del riesgo y la gestión de emergencias debidas a grandes inundaciones. El proyecto combina datos medioambientales y geofísicos provenientes de observación remota, sensores in-situ e información georeferenciada con métodos de simulación numérica avanzados y de visualización gráfica para contribuir a la determinación de riesgo y daños, la prevención de las inundaciones y el diseño de acciones de respuesta efectivas maximizando la seguridad de infraestructuras y vidas humanas.

El programa CARPA se utiliza en el proyecto RAMFLOOD como herramienta para la simulación de propagación de avenidas. El proyecto contempla dos escenarios para su validación:

- zona urbana en la ladera del Monte Pantelikon en la región de Attica (Grecia)
- tramo final del río Llobregat en la comarca del Baix Llobregat.

9.4.1. Attica. Propagación de avenida en zona urbana

La zona escogida en la región de Attica comprende una superficie aproximada de 3.3 km^2 alrededor de un torrente con una pendiente media del 2.3%. El propio cauce del torrente está sin encauzar o acondicionar, pero está rodeado por zona urbana, con gran densidad de edificación sobretodo en su margen derecha (Figura 9.28).

Para la modelación bidimensional del área se importó la geometría a partir de archivos DTM en formato ASCII de Arc/Info a la interface de GiD. Las manzanas constituidas por grandes edificios se eliminaron de la malla de cálculo no estructurada, formada por 20189 cuadriláteros (Figura 9.30).

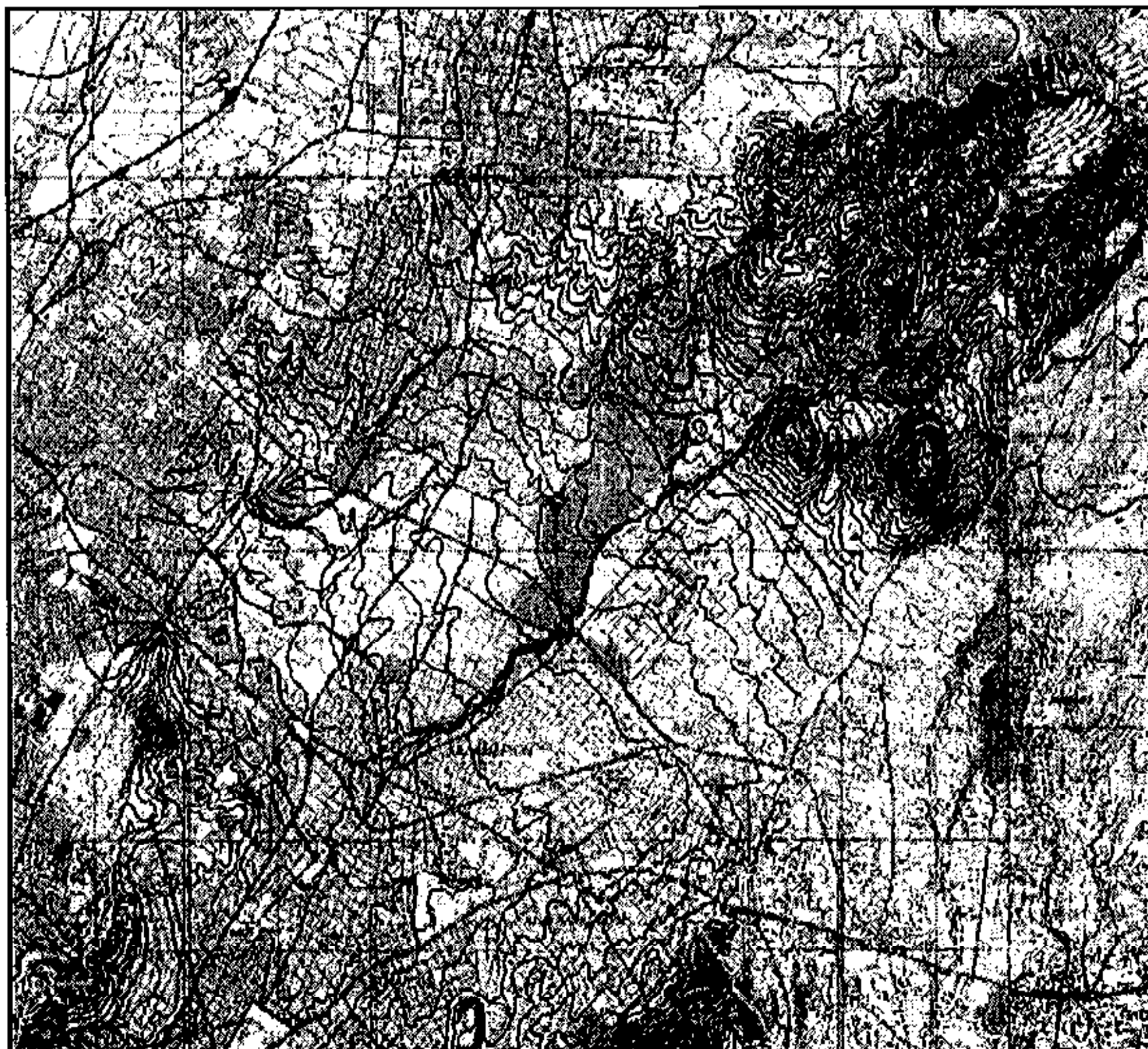


Figura 9.28 Falda del Monte Pantelikon en la región de Attica

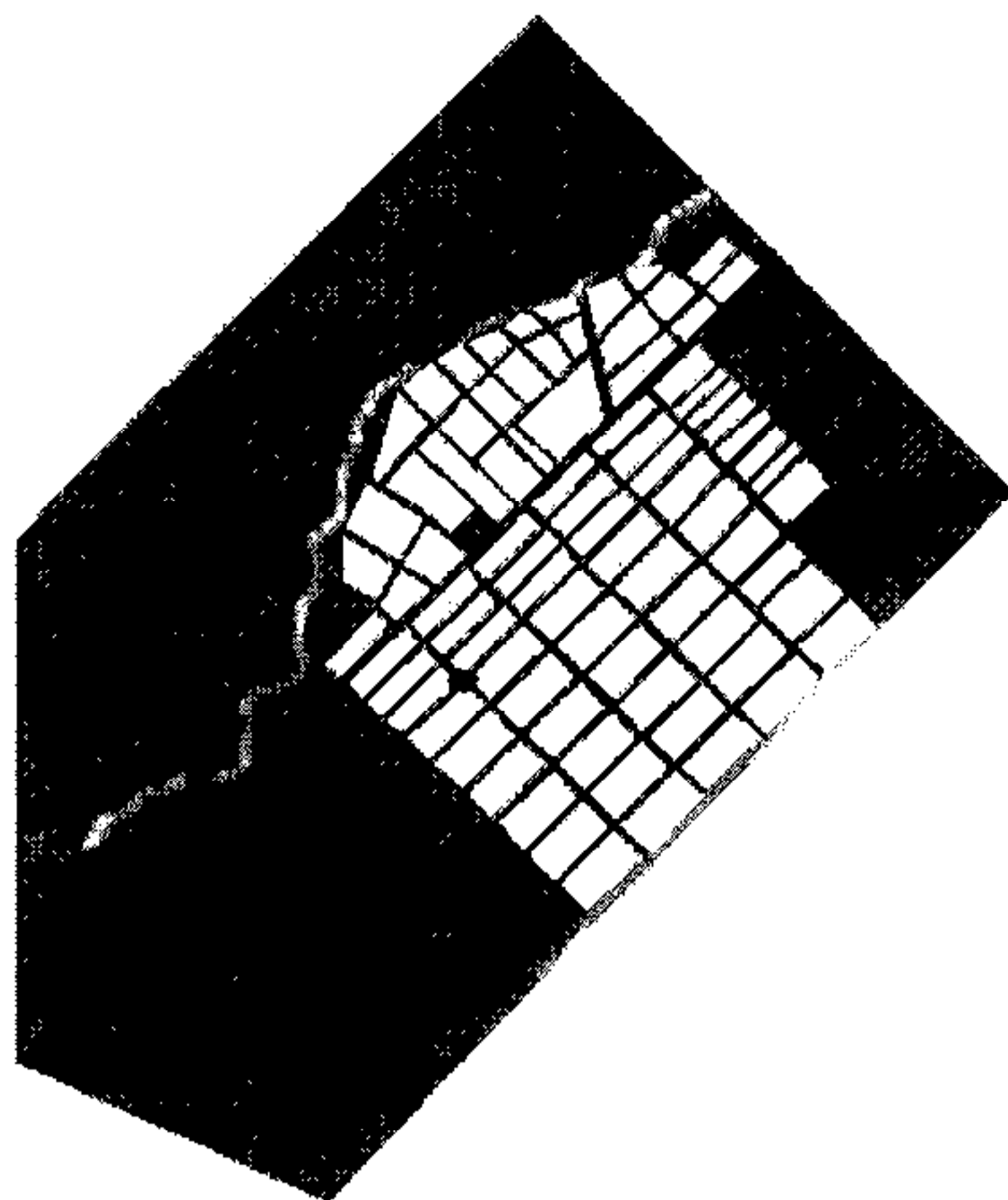


Figura 9.29 Resultado de la importación en GiD de la geometría de a zona urbana de la falda del Monte Pantelikon

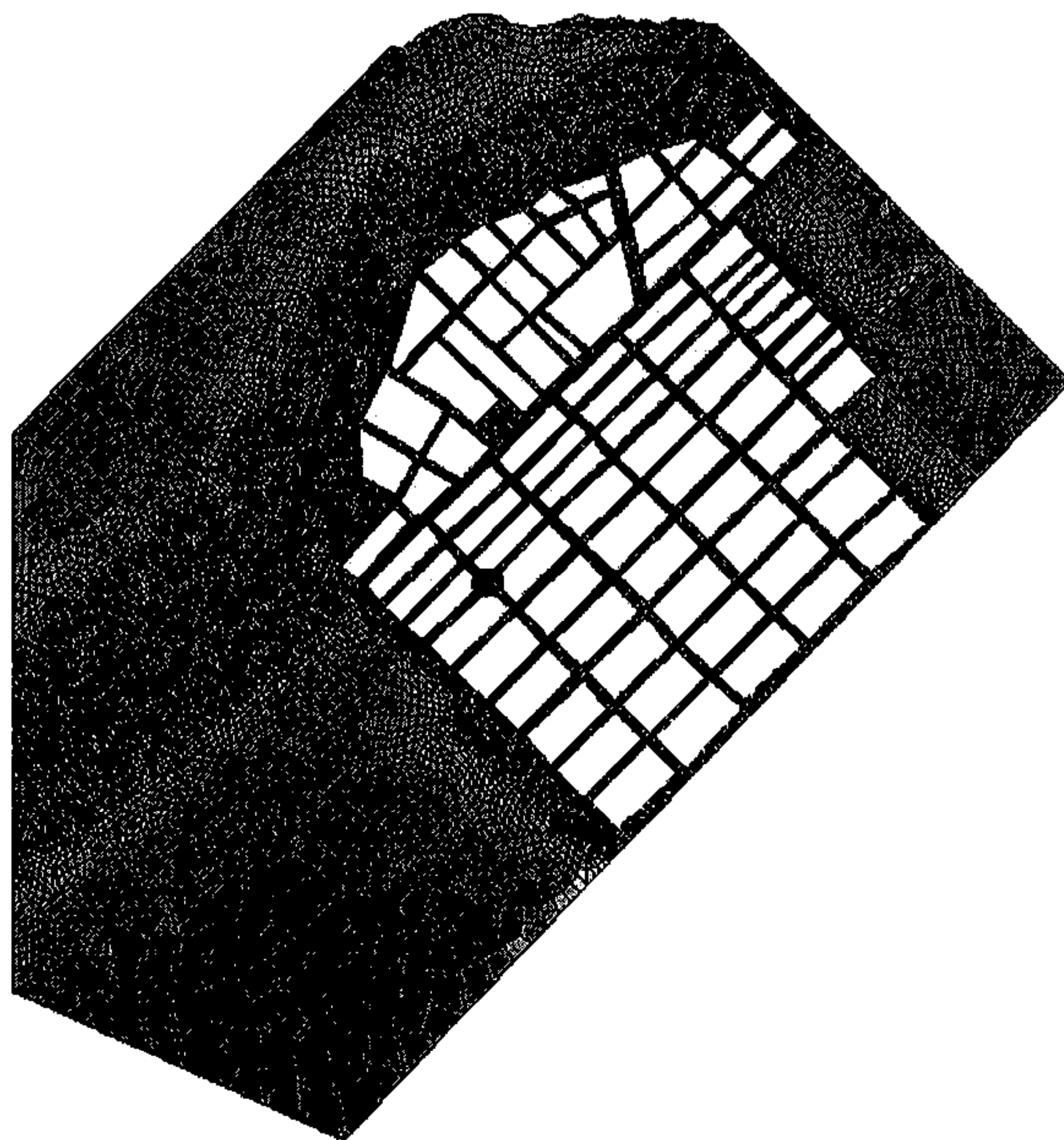


Figura 9.30 Malla de cálculo de a zona urbana de la falda del Monte Pantelikon

La rugosidad se asignó automáticamente a cada elemento de la malla a partir de información clasificada obtenida a partir de imágenes de satélite (Figura 9.31).

Dentro del proyecto RAMFLOOD se contempla entrenar una red neuronal a partir de los resultados de simulaciones numéricas, para lo que se debe calcular la propagación de más de 200 hidrogramas de avenida por la zona mencionada. En este apartado se muestran los resultados de una propagación con un hidrograma de entrada triangular, con tiempo base de $2h$ y caudal punta de $1000\text{ m}^3/s$ en el instante $t = 1h$ (Figura 9.32).

Se presentan los resultados en calados y velocidades para distintos instantes de tiempo

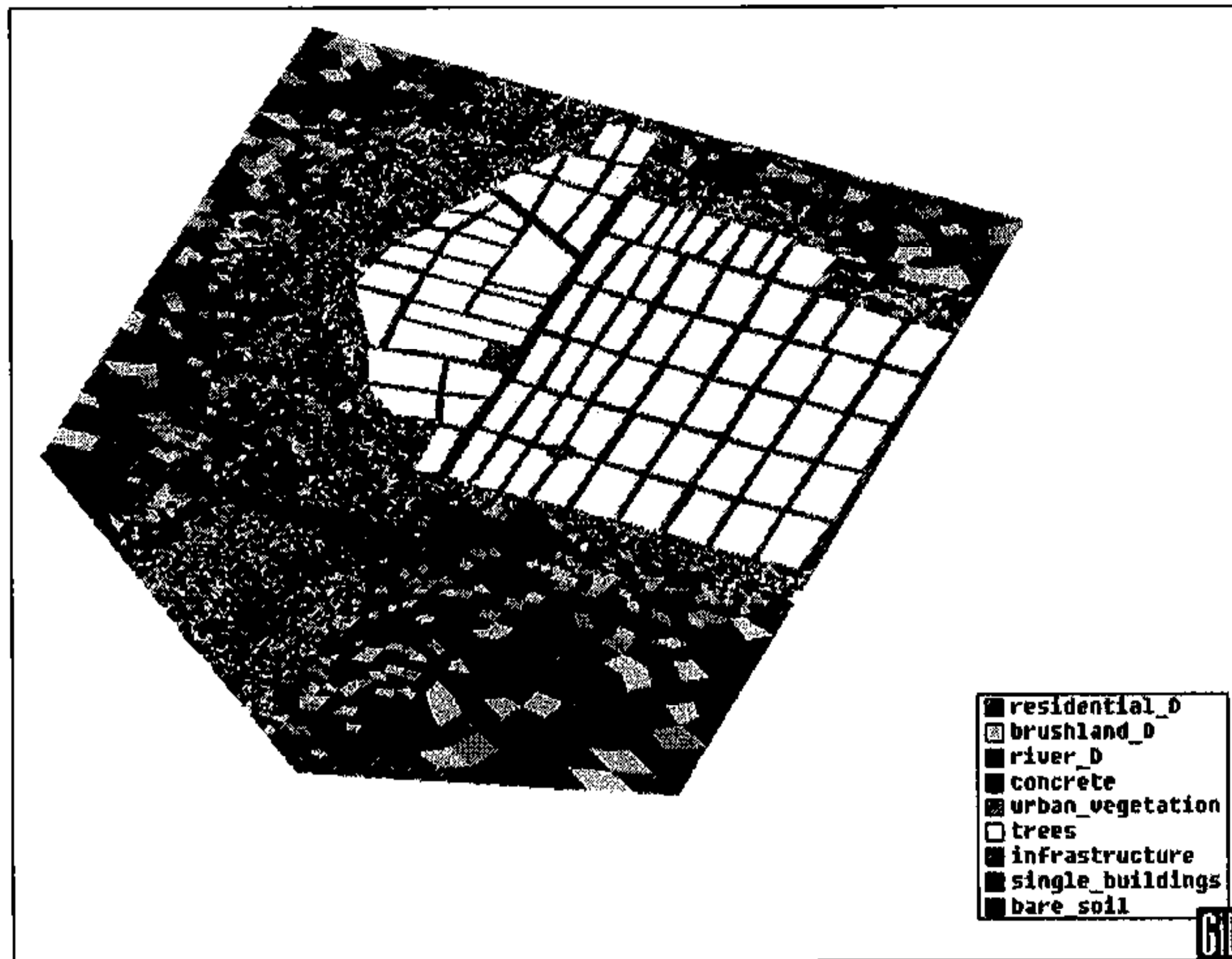


Figura 9.31 Usos del suelo procedentes de percepción remota

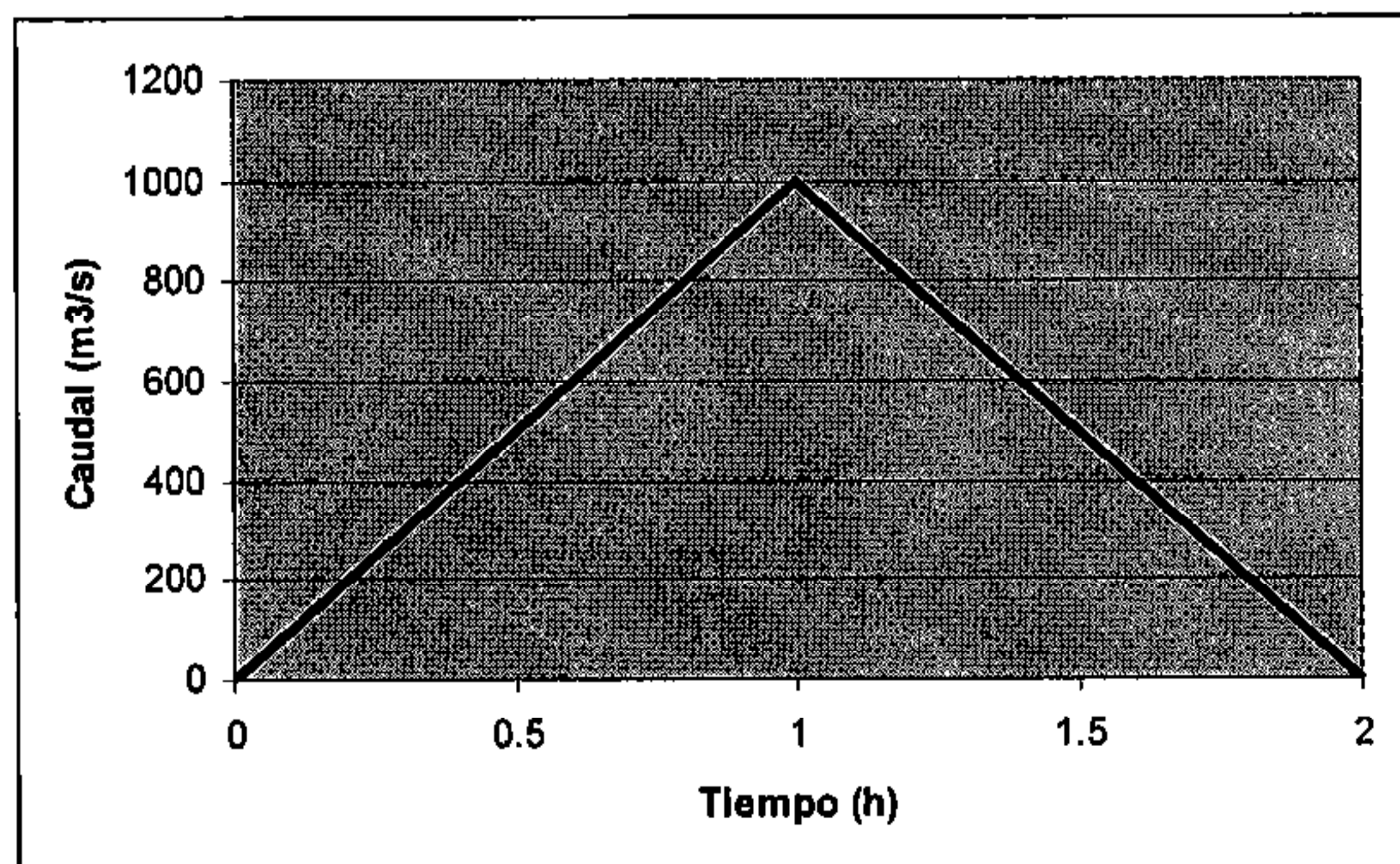


Figura 9.32 Hidrograma de avenida considerado en el extremo aguas arriba.

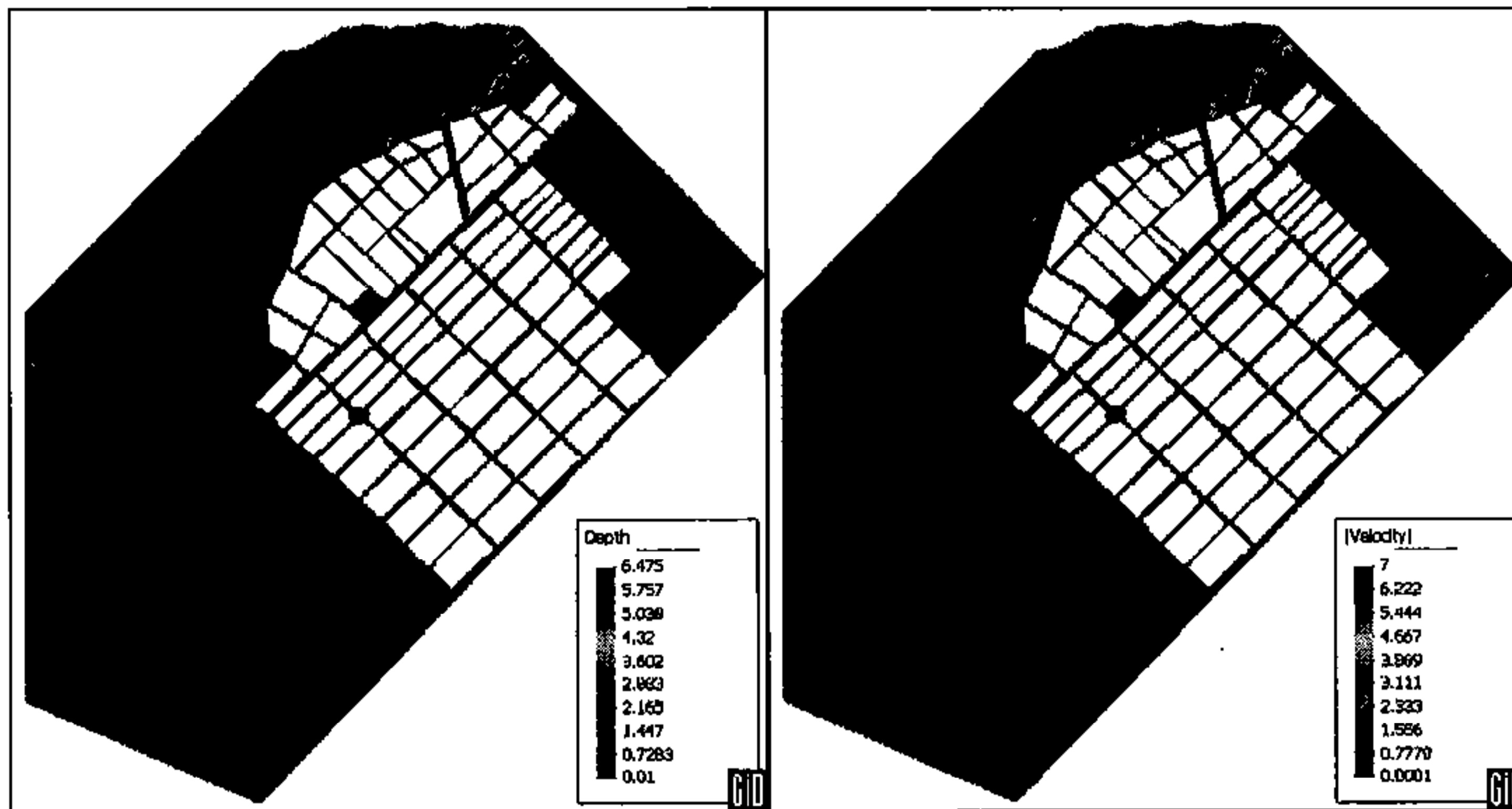


Figura 9.33 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=500s$.



Figura 9.34 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=1000s$.

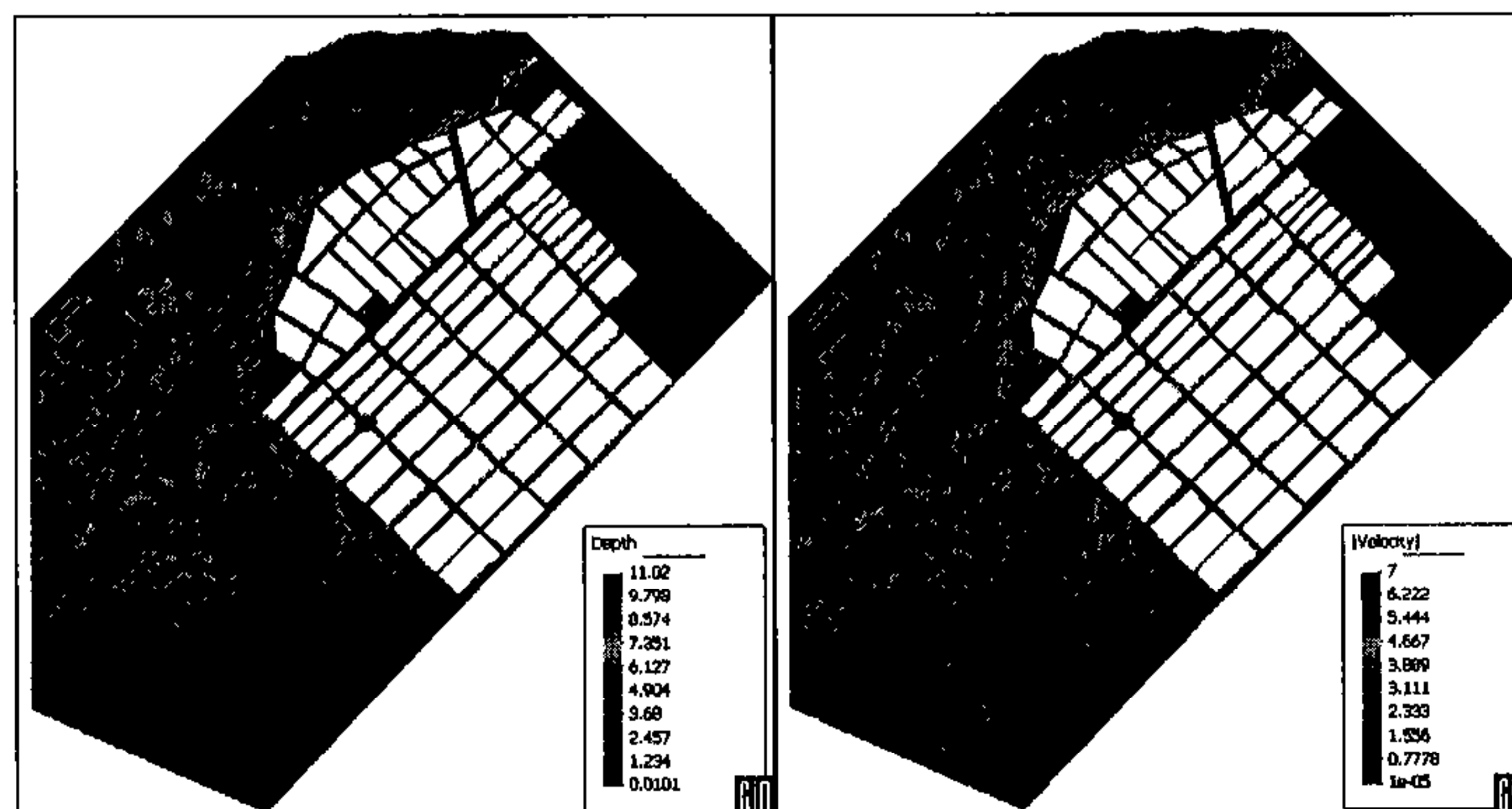


Figura 9.35 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=4000s$.

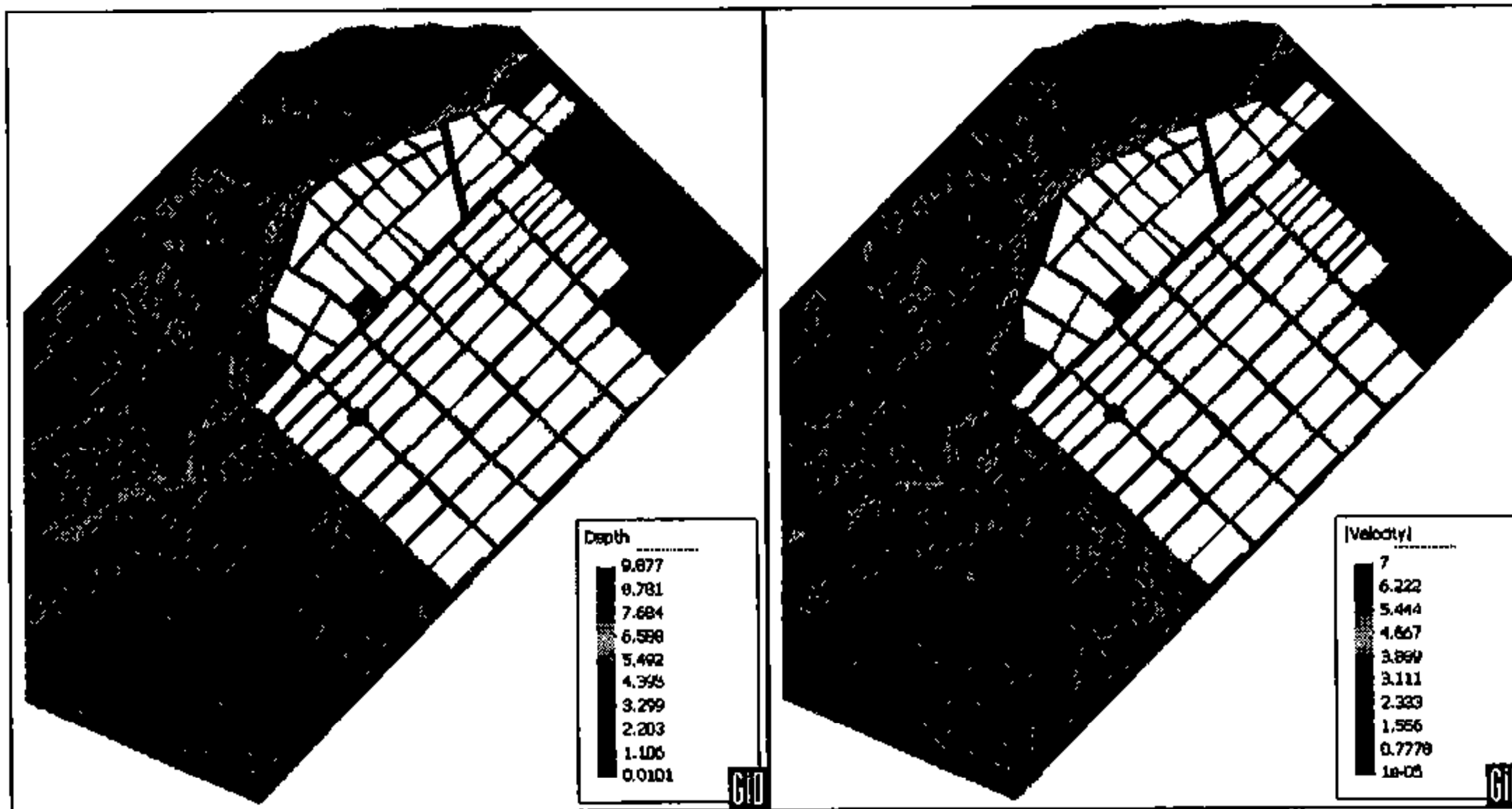


Figura 9.36 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=5000s$.

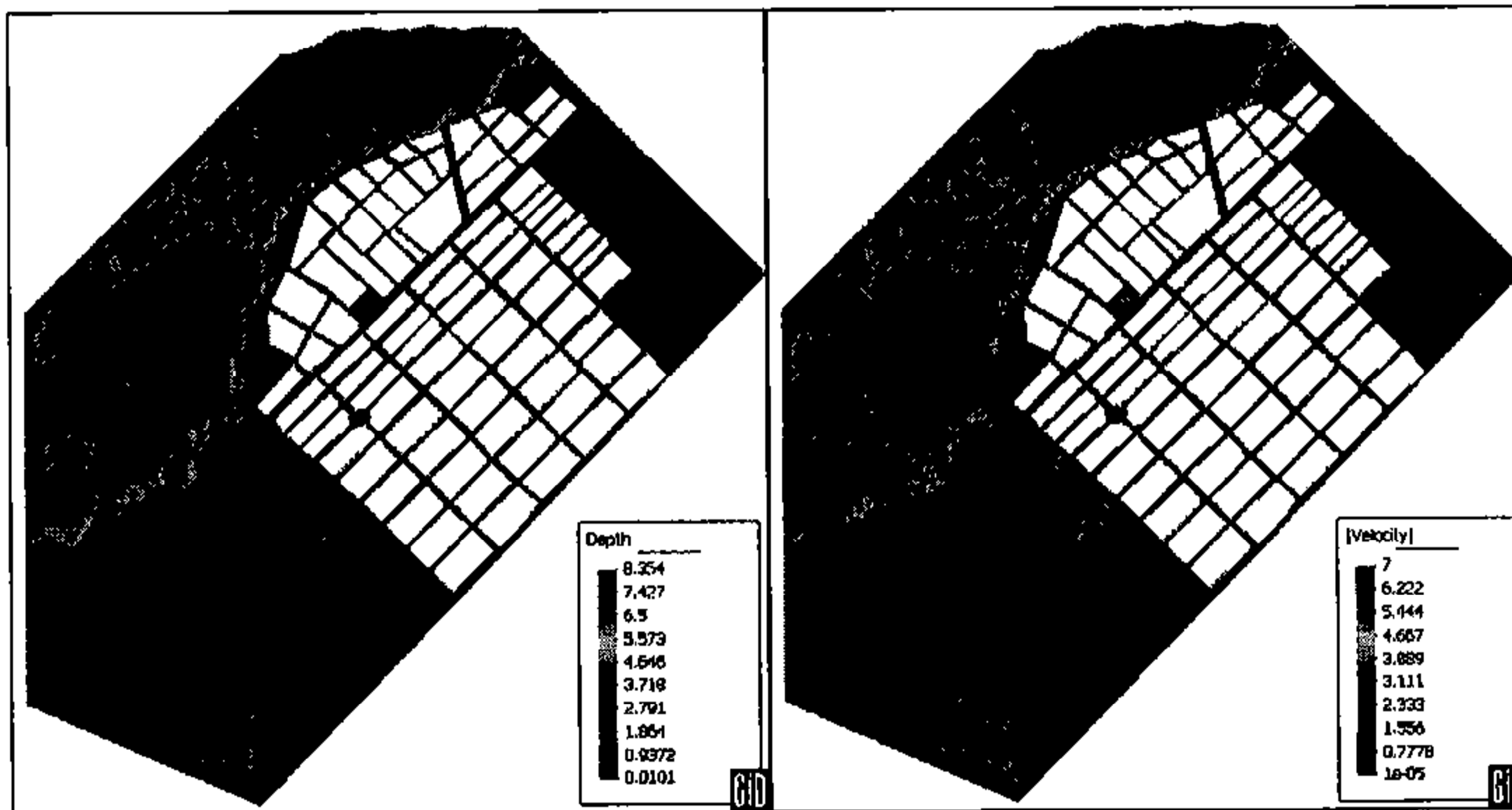


Figura 9.37 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=6000s$.

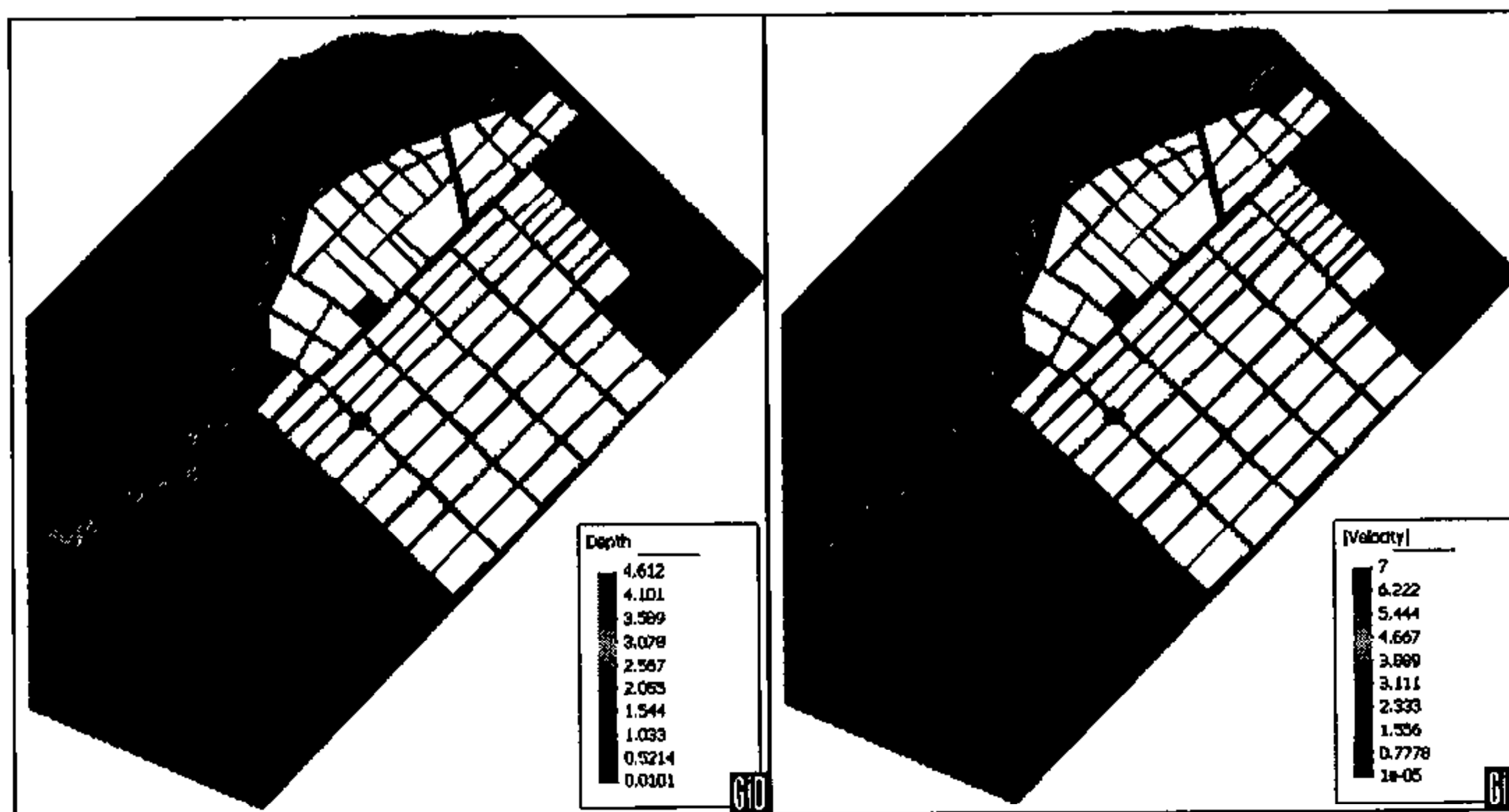


Figura 9.38 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) para $t=8000s$.

9.4.2. Tramo final del río Llobregat entre Martorell y el mar

También como validación del proyecto RAMFLOOD se ha simulado la propagación de una avenida por el tramo final del río Llobregat, en el tramo de río comprendido entre la confluencia del Llobregat con la riera de Rubí y el mar. Ello representa unos 21 *km* de longitud de río y unos 30 *km*² de posible área inundable.

Debido a la gran longitud a estudiar, se decidió realizar una modelación integrada en una y dos dimensiones, estudiando en una dimensión aquellas zonas donde el flujo se acerca más a la hipótesis de unidimensionalidad, y en dos dimensiones el resto de área. De esta manera, se dividió el tramo en cuatro partes. El tramo aguas arriba, encajado entre la Autovía del Baix Llobregat y la Autopista A-7 se estudia en una dimensión. Desde que la Autovía cruza el río hasta el meandro de Sant Boi se estudia en dos dimensiones. De allí hasta el puente de la Autovía de Castelldefels se considera el cauce en una dimensión y la llanura de inundación derecha en dos, y finalmente, el tramo final se modela en una dimensión siguiendo el trazado actual (río desviado) (Figura 9.39).

De esta manera, habrá conexiones entre zonas 1D y 2D según la dirección del eje del río, pero también, en el tercer tramo de los mencionados, conexión entre un tramo 1D y una llanura de inundación 2D por desbordamiento lateral.

A partir de la información topográfica en formato digital ASCII de Arc/Info, se importó la geometría a la interface Gid y se generó una malla global (Figura 9.40).

Las secciones para el cálculo unidimensional se obtuvieron mediante cortes de la malla anterior. El primer tramo 1D se ha discretizado mediante 143 secciones transversales (Figura 9.41), mientras que para el segundo se han utilizado 164 (Figura 9.42). La zona 2D está formada por 13480 cuadriláteros (Figura 9.43). Las primeras 42 secciones transversales del segundo tramo 1D pueden desbordar por su margen derecha hacia la llanura de inundación, discretizada en dos dimensiones (Figura 9.44).

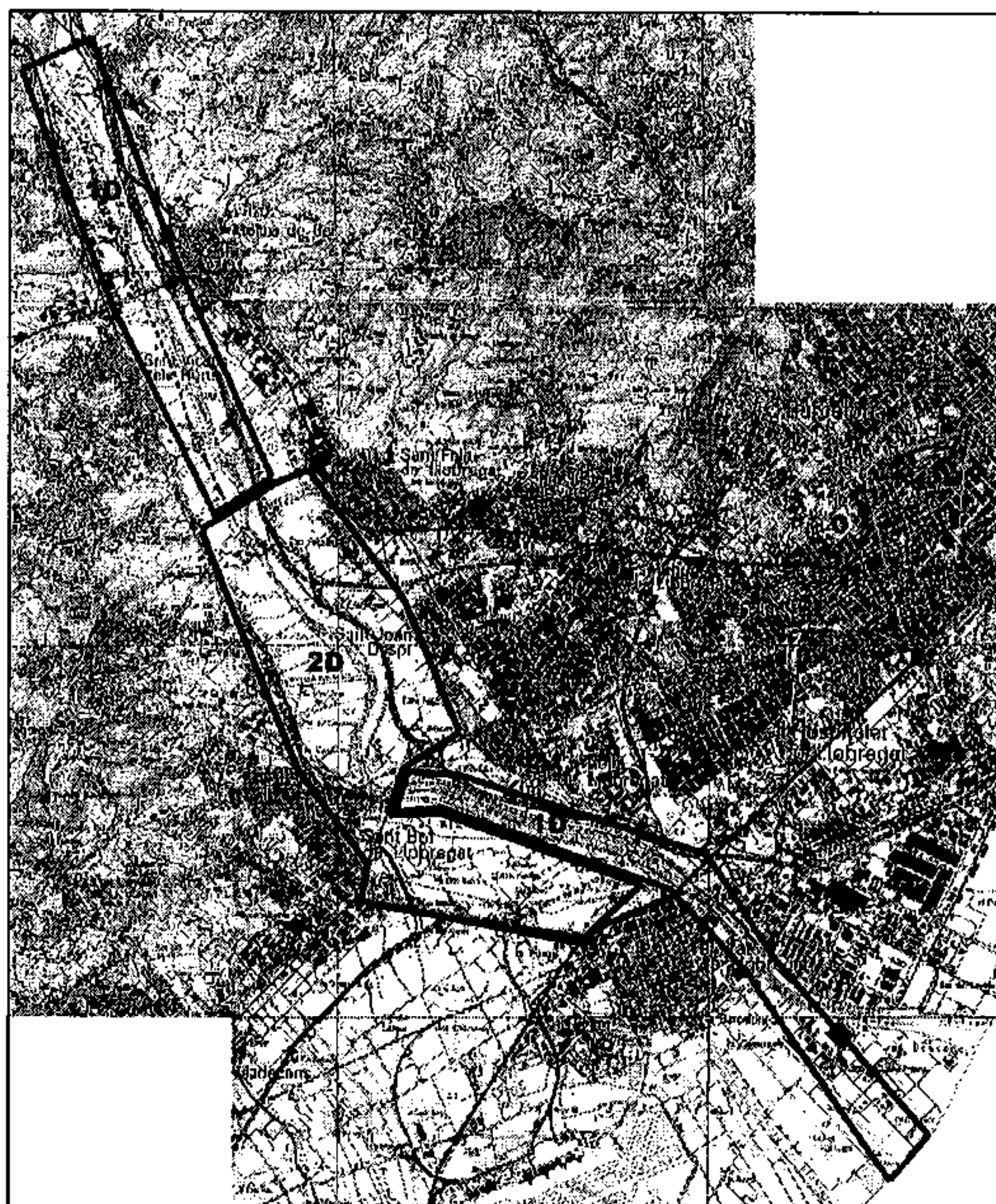


Figura 9.39 Tramo final del río Llobregat. Zona de estudio y división en aproximación 1D y 2D.



Figura 9.40 Importación en Gid del Tramo final del río Llobregat.

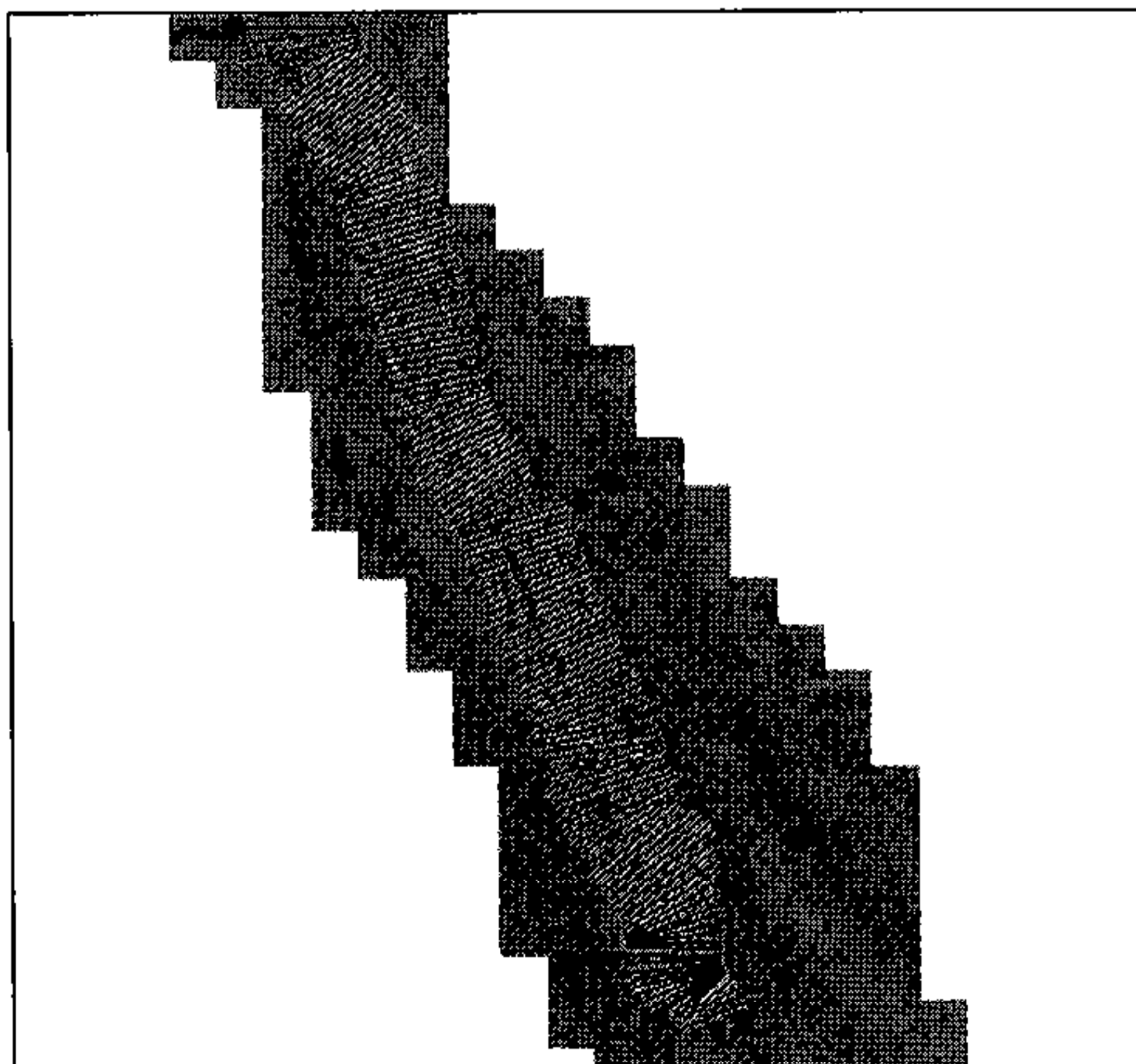


Figura 9.41 Secciones transversales del primer tramo 1D.

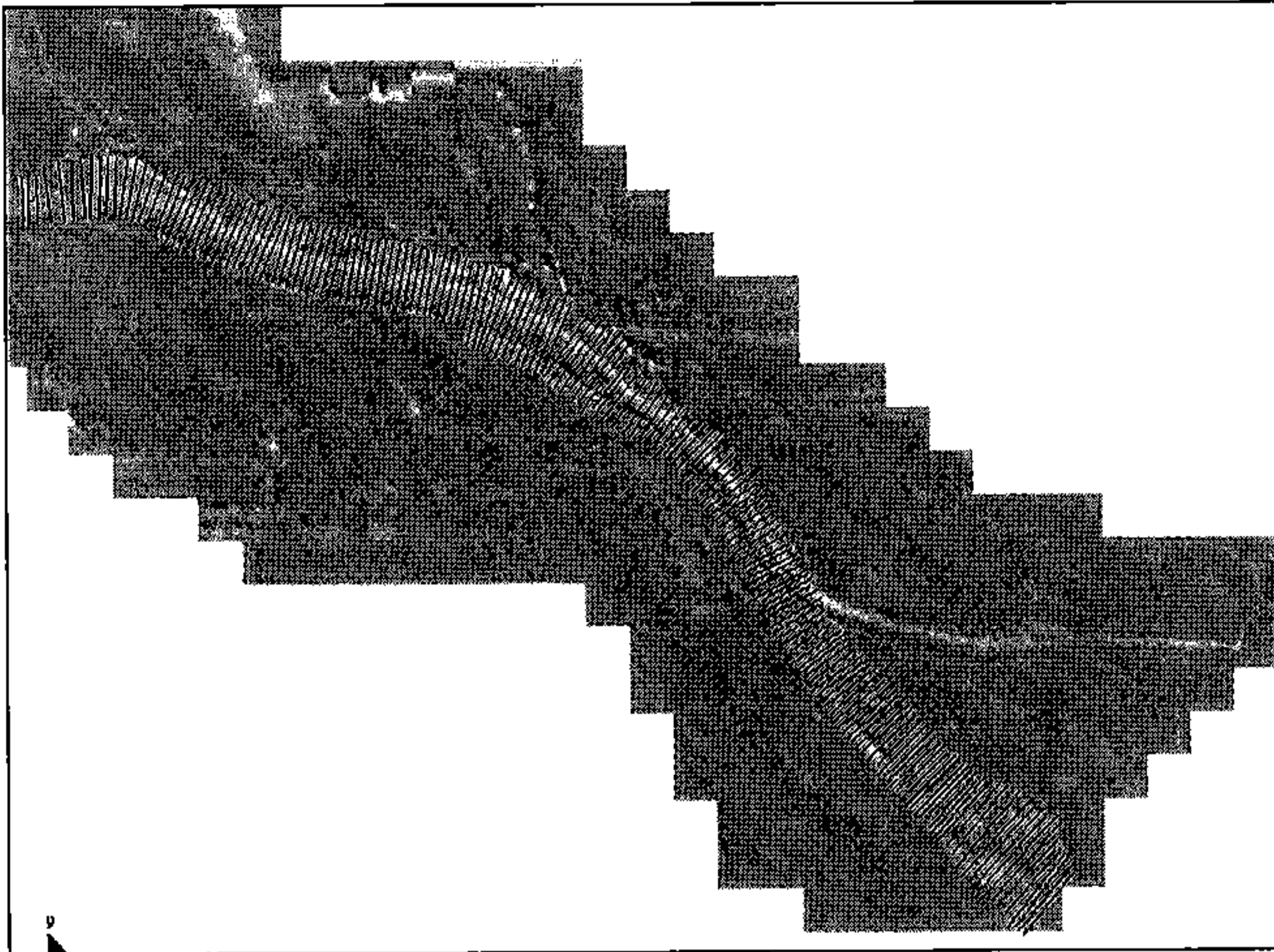


Figura 9.42 Secciones transversales del segundo tramo 1D. Se puede observar el antiguo cauce del río Llobregat.

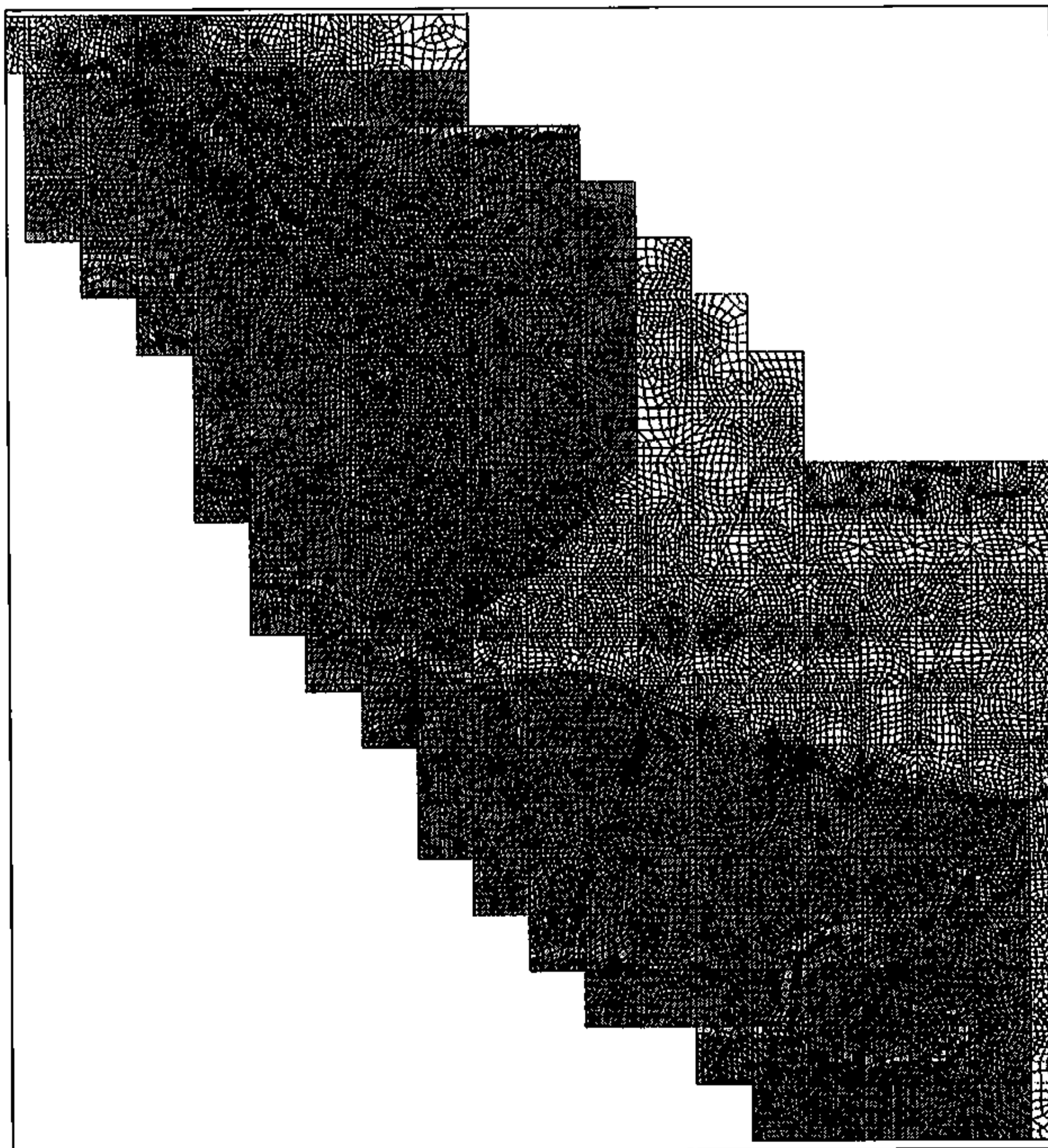


Figura 9.43 Malla de cálculo del tramo 2D (color oscuro).

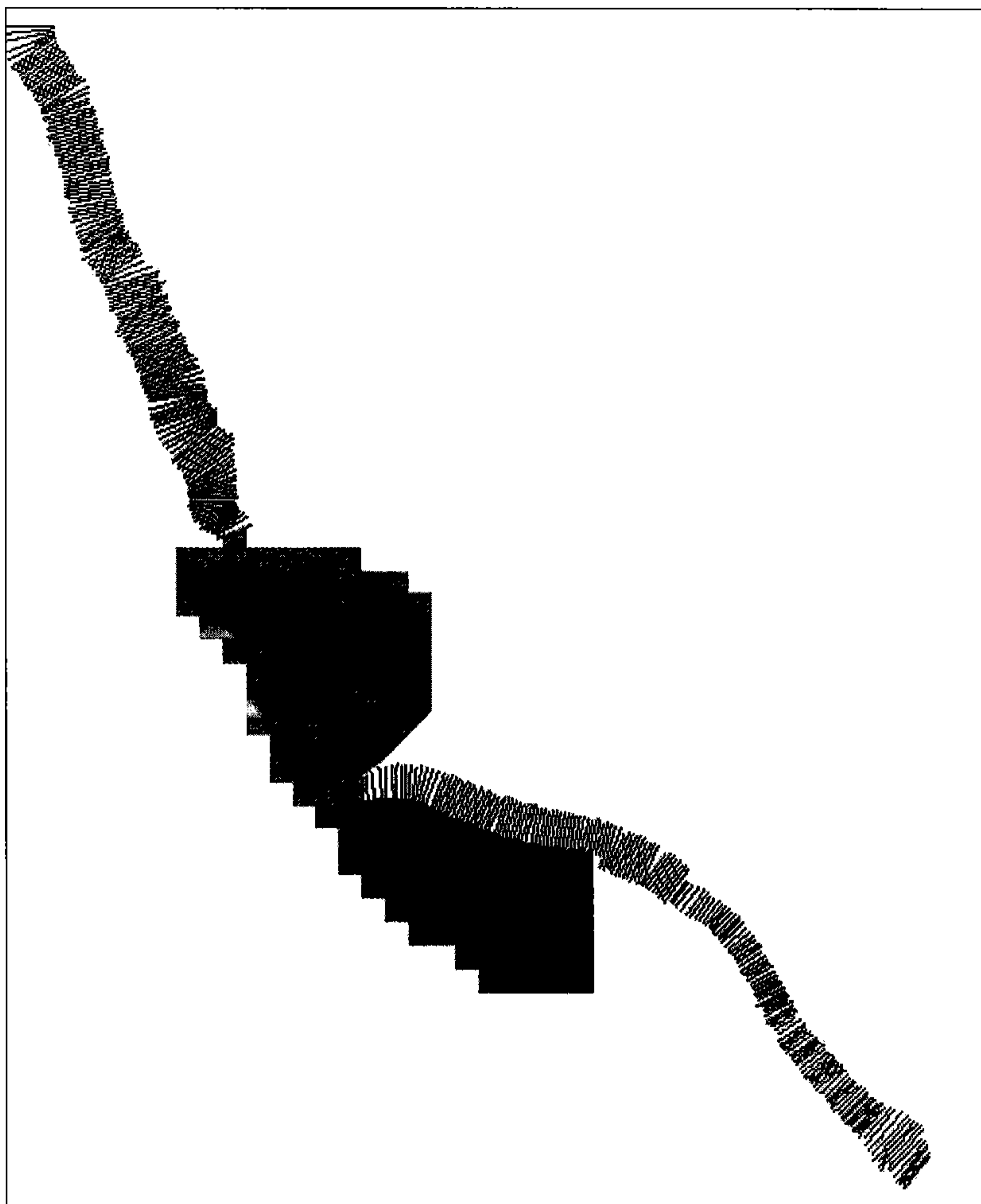


Figura 9.44 Discretización del tramo de estudio. Disposición relativa entre los tramos 1D y la zona 2D.

Como condición de contorno, aguas arriba del primer tramo 1D se impone el caudal de entrada (una sola condición para funcionar en régimen lento). En el extremo aguas abajo se impone como condición de contorno el máximo entre la cota correspondiente al nivel del mar y el calado crítico, ya que para caudales grandes la desembocadura al mar tiene lugar en régimen crítico.

Los resultados de la simulación que se presentan corresponden a un hidrograma de avenida en forma de trapecio, con un caudal punta de $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ y un tiempo base de 3 horas. En la Figura 9.45 y Figura 9.46 se presentan respectivamente los hidrogramas y limnigramas en una serie de secciones del río del primer tramo 1D, mientras que los de la Figura 9.48 y Figura 9.49 corresponden al segundo tramo 1D. El hidrograma de caudal de transferencia entre río y llanura se puede ver en la Figura 9.47.

De la *Figura 9.50* a la *Figura 9.55* se presentan los calados y velocidades en el dominio 2D en distintos instantes de tiempo. Entre ellas, en la *Figura 9.52* se observa el inicio del desbordamiento lateral del cauce central por su margen derecha.

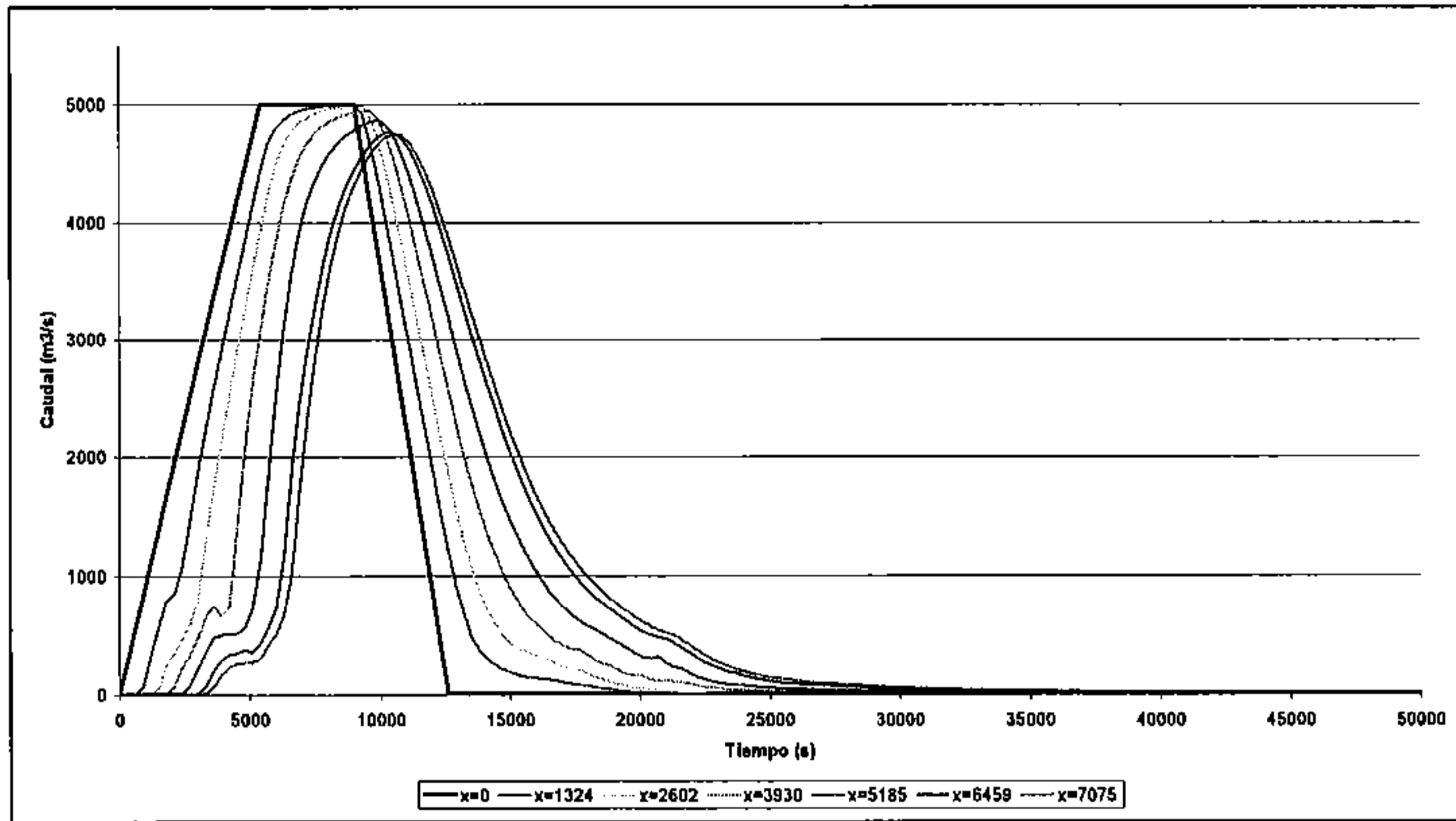


Figura 9.45 Hidrogramas en distintas secciones del primer tramo 1D.

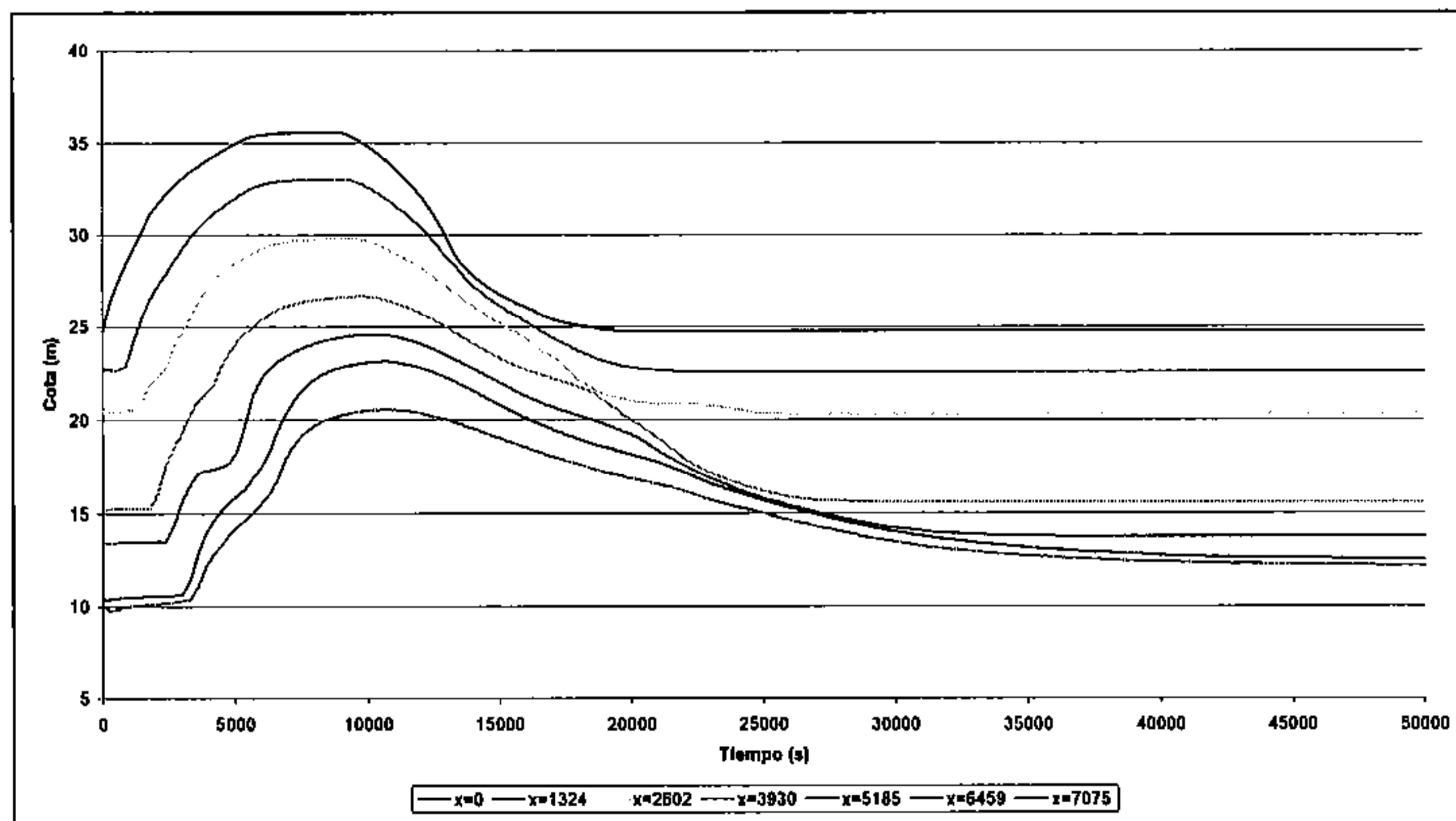


Figura 9.46 Limnigramas en distintas secciones del primer tramo 1D.

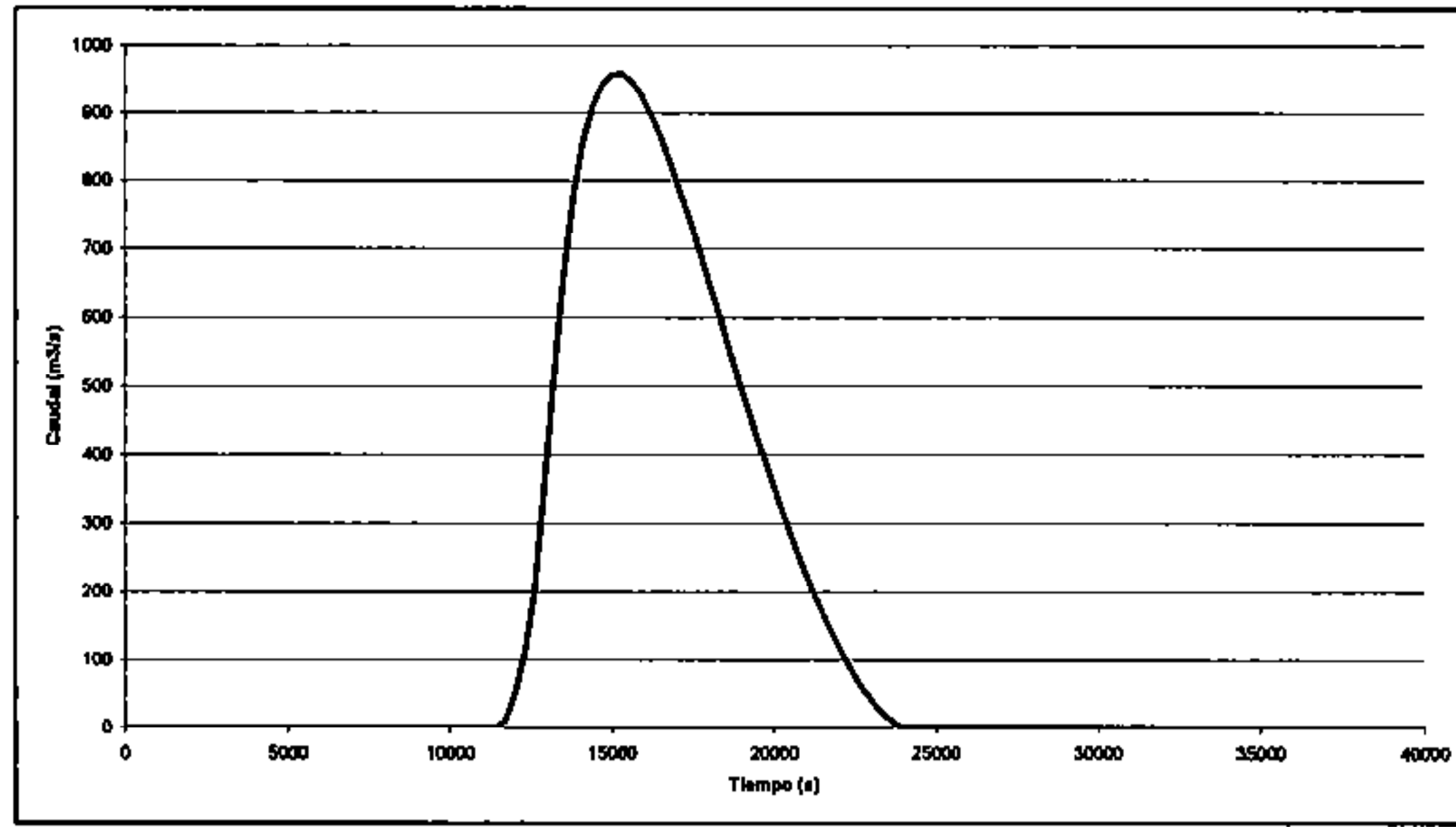


Figura 9.47 Hidrograma de caudal de desbordamiento entre el segundo tramo 1D y la llanura de inundación.

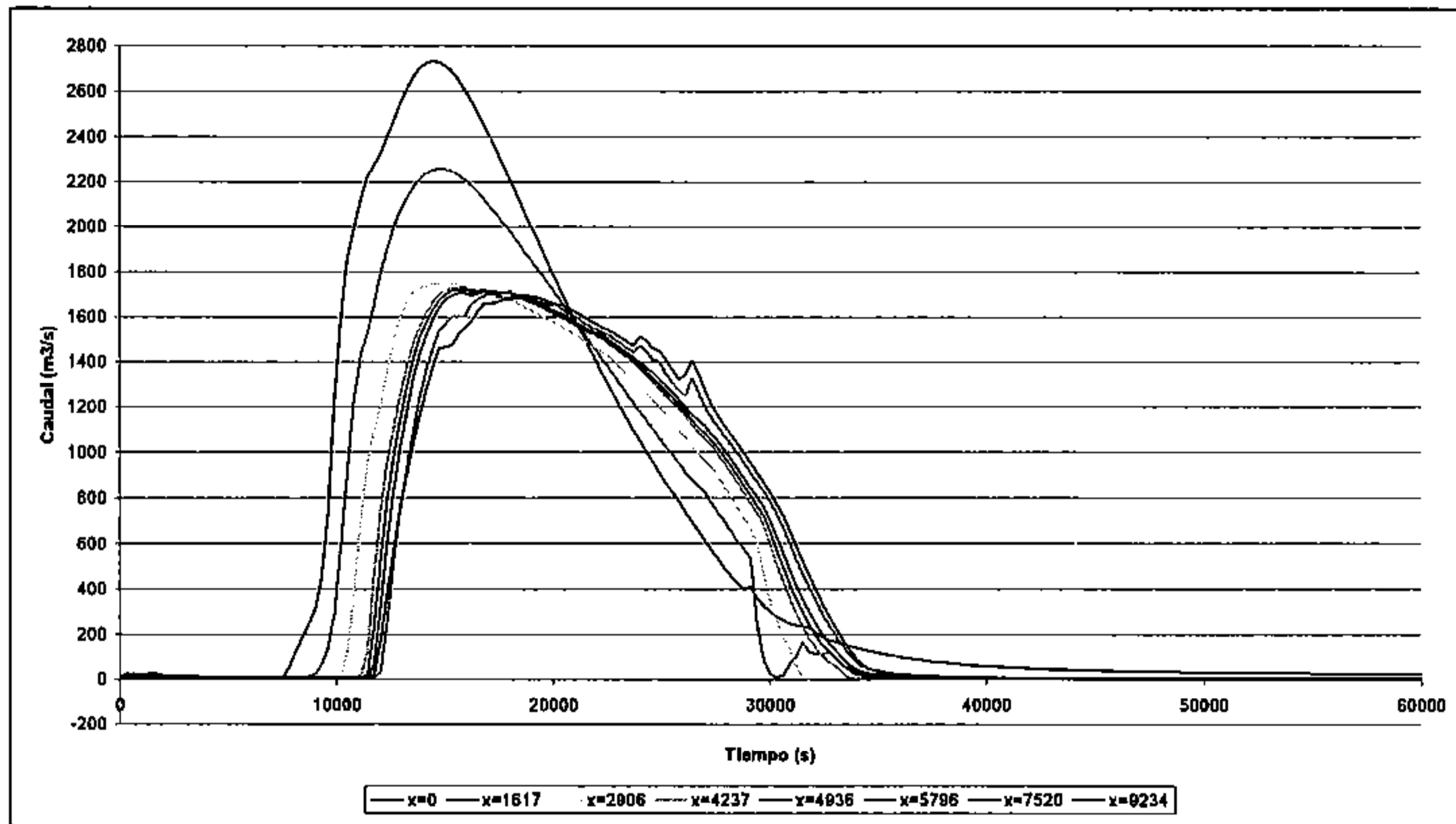


Figura 9.48 Hidrogramas en distintas secciones del segundo tramo 1D.

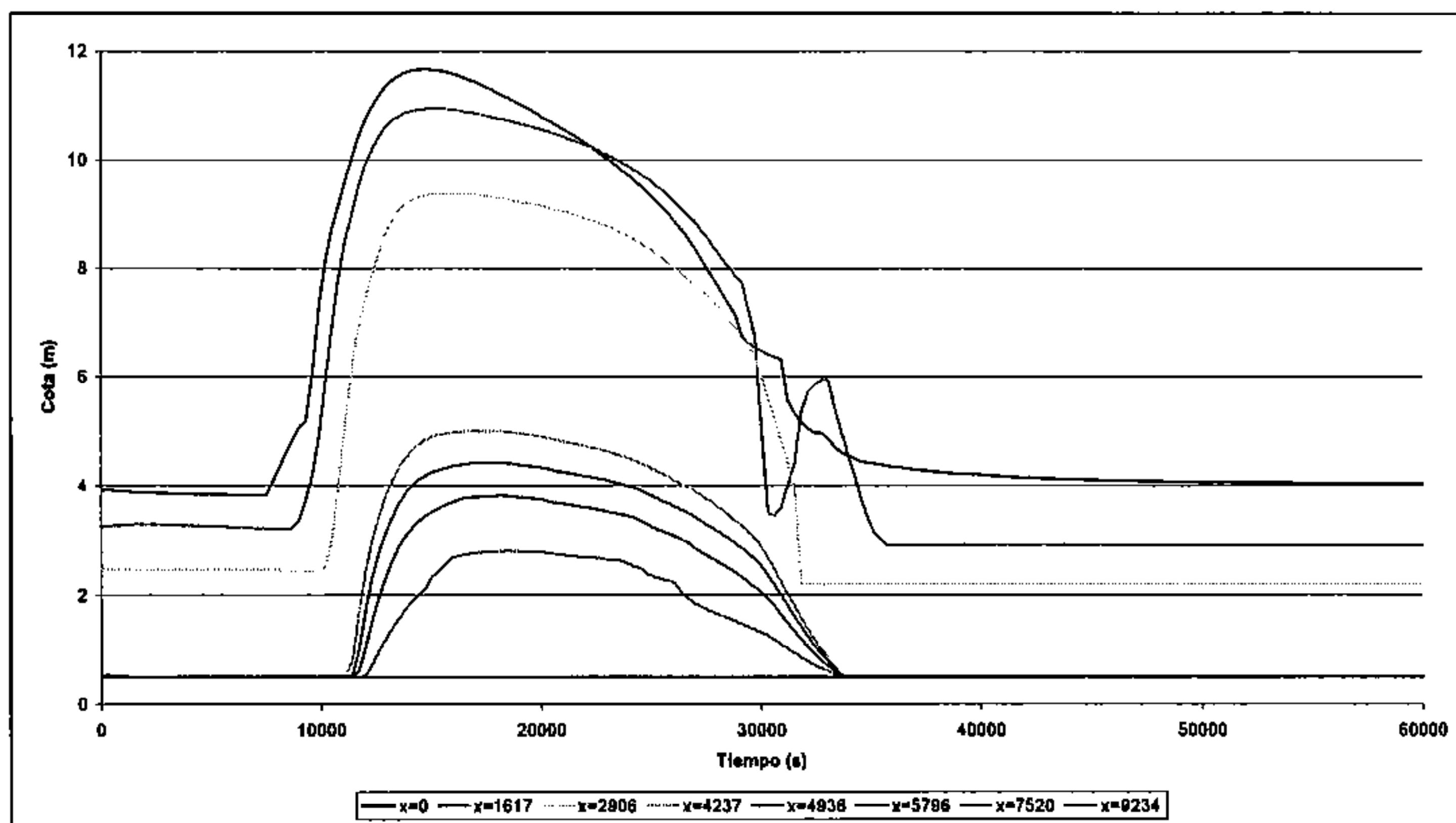


Figura 9.49 Limnogramas en distintas secciones del segundo tramo 1D.

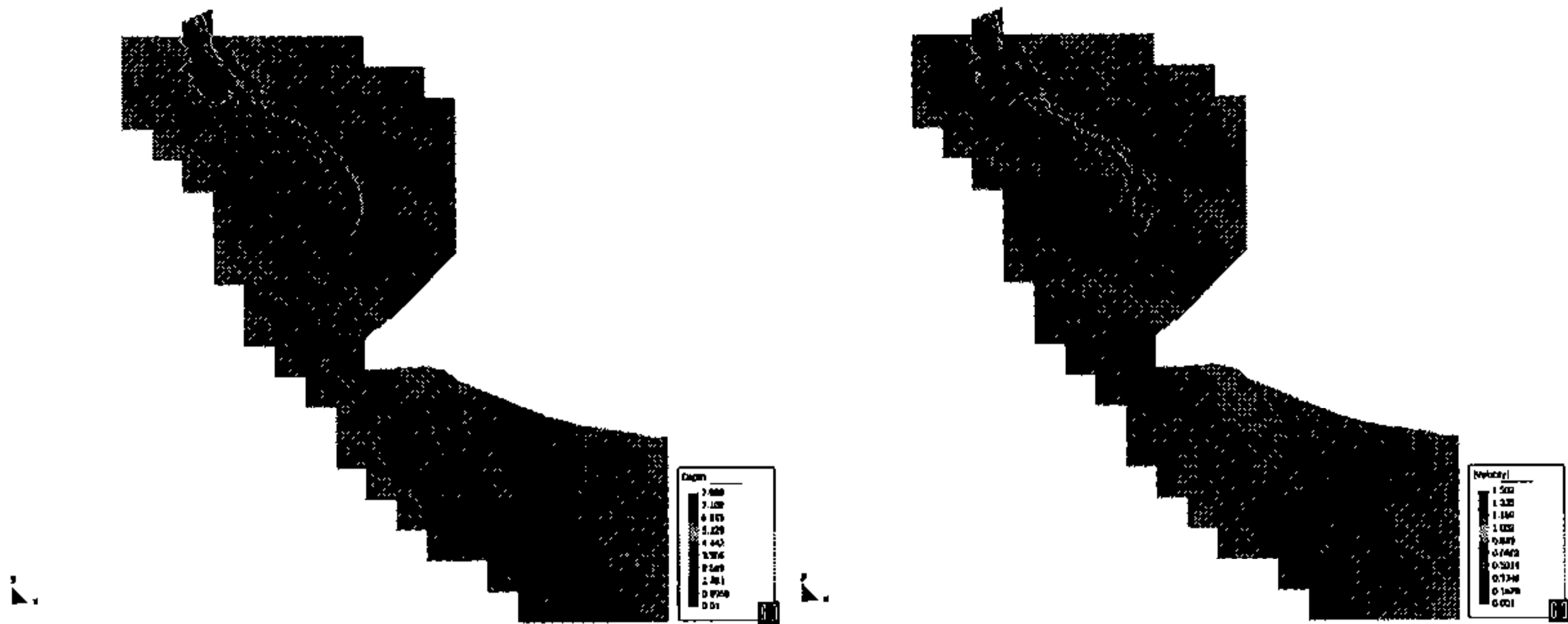


Figura 9.50 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 6300s



Figura 9.51 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 8100s



Figura 9.52 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 12300s



Figura 9.53 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 14400s



Figura 9.54 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 18000s

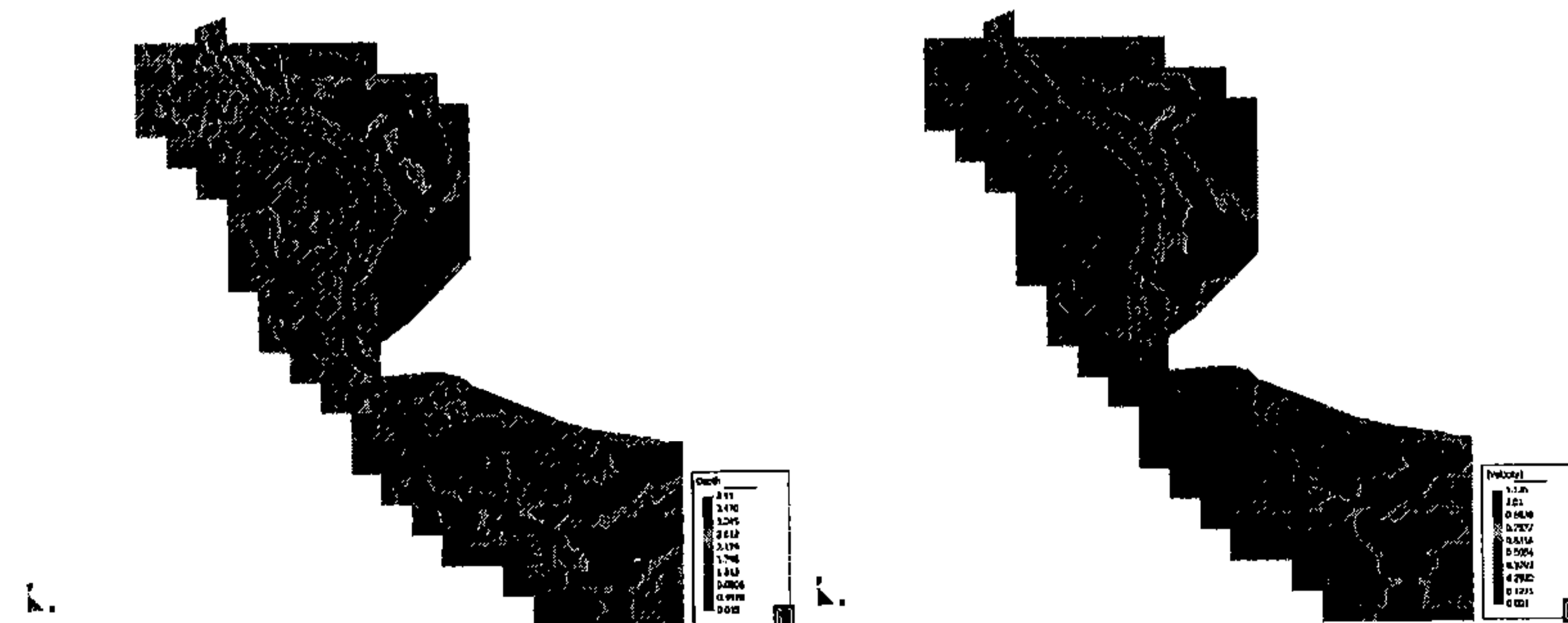


Figura 9.55 Calados (izquierda) y velocidades (derecha) en el instante 60600s

Los resultados de la modelación numérica se obtienen en términos de variables hidráulicas, concretamente calado y componentes de la velocidad. Sin embargo, par los objetivos del proyecto Ramflood y la incorporación en el sistema de ayuda a la toma de decisiones (DSS) se adaptó GiD para poder representar los resultados en términos de riesgo, según los criterios de la Agencia Catalana de l'Aigua (ACA, 2003) (*Figura 9.56*).

En la *Figura 9.57* se presentan los resultados en términos de riesgo para la avenida estudiada, en el instante 21000s, en el que el pico del hidrograma se encuentra en el segundo tramo 1D por lo que corresponde a la fase de secado del dominio 2D. Las zonas en azul señaladas como sin riesgo corresponden a zonas mojadas donde los valores de calados y velocidades no son suficientes para llegar a riesgo moderado. En la *Figura 9.58* se presenta un detalle del mapa de riesgo resultante, correspondiente en cada punto al valor máximo de riesgo a lo largo del cálculo.

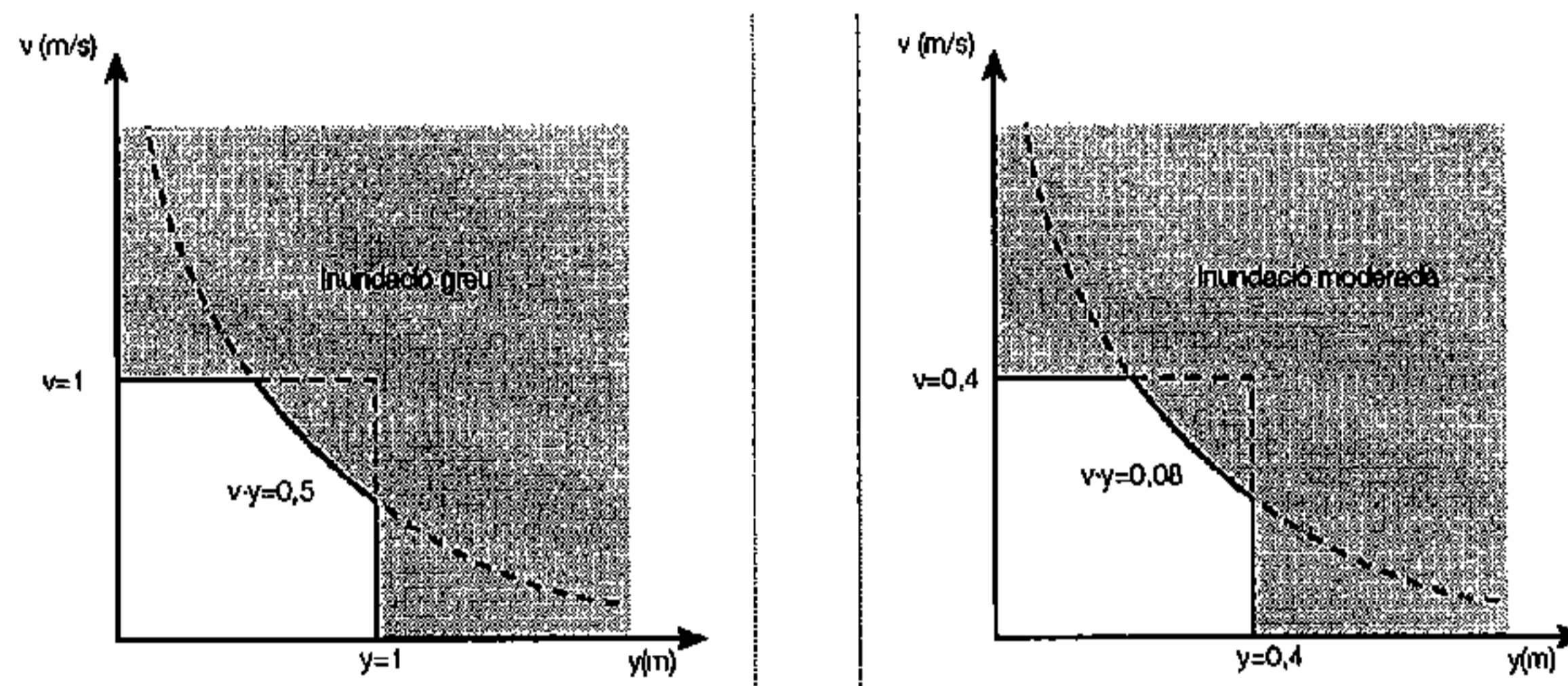


Figura 9.56 Criterios de riesgo según la Agència Catalana de l'Aigua (imagen tomada de (ACA, 2003))

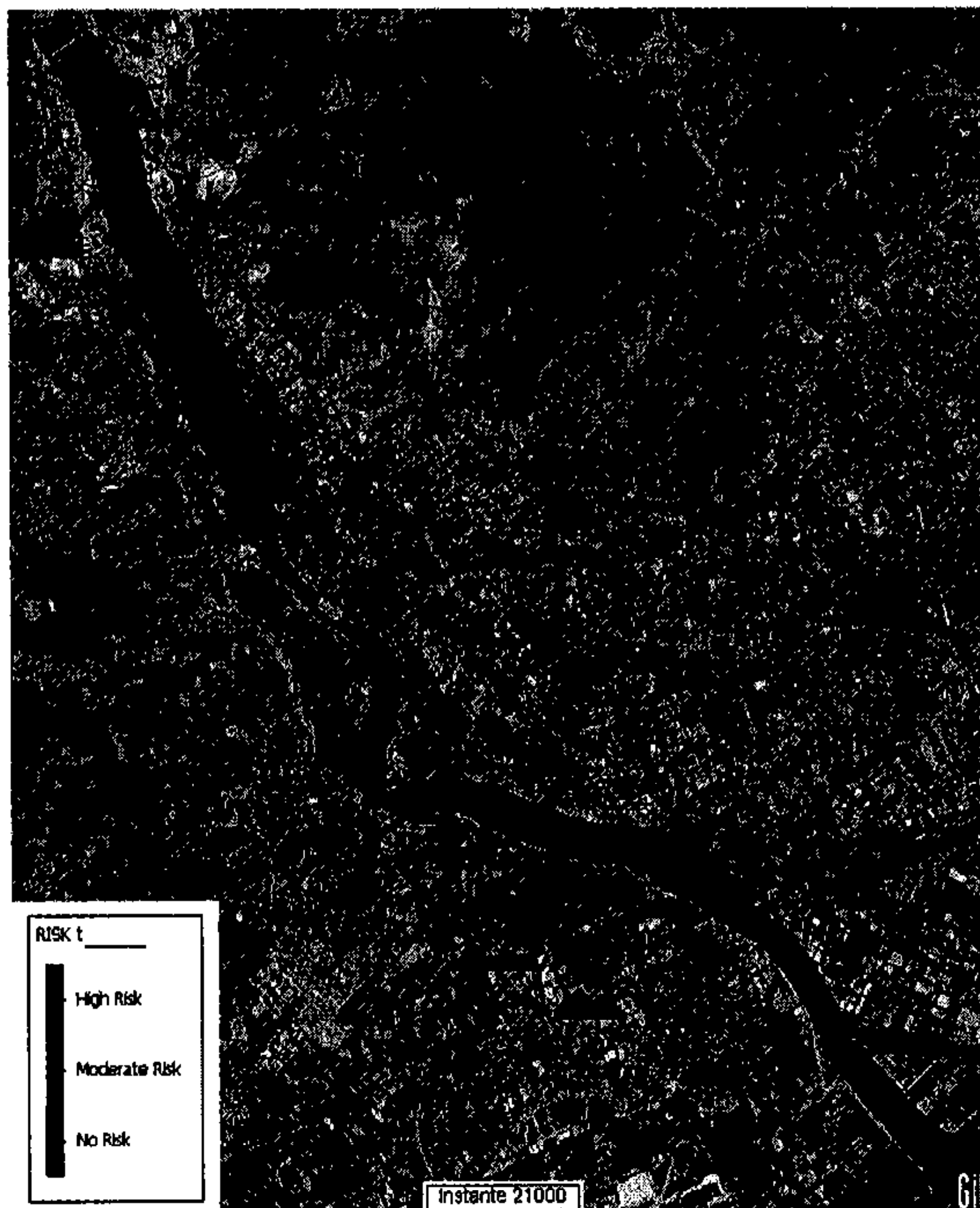


Figura 9.57 Distribución espacial del riesgo en el instante 21000s

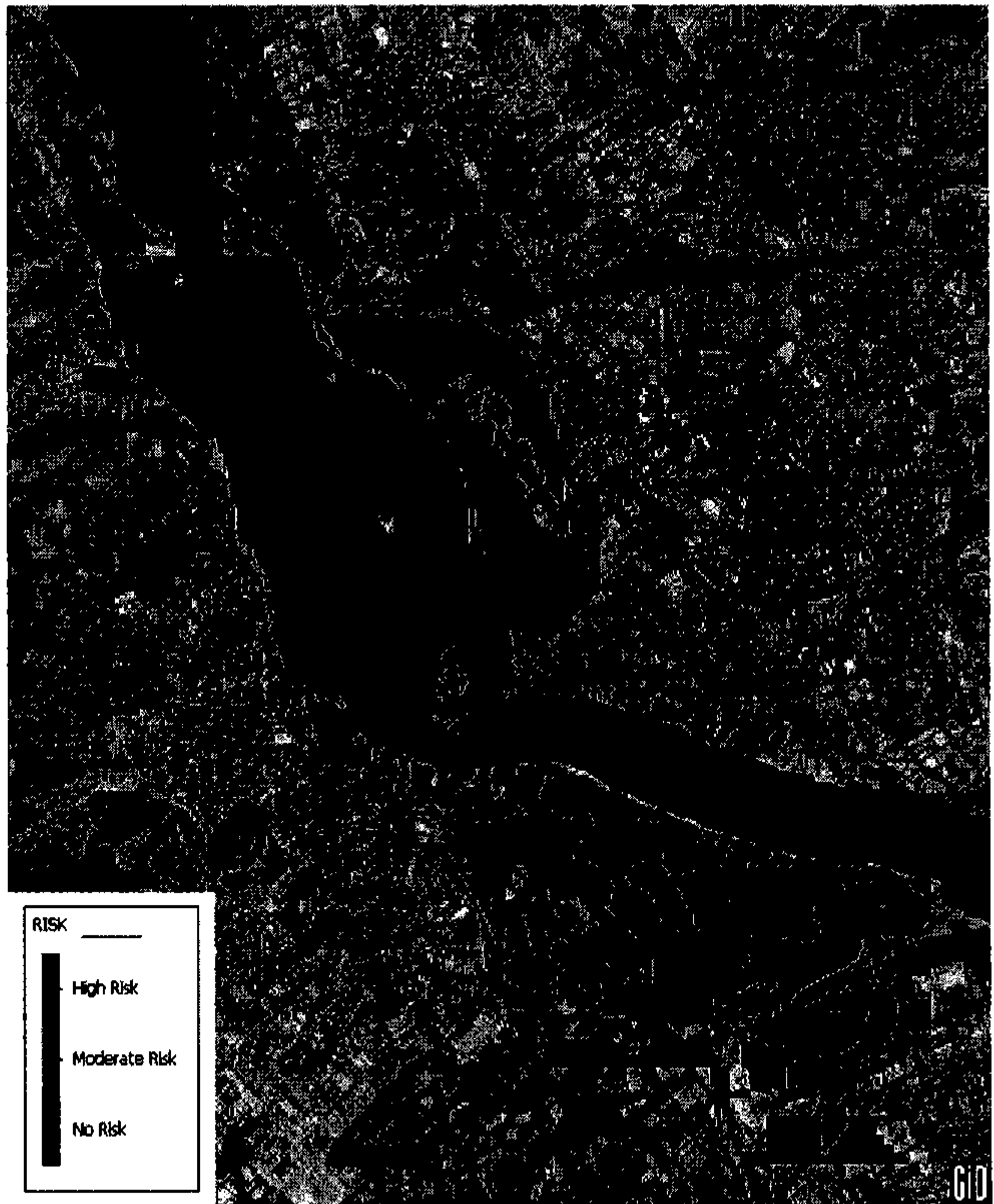


Figura 9.58 Detalle del riego asociado a la avenida de caudal máximo 5000 m³/s

9.5. Estructura de separación de caudales en un cauce torrencial

Se presenta una aplicación al diseño de estructuras hidráulicas singulares, concretamente una estructura de separación de caudales (Flumen 2005) realizado a petición de Invall. En el proyecto del nuevo cauce del Barranc de Barenys en el termino municipal de Salou se pretende que la nueva salida proyectada se utilice tan sólo por caudales grandes asociados a avenidas importantes, mientras que normalmente, cuando no se está en situación de avenida, los caudales sean desaguados al mar por dónde lo hace actualmente la riera.

Debido a los condicionantes geométricos del entorno, la limitación de espacio y las características del flujo incidente (régimen rápido con velocidades de más de 7 m/s) una solución clásica de derivación a través de un vertedero lateral era inviable. Descartada esta solución, se propuso una nueva geometría consiste en una sobreelevación oblicua de la cota de solera del Barranc de Barenys, de forma que los caudales pequeños no disponen de energía suficiente por superar la mencionada sobreelevación y son derivados hacia el conducto que lleva al cauce actual. Por el contrario, los caudales grandes son capaces de superar esta sobreelevación y sólo una parte son derivados.

Con funcionamiento hidráulico en régimen rápido que se produce, a geometría de la solución que se propone permite que los caudales de avenida circulen por encima de la estructura de derivación sin que se produzca un cambio de régimen, de forma que no se produzca un resalto hidráulico, optimizando la capacidad de la conducción.

Los criterios de diseño fueron los siguientes: el caudal de diseño es de $196 \text{ m}^3/\text{s}$, para el cual se debe derivar un máximo de $16.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Asimismo, se pretende que cuando el caudal sea inferior a $16.5 \text{ m}^3/\text{s}$ se pueda derivar el máximo caudal posible cabeza este eje

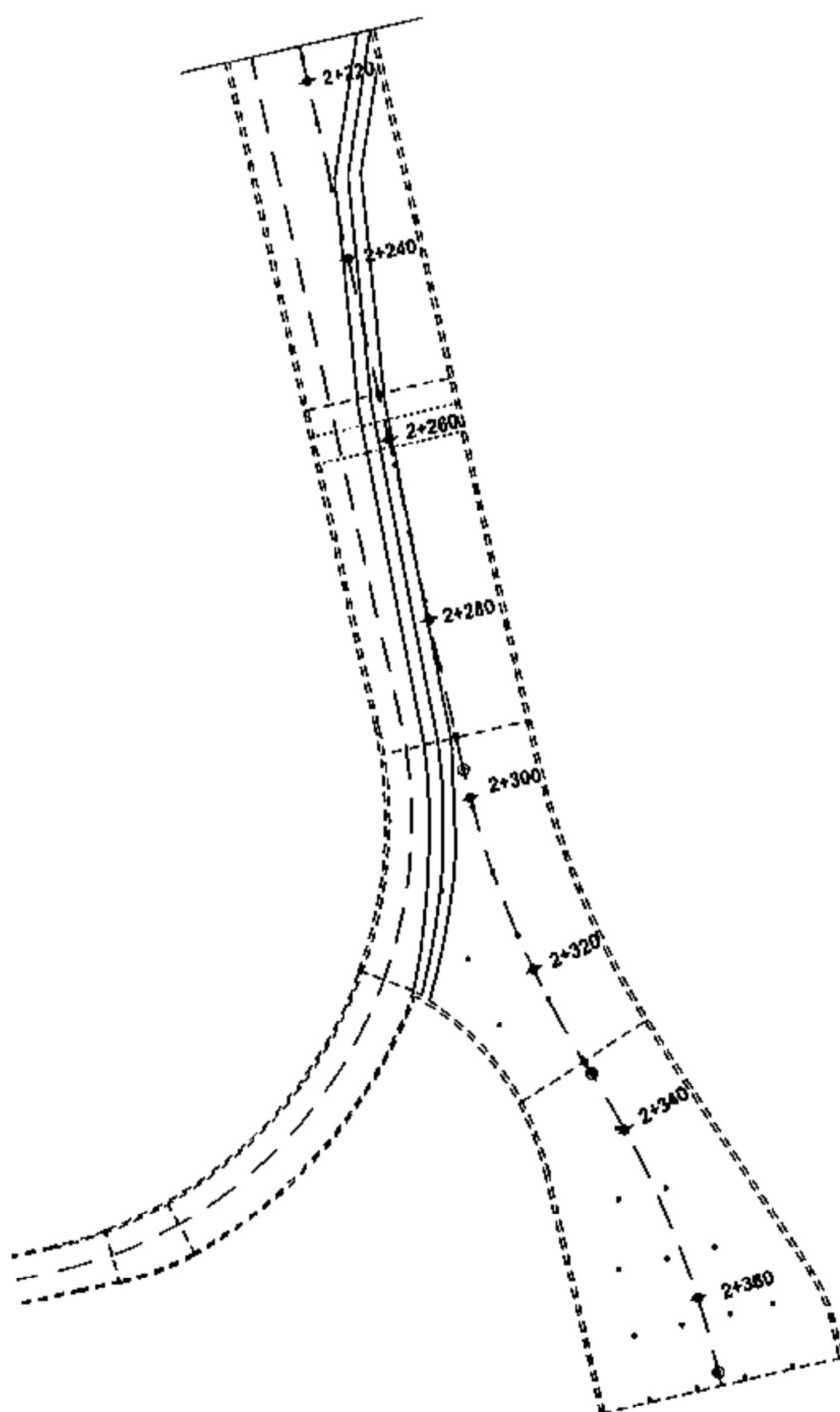


Figura 9.59. Planta de la solución propuesta

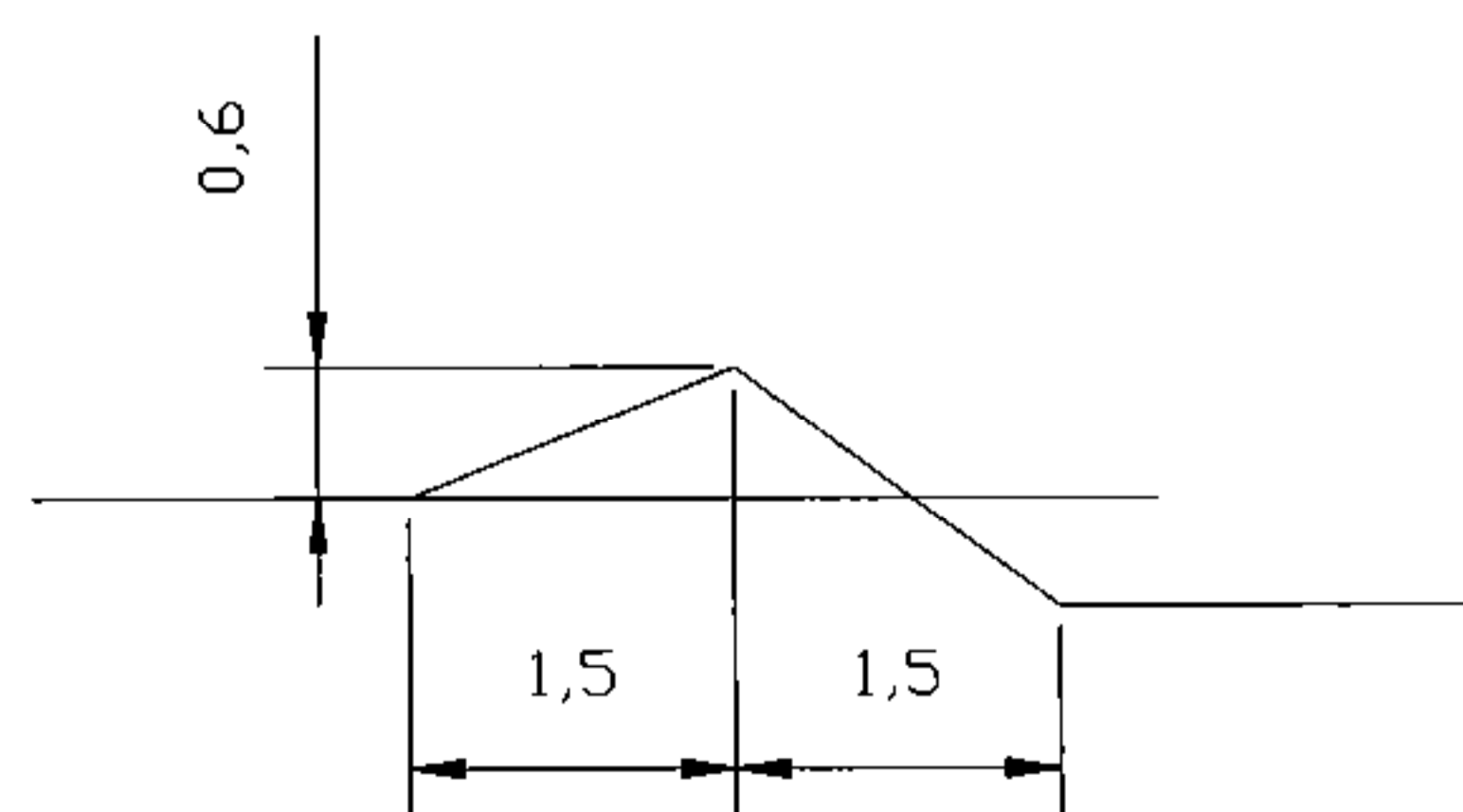


Figura 9.60 Perfil transversal de la sobreelevación

Con la geometría propuesta se consiguen la siguiente distribución de caudales:

- Caudales iguales o inferior a $6.25\text{m}^3/\text{s}$ por el Barranco de Barenys son derivados en su totalidad
- Para valores del caudal superior a $6.25\text{m}^3/\text{s}$, una parte será derivada, mientras que el resto circulará por el nuevo cauce.
- Cuando por el Barranco de Barenys llegue un caudal de $196\text{m}^3/\text{s}$, $16.5\text{m}^3/\text{s}$ se derivarán y el resto ($179.5\text{m}^3/\text{s}$) circulará por el nuevo cauce.

Se optimizó la geometría por conseguir que este caudal límite para el cual todo el caudal fuera derivado fuera el más elevado posible. Uno de los factores condicionantes que hacen que este valor no supere los $6.25\text{m}^3/\text{s}$ es la poca capacidad del conducto de derivación aguas abajo del ámbito de actuación. Esto, junto con el hecho que este eje funciona en régimen lento, provoca cotas de agua elevadas aun cuando los caudales sean pequeños, y por lo tanto cualquier estructura que obligue el flujo a derivar hacia este conducto deberá tener una cota superior también elevada. Cualquier solución que consiga derivar totalmente caudales superiores a $6.25\text{m}^3/\text{s}$, provocará que para el caudal de diseño de $196\text{m}^3/\text{s}$ se derive un caudal de más de $16.5\text{m}^3/\text{s}$, superando la capacidad del conducto con todos los problemas que esto puede ocasionar.

Funcionamiento hidráulico para caudales extraordinarios

Cuando aguas arriba llegan $196\text{m}^3/\text{s}$, se consigue que $16.5\text{m}^3/\text{s}$ sean desviados hacia el colector, mientras que el resto, 179.5 sigue por el cauce principal del barranco. El flujo en régimen rápido no se interrumpe por la presencia de la sobre elevación, factor clave por asegurar la capacidad del sistema dadas las reducidas dimensiones por estos caudales elevados.

En la Figura 9.61 y la se Figura 9.62 se presentan, en escalera de colores, el resultados de los cálculos para el caudal de $196\text{m}^3/\text{s}$. Se muestran, en este orden, resultados de calados, cotas de lámina de agua, velocidad y caudal específico (producto de calado por la velocidad).

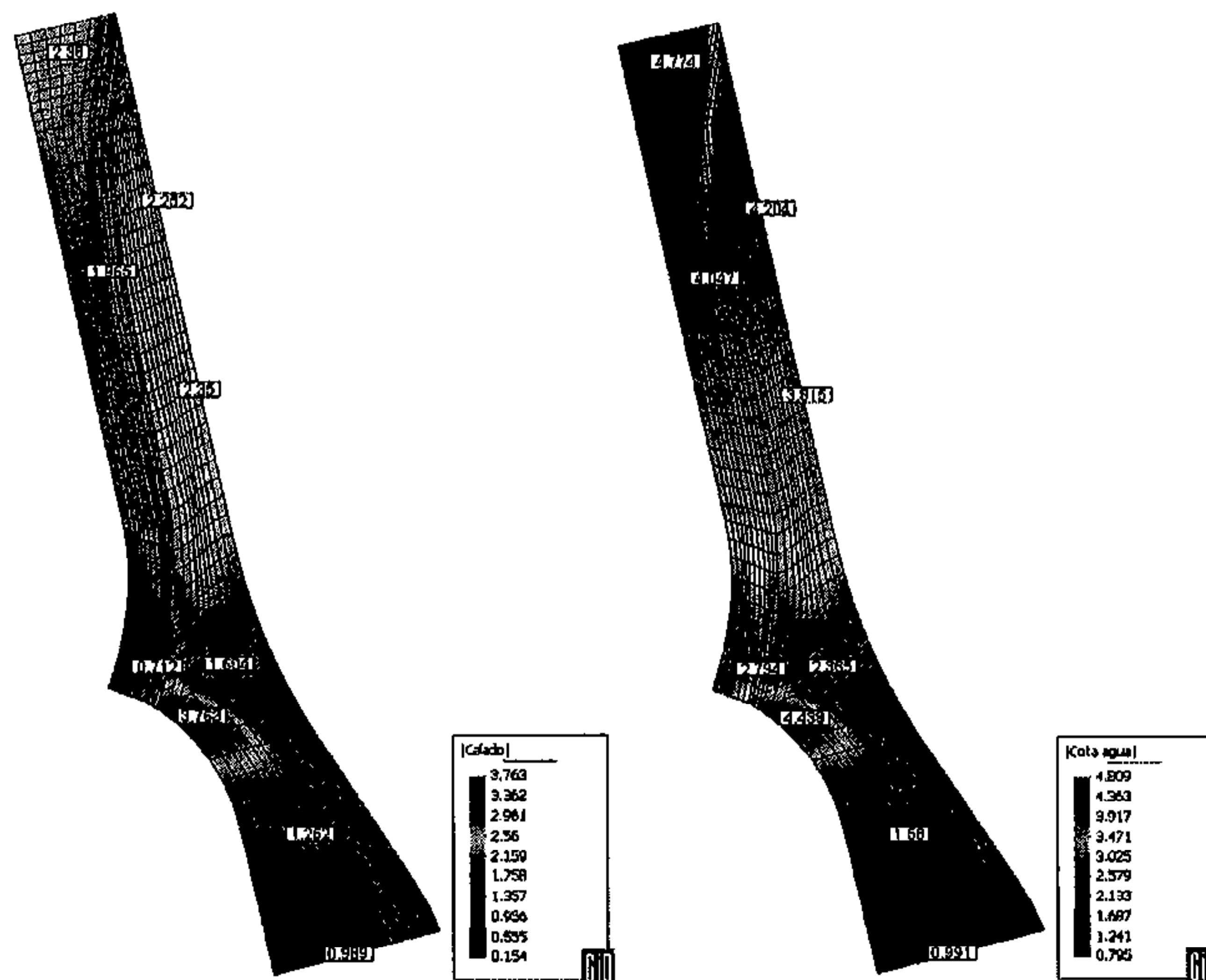


Figura 9.61. Calado (izquierda) y cota de lámina de agua (derecha) para un caudal de $196\text{m}^3/\text{s}$

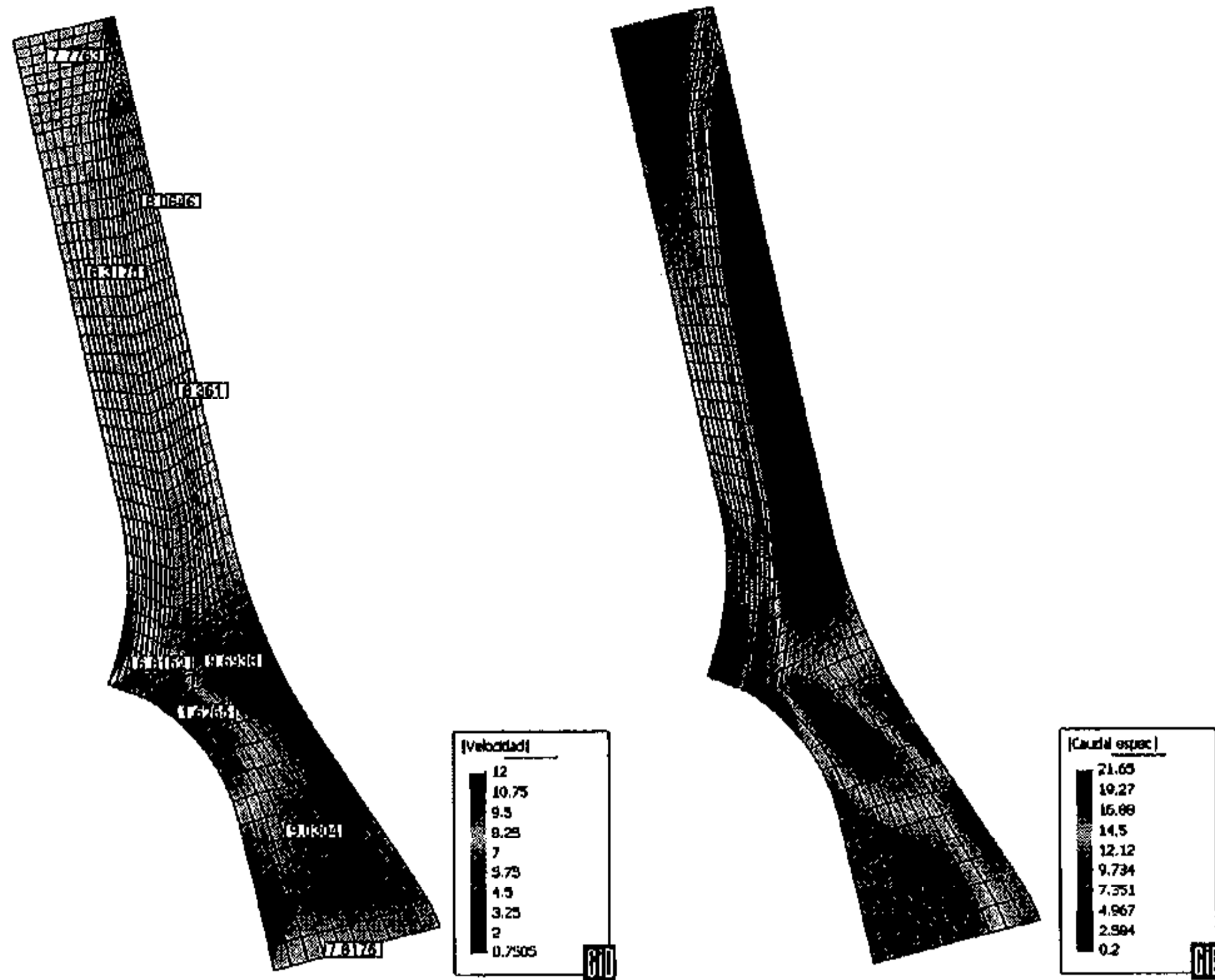


Figura 9.62. Velocidad (izquierda) y caudal específico (derecha) para un caudal de 196m³/s

Funcionamiento hidráulico para caudales reducidos

Cuando el Barranco de Barenys transporta un caudal inferior o igual 6.25 m³/s todo el caudal es derivado. En la Figura 9.63 y Figura 9.64 se presentan, en escalera de colores, el resultados para el caudal de 6.25 m³/s.

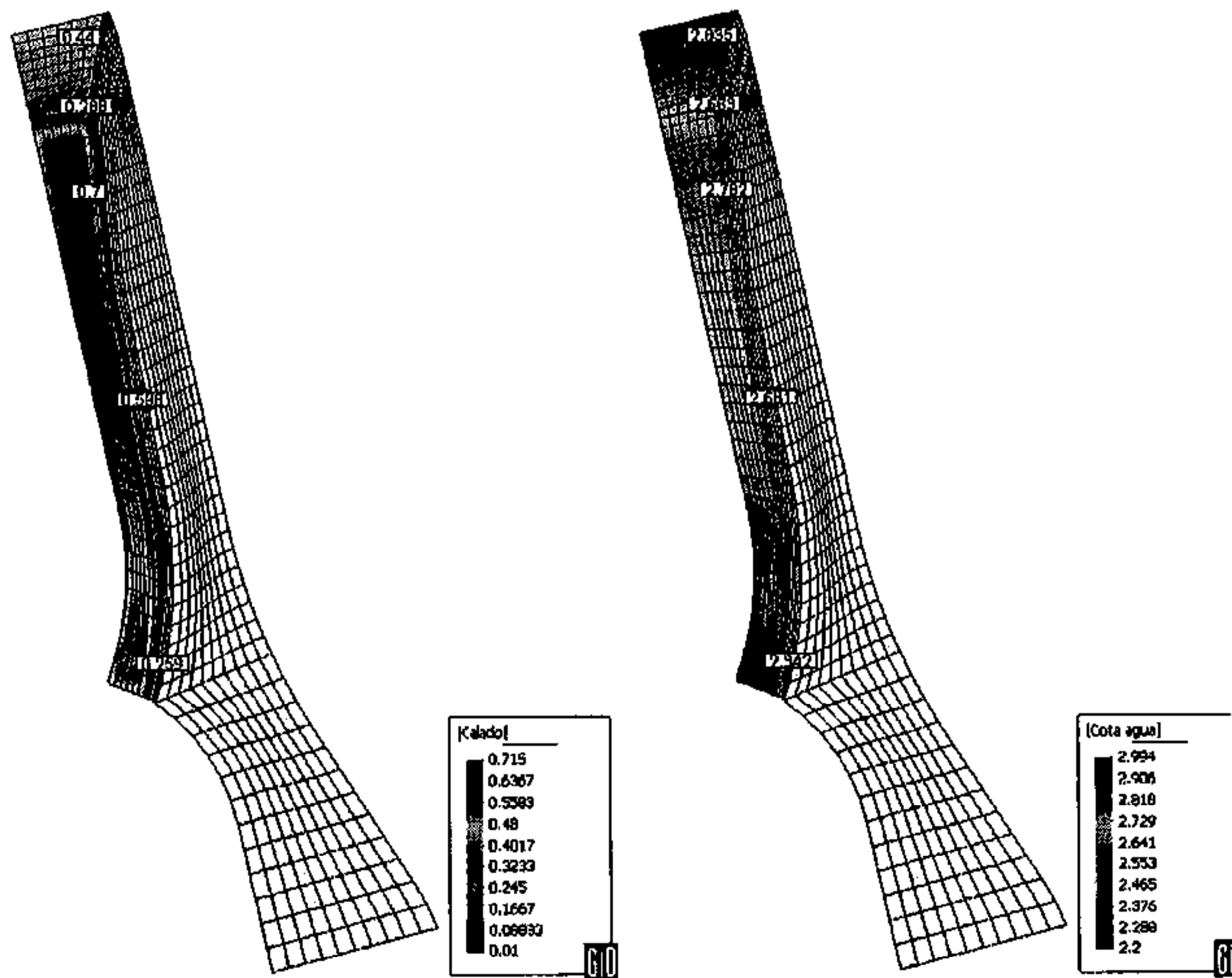


Figura 9.63. Calado (izquierda) y cota de lámina de agua (derecha) para un caudal de 6.25m³/s

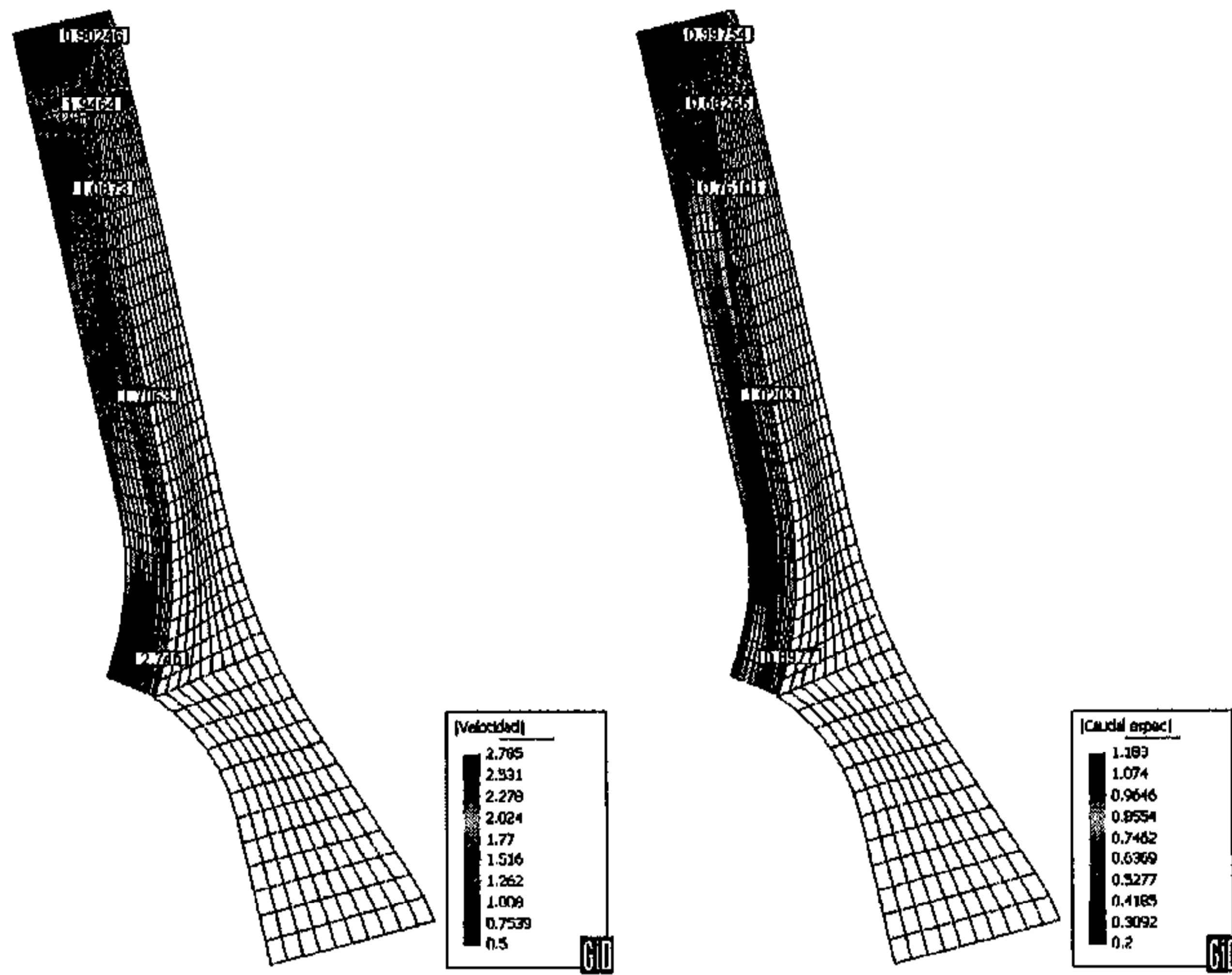


Figura 9.64. Velocidad (izquierda) caudal específico (derecha) para un caudal de 6.25m³/s

Referencias

- [1] Abbott, M.B., Damsgaard, A., Rodenhuis, G.S. *System 21 Jupiter (A design system for two-dimensional nearly-horizontal flows)*. J. Hydr. Res. Vol 11, No. 1. 1972
- [2] Abbott, M.B., Cunge, J.A. *Two dimensional Modelling of Tidal Deltas and Estuaries. 18th Chapter in Unsteady Flow in Open Channels (Vol II)* by Mahmood, K., Yevjevich, V. Water Resources Publication. Fort Collins, Colorado, USA. 1975.
- [3] Abbott, M.B. *Computational Hydraulics*. Pitman, London, 1979.
- [4] ACA *Recomanacions techniques per a la redacció d'estudis d'inundabilitat*. Guia Tècnica. Agència Catalana de l'Aigua. Generalitat de Catalunya 2'3
- [5] Alcrudo, F. *Esquemas de alta resolución de variación total decreciente para el estudio de flujos discontinuos de superficie libre*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Septiembre de 1992.
- [6] Alcrudo, F., García-Navarro, P., Saviron, J.M. *Flux difference splitting for 1D channel flow equations*. Int. J. Num. Meth. Fluids. Vol 14, 1009-1018, 1992(a).
- [7] Alcrudo, F., García-Navarro, P. *A TVD Scheme in finite volumes for the Simulation of 2D Discontinuous Flow*. Jornadas de encuentro trilateral para el estudio de la hidráulica de las ondas de submersión. Zaragoza, 10-11 de Septiembre de 1992 (b).
- [8] Alcrudo, F., García-Navarro, P. *A High Resolution Godunov Type Scheme in Finite Volumes for the 2D Shallow water equations*. Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol 16, 489-505 1993.
- [9] Alcrudo, F., García-Navarro, P. *Computing Two dimensional Flood Propagation with a High Resolution extension of McCormack's Method*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [10] Aleán Rocha, C.M. *Modelación numérica de flujo a superficie libre. Método de las características (x,y,t). Aplicación en el sistema lagunar de Nichup-té, Qna*. ROO, México. Tesis doctoral para obtener el grado de Maestro en Ingeniería (Hidráulica). Ciudad Universitaria, México D.F. Septiembre de 1997.
- [11] Ambrosi, D. Saleri, F. *A 2D numerical simulation of the Po river delta flow*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [12] Aral, M. M., Zhang, Y., Jin, S. *Application of Relaxation Scheme to Wave-Propagation Simulation in Open-Channel Networks*. J. Hydr. Engrg, Vol. 124, No. 11, November, 1998.
- [13] Bates, P.D., Anderson, M.G., Hervouet, J.-M., *Initial Comparison of two two-dimensional finite element codes for river flood simulation*. Proc. Instn. Civ. Engrs. Wat. Marit. & energy, 112, Sept. 1995.
- [14] Bechteler, W., Nujic, M., Otto, A.J. *Calculation of 2D flood propagation using the program package FLODISM*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [15] Berezowsky, M. *Cálculo de turbulencia en flujos a superficie libre*. Sección de Ing. Hidráulica e Hidrológica. ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, septiembre de 1993.
- [16] Bijvelds, M.D.J.P., Kranenburg, C., Stelling, G.S. *3D Numerical Simulation of Turbulent Shallow-Water Flow in Square Harbour*. J. Hydr. Engrg, Vol.125, No. 1, January, 1999.
- [17] Bladé, E., Gómez, M., Dolz, J. *Quasi-two dimensional modelling of flood routing in rivers and flood plains by means of storage cells*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.

- [18] Bladé, E. *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado con esquemas en volúmenes finitos en una y dos dimensiones*. Tesis Doctoral. FLUMEN. E.T.S. Ing. de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, UPC. Julio de 2005.
- [19] Bonillo, J.J., Vázquez, M.E., Suárez, J., Puertas, J. *Estudio numérico experimental del flujo bidimensional y del transporte de contaminantes en lámina libre*. IAHR XVIII Congreso Latinoamericano de hidráulica. Oxaca, México, Octubre, 1998.
- [20] Boss International, Inc. and Brigham Young University. *SMS Reference Manual*. Brigham Young University – Engineering Computer Graphics Laboratory, 1997.
- [21] Brufau, P. *Simulación bidimensional de flujos hidrodinámicos transitorios en geometrías irregulares*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, 2000.
- [22] Burguete, J. García-Navarro, P. *Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms: application to shallow water flows*. Int. J. Numer. Meth. Fluids 37:209-248, 2001.
- [23] Burguete, J. García-Navarro, P. *The application of a high resolution TVD conservative scheme to river flood*. Proceedings of River Flow 2002 International Conference on Fluvial Hydraulics, September 4 - 6, 2002, Louvain-la-Neuve, Belgium 2002.
- [24] Burguete, J. García-Navarro, P. *Improving simple explicit methods for unsteady open channel and river flow*. Int. J. Numer. Meth. Fluids 45; 125-156, 2004.
- [25] Capart, H., Elfhó, T.I., Huang, S.Y., Young, D.L., Zech, Y.. *Treatment of Natural Geometry in Finite Volume River Flow Computations*. J. Hydr. Engrg, Vol.129, No. 5, May 2003.
- [26] Casulli, V. *A semi-implicit numerical method for free-surface flows on unstructured grids*. Numerical modelling of hydrodynamic systems. Zaragoza, June 1999.
- [27] Cetina, M., Rajar., R. *Two-Dimensional Dam Break Flow Simulation in Sudden Enlargement*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [28] Chaudhry, M.H. *Open Channel Flow*. Prentice Hall, New Jersey , 1993.
- [29] Courant, R., Hilbert, D. *Methods of mathematical Physics*. Interscience Publ. New York, 1962.
- [30] Cubells, R. *Construcció d'un model hidrològic a partir de la resolució de les equacions completes de Saint Venant en dues dimensions*. Tesina d'Especialitat. E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona. UPC. Juliol de 2004.
- [31] Cunge, J.A. *Two-dimensional modelling of flood plains*. En Mahmood, K, Yevjevich, V. Unsteady Flow in Open Channels. W.P.R. Fort collins, 1975.
- [32] Cunge, J.A. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman, London 1980.
- [33] Danish Hydraulics Institute. <http://www.dhisoftware.com/>
- [34] D'Alpaos, L. Defina, A. *2D Finite element modelling of flooding due to river bank colapse*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [35] DEHMA. Secció d'Enginyeria Hidràulica i Hidrològica. ANHELL. Anàlisi hidràulica del tram final del riu Llobregat. Barcelona, 1995.
- [36] DEHMA. Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. *Estudio en modelo reducido de las obras de recuperación medioambiental del tramo final del cauce del río Besò*. Estudio realizado por encargo de Taller d'Enginyeries y Barcelona Regional. Barcelona, Marzo de 1999.

- [37] DEHMA. Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. *Estudio hidráulico en modelo reducido del tramo final del río Francolí.* Estudio realizado por encargo de la Agència Catalana de l'Aigua. Barcelona, Febrero de 2002.
- [38] DEHMA. Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. *Estudio hidráulico del río Segre en el entorno del canal de eslalon de Ponts (Noguera).* Estudio realizado por encargo de Gaena Environment S.L. Barcelona, junio de 2003.
- [39] DEHMA. Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. *Comportamiento hidráulico de los ríos Llierca y Fluvià y su relación con el nuevo puente y enlace previstos en la duplicación de la N-260.* Estudio realizado por encargo de la Demarcación de Carreteras del estado en Cataluña. Barcelona, julio de 2004.
- [40] Di Giammarco, P. Todini, E. *A control volume finite element method for the solution of 2-D overland flow problems.* Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [41] Elliot, R.C., Chaudhry, m.H. *A wave propagation model for two-dimensional dam-break flows.* J. Hydr. Research, Vol. 30, No. 28, 1993.
- [42] Espino, M. Estabilización de la superficie libre en la solución de ecuaciones Shallow-Water por elementos finitos.. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona. 1994.
- [43] Faeh, R. *Erosion-based dambreak simulation.* Hydroinformatics 96, Müller(ed). Balkema, Rotterdam, 1996.
- [44] Fennema, R.J., Chaudhry, M.H. *Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows.* J. Hydr. Research, Vol.27, No.3, 1989.
- [45] Fennema, R.J., Chaudhry, M.H. *Explicit Methods for 2-D Transient Free-Surface Flows.* J. Hydr. Engrg., Vol.116, No.8, August 1990.
- [46] FLUMEN. *Disseny de la geometria d'una estructura de separació de cabals a la nova llera del Barranc de Barenys (Salou).* Estudi realitzat a petició d'Invall. UPC, Barcelona, Setembre de 2005.
- [47] Franco, A. B. *Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens.* Tese submetida para obteção do grau de Doutor em Engenharia Civil pela Universidade Técnica de Lisboa. Setembro de 1996
- [48] García, M.A. Contribución al estudio de la circulación marina mediante el método de los elementos finitos. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona. 1990.
- [49] García-Navarro, P., Alcrudo, F. *High Resolution Schemes for Unsteady Open Channel Flow Simulation.* En Jornadas de encuentro trilateral para el estudio de la hidráulica de las ondas de submersión. Zaragoza, 10-11 de Septiembre de 1992
- [50] García-Navarro, P., Hubbard, M.E., Priestley, A. *Genuinely Multidimensional Upwinding for the 2D Shallow water Equations.* Journal of Computational Physics 121, 79-93, 1995.
- [51] Glaister, P. *Approximate Riemann solutions of the Shallow water equations.* J. Hydr. Research. Vol. 26, No. 3, 1988.
- [52] Godunov, S.K. *A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of fluid Dynamics.* Mat. Sb., 47:537-393, 1959.
- [53] Gómez, M. *Contribución al Estudio del Movimiento Variable en Lámina Libre, en las Redes de Alcantarillado. Aplicaciones.* Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya, 1988.
- [54] Harten, A. *On a class of high-resolution total-variation-stable finite-difference schemes.* SIAM J. Num. Analysis, Vol.21, 1-23, 1984.

- [55] Harten, A. *High resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. J. Comp. Physics 49,357,1982.
- [56] Harten, A., Hyman, P. *Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws*. J. Comp.. Physics 50, 235-269, 1983.
- [57] Harten, A., Lax, P.D., Van Leer, B. *Upstream differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic conservation Laws*. SIAM Review, 25(1):35-61, 1983.
- [58] Harten, A., Osher, O., *Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes. I*, SIAM Journal of Numerical Analysis. Vol. 24, No. 2, 1987.
- [59] Henderson, F.M. *Open Channel flow*. Macmillan Publishing Co., Inc. New York 1966.
- [60] Hervouet, J.-M., Janin, J.-M. *Finite element Algorithms for Modelling Flood Propagation*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [61] Hicks, F.E., Steffler, P.M. *Characteristic Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow*. J. Hydr. Engrg. Vol 118, No. 2, February 1992.
- [62] Hirsh, Ch. *Numerical Computation of internal and external Flows. Volume 2, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- [63] Hubbard, M.E., García-Navarro, P. *Flux difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients*. Journal of Computational Physics 165, 89-125, 2000.
- [64] Hudson, J. *Numerical Techniques for the Shallow Water*. Numerical analysis Report 2/99. The University of Reading, February 1999.
- [65] Jeffrey, A. *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*. Research Notes in Mathematics no.5, Pitman, 1976.
- [66] Jha, A.K., Akiyama, J., Ura, M. *First- and Second-Order Flux Difference Splitting Schemes for Dam-Break Problem*. J. Hydr. Engrg. Vol. 121, No. 12, December 1995.
- [67] Jha, A.K., Akiyama, J., Ura, M. *A fully conservative Beam and Warming scheme for transient open channel flows*. J. Hydr. Research, Vol. 34, No. 5, 1996.
- [68] Jiménez, O.F., Chaudhry, M.H. *Computation of Supercritical Free-Surface Flows*. J. Hydr. Engrg, Vol.114, No. 4, April, 1987.
- [69] Katopodes, N.D., Strelkoff, T. *Computing two-dimensional dam-break flood waves*. J. Hydr. Division No. 104 HY9:1269-88, 1978.
- [70] Katopodes, N.D. *A dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow*. J. Hydr. Engrg. Vol 110, No. 4, April 1984a.
- [71] Katopodes, N.D. *Two dimensional surges and shocks in Open Channels*. J. Hydr. Engrg. Vol 110, No. 6, June 1984b.
- [72] Katopodes, N.D. *Control of shallow water flow and transport*. Numerical modelling of hydrodynamic systems. Zaragoza, June 1999.
- [73] Leclerc, M. *A finite element model of estuarian and river flows with moving boundaries*. Adv. Water Resources, Vol. 13, No. 4, 1990.
- [74] Lendertsee, J.J. *Aspects of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation*. RM-2594-PR, The Rand corporation, Santa Monica, Calif., May 1967.

- [75] MacDonald, I. *Analysis and computation of steady open channel flow*. Ph. Tesis. University of Reading, 1996.
- [76] Mahmood, K. Yevjevich, V. *Unsteady Flow and Open Channels*. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, 1975.
- [77] Martín, J.P. *Estudio Hidráulico de la Propagación del Resalto Móvil*. Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya, 1989.
- [78] Martín-Vide, J.P., López, S., Martín, P. *Improving 1-D modelling of open channel flow in compound channels*. IAHR 2nd International Conference on Fluvial Hydraulics. Naples, 2004.
- [79] Menéndez, A.N. *Simulación numérica de flujos Cuasi-Bidimensionales a Superficie Libre*. Informe LHA-INCYTH 55-016-85 Argentina, 1985.
- [80] Mohammadi, B., Pironneau, O. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. Jhon Wiley & Sons, 1994.
- [81] Monsó, J.L. *Modelado numérico del flujo en zonas costeras*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona. 1986.
- [82] Montefusco, L. Valiani, A. *A comparison between computed and measured bed evolution in a river bend*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [83] Molls, T., Chaudhry, M.H. *Depth-Averaged Open-Channel Flow Model*. J. Hydr. Engrg, 453-465. June 1995.
- [84] Naaim, M., Brugnot, G. *Free surface flow modelling on complex topography*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [85] Nania Escobar, L. S. *Metodología numérico-experimental para el análisis del riesgo asociado a la escorrentía pluvial en una red de calles*. Tesis doctoral. Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. Depto. de Ing. Hidráulica, M. y A. UPC. Barcelona, agosto 1999.
- [86] Neary, v.S., Sotiropoulos, F., Odgaard, J. *Three-Dimensional Numerical Model of Lateral-Intake Inflows*. J. Hydr. Engrg, Vol.125, No. 2, February, 1999.
- [87] Nezu, I., Nakagawa, H. *Turbulence in Open Channel Flows*. IAHR Monograph. A.A. Balkema, Rotterdam, 1993.
- [88] Nujic, M. *Efficient Implementation of Non-Oscillatory Schemes for the computational of free surface flows*. J. Hydr. Research, Vol. 33, No. 1, 1995.
- [89] Osher, S., Solomon, F. *Upwind Difference schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Mathematics of Computation, 38 (158), 339-374, 1982.
- [90] Paquier, A. *New Methods for Modelling Dam-Break Wave*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [91] Pender, G. *Maintaining numerical stability of flood plain calculations by time increment splitting*. Proc., Instn Civ. Engrs Wat., Marit & Energy, 96, Mar. 1992.
- [92] Ponce, V.M., Yabusaki, S.B. *Modeling circulation in Depth-Averaged Flow*. ASCE J. Hydr. Division 107 (HY11) November 1991.
- [93] Rodi, W. *Turbulence Models and their Application in Hydraulics*. State-of-the-Art Paper. IAHR 1980.
- [94] Roe, P.L. *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*. J. Comp. Physics, 43, 357-372, 1981.

- [95] Scarati, J.R. *Escoamento bidimensional – Modelo de diferenças finitas implícito*. AIHR XIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica, 1993.
- [96] Shettar, A.S., Murthy, K.K. *A numerical study of division flow in open channels*. J. Hydr. Research, Vol. 34, No. 5, 1996.
- [97] Shu, C., Osher, S. *Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory shock capturing schemes*. J. Comp. Physics, 77, 439-471, 1986.
- [98] Steger, J.L., Warming, R.F. *Flux vector splitting of inviscid gas dynamic equations with application to finite-difference methods*. J. Comp. Phys., 40 263-293 (1981).
- [99] Sweby, P.K. *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*. SIAM. J. Numer. Anal, 21, 1984.
- [100] Tan, W. *Shallow Water Hydrodynamics*. Naging Research Institute of Hydrology and Water Resources. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992.
- [101] Tayfur, G., Kavaas, M.L., Govindaraju, R.S., Storm, D.E. *Applicability of St. Venant Equations for Two-dimensional Overland Flows over Rough Infiltrating Surfaces*. J. Hydr. Engrg, Vol 119, No. 1, January 1993.
- [102] Tchamen G.W, Kahawita, R. *The numerical simulation of wetting and drying areas using Riemann Solvers*. Modelling of Flood Propagation Over Initially Dry Areas. Speciality Conference. ASCE-ENEL. Milan 1994.
- [103] Tingsanchali, T., Chirananont, B. *Investigation of flow circulation in a channel side pool*. Environmental Hydraulics, Lee & Cheung (eds). Balkema, Rotterdam 1991
- [104] Toro, E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. A Practical Introduction. Springer- Verlag Berlin Heidelberg 1997.
- [105] Trento, A.E., Borche, A., Vinzón, S., Alvarez, A., Venturini, V. *Aplicación de un modelo 2D-H con fuertes gradientes batimétricos*. IAHR XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Santiago, Chile, 1994.
- [106] Tseng, M. *Improved treatment of source terms in TVD écheme for shallow water equations* Advances in water resources 27 617-629, 2004.
- [107] Unami, K., Kawachi, T., Munir Babar, M. Itagaki, H. *Two-Dimensional Numerical Model of Spillway Flow*. J. Hydr. Engrg, Vol.125, No. 4, April, 1999.
- [108] U.S. Army Corps of Engineers – Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory. *Users Guide to RMA2 Version 4.3*. WexTech Systems Inc. New York, 1996.
- [109] U.S. Federal Highway Administration (FHWA) *Finite Element Surface Water Modeling System:2-Dimensional Flow in a Horizontal Plane (FESWMS-2DH)*
- [110] Van Leer, B. *Flux Vector Splitting of the Euler Equations*. Lecture Notes in Physics. Vol 170, 507-512. Springer-Verlag, New York/Berlin (1982).
- [111] Van Leer, B. *Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for Ideal Compressible Flow*. J. Comp. Physics 23, (1977a).
- [112] Van Leer, B. *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Secon-Order Sequel to Godunov's method*. J. Comp. Physics 32, 101-136 (1979).
- [113] Van Leer, B. *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*. J. Comp. Physics 23, (1977b).

- [114] Valiani, A. *Rapid transients in free-surface flows with movable bed: a 2-D numerical solution*. Hydrocomp'92. Int. Conf. on Interaction of Comp. Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology. Budapest, May 1992.
- [115] Vázquez-Cendón, M.E. *Improved treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry* J. Comput. Physiscs 148, 497-526, 1999a.
- [116] Vázquez-Cendón, M.E. *Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels* in Proceedings of the Int. Workshop on Numerical Modelling og Hydrodynamic Systems. Zaragoza, 1999b.
- [117] Vázquez-Cendón, M.E. *Implicit and Explicit Upwind Schemes for the 2D Shallow Water Equations* in Proceedings of the Int. Workshop on Numerical Modelling og Hydrodynamic Systems. Zaragoza, 1999c.
- [118] Villanueva, I. *Estudio de regímenes transitorios y permanentes en ríos y canales*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, 1999.
- [119] Vongvisessomjai, S., Tingsanchali., T., Chaiwat, C. *Bangkok Flood Plain Model*. "1st IAHR Congress, Melbourne, Australia, 1985.
- [120] Vreugdenhil, C.B., Wijnbenga, J.H.A. *Computation of flow patterns in rivers*. ASCE J. Hydr. Division (HY11) Nov 1982.
- [121] Vreugdenhil, C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [122] Waterways Experiment Station. *HIVEL 2D Users Manual*. Coastal and Hydraulica Laboratory, 1997.
- [123] Yang, J.Y., Chang, S.H., Hsu, C.A. *Computations of free surface flows. Part1: One-dimensional dam-break flow*. J. Hydr. Research, Vol 31, No. 1, 1993.
- [124] Zhang, W., Cundy, T.W. *Modeling of Two-Dimensional Overland Flow*. Water Resources Research, Vol. 25, No. 9, September 1989.
- [125] Zhao, D.H., Shen, H.W., Lai, J.S., Tabios III, G.Q. *Approximate Riemann Solvers in FVM for 2D Hydrasulic Shock Wave Modeling*. J. Hydr. Engrg, Vol. 122, No. 12, December, 1996.
- [126] Zhao, D.H., Shen, H.W., Tabios III, G.Q., Lai, J.S., Tan, W.T. *Finite-Volume Two-Dimensional Unsteady-Flow Model for River Basins*. J. Hydr. Engrg., Vol. 120, No. 7, July, 1994.

