Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 8, 2, 207–213(1992)

SOLUCION DE SISTEMAS ACOPLADOS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN SIN AUMENTAR LA DIMENSION DEL PROBLEMA

L. JODAR
E. NAVARRO
y
J.L. MORERA

Dpto. de Matemática Aplicada,
Universidad Politécnica de Valencia,
Apdo. 22.012, Valencia 46071.

RESUMEN

En este artículo se estudian condiciones de existencia de soluciones de problemas de contorno para sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias de segundo orden. Condiciones de existencia y expresión explícita de la solución general del problema son dadas sin aumentar la dimensión del problema.

SUMMARY

In this paper boundary value problems for coupled systems of second order difference equations. Existence conditions and explicit closed form expression of the general solution of the problem are given without increasing the problem dimension.

INTRODUCCION

El estudio de sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias del tipo

$$y(n+2) + A_1 y(n+1) + A_0 y(n) = f(n) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &E_1 y(0) + E_2 y(1) + E_3 y(N-1) + E_4 y(N) = E_5 \\ &F_1 y(0) + F_2 y(1) + F_3 y(N-1) + F_4 y(N) = F_5 \,, \quad 0 \leq n \leq N-2 \end{aligned} \tag{2}$$

donde A_0, A_1, E_i, F_i, para $1 \leq i \leq 4$, son matrices cuadradas con coeficientes complejos, elementos de $\mathbb{C}_{rxr}, y$ $E_5, F_5, f(n), y(n)$, son vectores en $\mathbb{C}_r$, aparecen tanto en la discretización de problemas continuos relacionados con sistemas diferenciales, como en la representación de modelos discretos relacionados con simulación digital, sistemas

Recibido: Febrero 1991

 ISSN 0213–1315

controlados por ordenador, o en problemas relacionados con economía, sociología y biología, véanse las referencias citadas en [3].

El estudio de problemas de valores iniciales y de contorno relacionados con el sistema (1), suele tratarse mediante la consideración del sistema extendido de primer orden

$$z(n+1)=\begin{bmatrix}0 & I\\ -A_0 & -A_1\end{bmatrix} z(n)+\begin{bmatrix}0\\ f(n)\end{bmatrix}\ ;\ z(n)=\begin{bmatrix}y(n)\\ y(n+1)\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & I\\ -A_0 & -A_1\end{bmatrix} \tag{3}$$

sin embargo, este enfoque presenta inconvenientes computaciones derivados del aumento de la dimensión del problema. Para evitar estos inconvenientes, en [3] se propone un método que estudia dichos problemas sin aumentar la dimensión del problema, basado en la existencia de soluciones invertibles de la ecuación caracteristica matricial

$$Z^2+A_1Z+A_0=0, \quad A_0, A_1 \in \mathbb{C}_{rxr} \tag{4}$$

Desgraciadamente, la ecuación (4) puede no admitir soluciones[2], o aún admitiéndolas, pueden no ser invertibles, por ejemplo, si A_0 es singular, entonces las posibles soluciones de (4) deben ser singulares si $A_1 = 0$.

El objetivo de este artículo es estudiar la existencia de solución y el cálculo de las soluciones de problemas del tipo (1) – (2), sin considerar el sistema ampliado (3), y sin exigir la existencia de soluciones de (4).

Si A es una matriz en $\mathbb{C}_{pxp}$, denotaremos por A^+ su inversa Moore-Penrose, y recordamos que sus propiedades pueden encontrarse en [1] y que su computación es sencilla utilizando el sistema MATLAB.

SOBRE LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION (1)

Con objeto de facilitar la comprensión de lo que sigue, empezaremos esta sección introduciendo dos definiciones y un teorema que aparecen en [2, 4].

DEFINICION 1. Decimos que (X,T) es una (r,m) co-solución de la ecuación (4), si $X \in \mathbb{C}_{rxm}$, $X \neq 0$, $T \in \mathbb{C}_{mxm}$ y $XT^2 + A_1XT + A_0X = 0$.

DEFINICION 2. Sea (X_i,T_i) una (r,m_i) co-solución de (4) para $1 \leq i \leq k$, con $m_1+m_2+\cdots+m_k = 2r$. Decimos que $\{(X_i,T_i);\ 1 \leq i \leq k\}$ es un conjunto k-completo de co-soluciones de (4), si la matriz por bloques $W = (W_{ij}) = (X_jT_j^{i-1})$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq k$, es invertible en $\mathbb{C}_{2rx2r}$.
El siguiente teorema nos muestra que toda ecuación del tipo (4) admite un conjunto k-completo de co-soluciones, siendo k el número de bloques de la forma canónica de Jordan de la matriz compañera C definida en (3). Es importante notar que dicho teorema nos construye el sistema k-completo de co-soluciones y que la forma de Jordan de una matriz se calcula con MACSYMA.

TEOREMA 1. ([4]). Sea $J = \text{diag}\ (J_1, \cdots, J_k)$ la forma canónica de Jordan de la matriz C definida en (3) y sea $M = (M_{ij})\ C_{2rx2r}$ invertible, con $M_{ij} \in \mathbb{C}_{rxm_j}$ y $m_1 + \cdots + m_k = 2r$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq k$, tal que $MJ = CM$. Entonces el conjunto $\{(M_{1j}, J_j),\ 1 \leq j \leq k\}$ es un conjunto k-completo de co-soluciones de la ecuación algebraica matricial (4).

Ahora nos proponemos definir un concepto que nos permitirá tomar el número mínimo de co-soluciones para resolver problemas del tipo (1), lo que presenta las obvias ventajas de reducir el volumen computacional necesario para resolver dichos problemas.

DEFINICION 3. Sea $\Omega = \{(X_i, T_i);\ 1 \leq i \leq h\}$ un conjunto de co-soluciones de la ecuación (4). Definimos el rango del conjunto Ω, al rango de la matriz $[X_1, \cdots, X_h]$. Decimos que Ω es un conjunto minimal de co-soluciones de (4) si el rango es r y para cualquier subconjunto propio de Ω su rango es estrictamente inferior a r.

Obsérvese que si $\{(X_i, T_i);\ 1 \leq i \leq k\}$ es un conjunto k-completo de co-soluciones de (4), entonces el rango de la matriz $[X_1, \cdots, X_k]$ es r. De este modo siempre se puede extraer un subconjunto de él, de modo que sea minimal.

Sea (X_i, T_i) una (r, m_i) co-solución de (4) para $1 \leq i \leq r$, y sea $\Omega = \{(X_i, T_i);\ 1 \leq i \leq h\}$ un conjunto minimal de co-soluciones. Denotemos por X_0, T_0, las matrices definidas por

$$X_0 = [X_1, X_2, \cdots, X_h] \quad , \quad T_0 = \text{diag}\ (T_1, T_2, \cdots, T_h) \tag{5}$$

y sea

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_h \geq r \tag{6}$$

si p es unvector en $\mathbb{C}_m$, entonces la sucesión

$$z(n) = X_0 T_0^n p, \quad n \geq 0 \tag{7}$$

es solución del sistema homogéneo

$$y(n+2) + A_1 y(n+1) + A_0 y(n) = 0 \tag{8}$$

porque de la definición de co-solución se sigue que

$$\begin{aligned} z(n+2) + A_1 z(n+1) + A_0 z(n) &= (X_0 T_0^2 + A_1 X_0 T_0 + A_0 X_0) T_0^n p = \\ &= \text{diag}\ (X_i T_i^2 + A_1 X_i T_i + A_0 X_i) T_0^n p = 0 \quad 1 \leq i \leq h \end{aligned}$$

Ahora buscamos soluciones del sistema no-homogéneo (1) de la forma

$$y(n) = X_0 T_0^n p(n), \quad n \geq 0 \tag{9}$$

donde $p(n)$ es una sucesión a determinar, que toma valores en $\mathbb{C}_m$.

De (9) tenemos que

$$\begin{aligned} y(n+1) &= X_0 T_0^{n+1} p(n) + X_0 T_0^{n+1}(p(n+1) - p(n)) \\ y(n+2) &= X_0 T_0^{n+2} p(n) + X_0 t_0^{n+2}(p(n+1) - p(n)) \\ &\quad + X_0 T_0^{n+2}(p(n+2) - p(n+1)) \end{aligned} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta (9) y (10), si imponemos que $y(n)$ definida por (9) satisfaga el sistema (1), resulta que $p(n)$ debe satisfacer

$$(X_0T_0+A_1X_0)T_0^{n+1}(P(n+1)-P(n))+X_0T_0^{n+2}(p(n+2)-p(n+1)) = f(n), \quad n \geq 0 \quad (11)$$

Denotemos por $R(n)$ la sucesión definida por

$$R(n) = T_0^{n+1}(P(n+1) - P(n)), \quad n \geq 0 \quad (12)$$

De (11) y (12), se sigue que la sucesión $R(n)$ debe satisfacer el sistema

$$X_0R(n+1) + (X_0T_0 + A_1X_0)R(n) = f(n), \quad n \geq 0 \quad (13)$$

del que una familia de soluciones queda descrita por la expresión

$$\begin{gathered} R(n) = X_0^+ \Big\{(-1)^n(A_1 + X_0T_0X_0^+)^n q \\ + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}(A_1 + X_0T_0X_0^+)^{n-i-1}f(i)\Big\}, \quad n \geq 1 \\ R(0) = X_0^+q, \quad q \in \mathbb{C}_r \end{gathered} \quad (14)$$

como se demuestra directamente.

De (12) se sigue que

$$\begin{aligned} T_0^n p(n) &= \sum_{i=1}^{n} T_0^{n-i}R(i-1) + T_0^n p \\ &= T_0^n p + T_0^{n-1}R(0) + \sum_{i=2}^{n} T_0^{n-i}R(i-1), \ n \geq 1, \ p = p(0) \in \mathbb{C}_m \end{aligned} \quad (15)$$

y de (9), (14), (15), obtenemos que

$$\begin{gathered} y(n) = X_0 \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}T_0^{n-i}X_0^+(A_1 + X_0T_0X_0^+)^{i-1}q + X_0T_0^n p \\ +X_0 \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=0}^{i-2} T_0^{n-i}X_0^+(-1)^{i-j}(A_1 + X_0T_0X_0^+)^{i-j-2}f(j), \quad n \geq 2 \\ y(0) = X_0p, \quad y(1) = q + X_0T_0p, \quad p \in \mathbb{C}_m, \quad q \in \mathbb{C}_r \end{gathered} \quad (16)$$

Veamos que $y(n)$ definida por (16) representa la solución general de (1). Obsérvese que por construcción $y(n)$ dada por (16) es solución de (1) para vectores $p \in \mathbb{C}_m$, $q \in \mathbb{C}_r$. Sea ahora $\{x(n)\}$ una solución de (1) que satisface las condiciones iniciales $x(0) = c_0 \in \mathbb{C}_r$, $x(1) \in \mathbb{C}_r$. De la unicidad de la solución de (1), para condiciones iniciales dadas, es suficiente demostrar que existen vectores $p \in \mathbb{C}_m$, $q \in \mathbb{C}_r$, tales que $y(n)$ definida por (16) satisface las condiciones $y(0) = c_0$, $y(1) = c_1$.

Una solución del sistema algebraico $y(0) = X_0p = c_0$, $y(1) = q + X_0T_0p = c_1$, viene dada por

$$p = X_0^+ c_0, \quad q = c_1 - X_0 T_0 X_0^+ c_0 \tag{17}$$

porque $X_0 X_0^+ = I$, véase el teorema 1.2.2 de [1]. De este modo el siguiente resultado ha sido demostrado:

TEOREMA 2. Sea $\Omega = \{(X_i, T_i);\ 1 \le i \le h)\}$ un conjunto minimal de co-soluciones de la ecuación (4), y sean X_0, T_0, las matrices definidas por (5), m definido por (6), con $X_i \in \mathbb{C}_{rxm_i}$, $T_i \in \mathbb{C}_{m_i x m_i}$, $1 \le i \le h$. Entonces la solución general del sistema acoplado (1) viene dado por (16), donde $p \in \mathbb{C}_m$, $q \in \mathbb{C}_r$.

El siguiente ejemplo muestra que un subconjunto propio de un sistema k-completo de co-soluciones de (4), puede ser un conjunto minimal, y que por tanto, con un tal sistema, se puede describir la solución general de (1).

EJEMPLO 1. Consideremos el sistema

$$y(n+2) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y(n+1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y(n) = f(n), \quad n \ge 0 \tag{18}$$

La matriz compañera C definida en (3) tiene la forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y se demuestra sin dificultad que tomando el valor propio $\lambda = 1$ de C, obtenemos

$$dim\ Ker(C-I) = 2, \quad dim\ Ker(C-I)^2 = dim\ Ker(C-I)^3 = 3$$

Los bloques de Jordan asociados al valor propio $\lambda = 1$ son $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T_2 = (1)$. Si denotamos por $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $\Omega = \{(X_1, T_1),\ (X_2, T_2)\}$ es un conjunto minimal de co-soluciones de la correspondiente ecuación (4), es decir, de

$$Z^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Las matrices X_0, T_0 definidos por (5) toman la forma

$$X_0 = [X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_0 = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y por el teorema 2 se sigue que la solución general de (18) viene dada por

$$y(2n) = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 1 \\ 1 & 2n & 0 \end{bmatrix} p + n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} q + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \{f(2i-2) + f(2i-1)\} + \sum_{i=0}^{n-1} f(2i),$$

$$y(2n+1)=\begin{bmatrix}1 & 2n+1 & 1\\ 1 & 2n+1 & 0\end{bmatrix}p+\left\{n\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}q+n\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}f(0)$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\{f(2i-1)+f(2i)\}+\sum_{i=0}^{n-1}f(2i+1)$$

$$y(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}q\,,\quad y(1)=q+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}p\,,\quad p\in\mathbb{C}_3,\quad q\in\mathbb{C}_2$$

PROBLEMAS DE CONTORNO

Consideremos el problema de contorno (1) – (2), para $N\geq 3$, y la notación de la sección 2. Por el teorema 2, la solución general de (1) viene dada por

$$y(n)=X_0T_0^np+g_1(n)q+g_2(n),\ \ n\geq 2,\ \ p\in\mathbb{C}_m,\ \ q\in\mathbb{C}_r,\ \ y(0)=X_0p,\ \ y(1)=q+X_0T_0p \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned} g_1(n)&=X_0\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}T_0^{n-i}X_0^+(A_1+X_0T_0X_0^+)^{i-1},\quad n\geq 2\\ g_2(n)&=X_0\sum_{i=2}^{n}T_0^{n-i}X_0+\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^{i-j}(A_1+X_0T_0X_0^+)^{i-j-2}f(j),\quad n\geq 2\end{aligned} \tag{20}$$

Imponiendo a la sucesión $y(n)$ definida por (19), que satisfaga las condiciones de contorno (2), resulta que los vectores p,q, deben satisfacer el sistema algebraico

$$S\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix} \tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned} S_{11}&=E_1X_0+E_2X_0T_0+E_3X_0T_0^{N-1}+E_4X_0T_0^N\quad ;\quad S_{12}=E_2+E_3g_1(N-1)+E_4g_1(N)\\ S_{21}&=F_1X_0+F_2X_0T_0+F_3X_0T_0^{N-1}+F_4X_0T_0^N\quad ;\quad S_{22}=F_2+F_3g_1(N-1)+F_4g_1(N)\end{aligned} \tag{22}$$

$$R_1=E_5-E_3g_2(N-1)-E_4g_2(N),\quad R_2=F_5-F_3g_2(N-1)-F_4g_2(N) \tag{23}$$

Por el teorema 2.3.2 de [5], el sistema algebraico (21) es compatible si y sólo si

$$(I-SS^+)\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}=0 \tag{24}$$

y bajo esta condición, la solución general de (21) viene dada por

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = S^+ \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + (I - S^+S)u, \quad u \in \mathbb{C}_{m+r} \tag{25}$$

De este modo la solución general del problema (1) – (2), viene dada por (16) donde $p \in \mathbb{C}_m$, $q \in \mathbb{C}_r$, estan determinados por (25). Hemos demostrado el resultado:

TEOREMA 3. Sea $\Omega = \{(X_i, T_i);\ 1 \leq i \leq h\}$ un conjunto minimal de co-soluciones de la ecuación (4), sean X_0, T_0, las matrices definidas por (5), se m el número definido por (6), y sean $S = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}, R_1, R_2$, las matrices definidas por (22) y (23) respectivamente. Entonces, el problema de contorno (1) – (2) admite soluciones si y sólo si se satisface la condición (24), y en este caso, la solución general del problema (1) – (2) viene dada por (19), (20), donde los vectores $p \in \mathbb{C}_m$, $q \in \mathbb{C}_r$, estan definidos por (25).

CONCLUSIONES

En este artículo resolvemos problemas de contorno para sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias de segundo orden, obteniendo una solución explícita de los mismos, previo análisis de su excistencia. Los resultados recientemente presentados en [3] son mejorados al no exigir la existencia de soluciones de cierta ecuación algebraica matricial asociada al problema.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente realizado con la ayuda de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, D.G.I.C.Y.T. proyecto PS87-0064.

REFERENCIAS

1. S.L. Campbell y C.D. Meyer, Jr., *"Generalized Inverses of Linear Transformations"*, Pitman, London, (1979).
2. L.Jódar y E. Navarro, "On Complete Sets of Solvents of Polynomial Matrix Equations", *Applied Maths. Letters*, Vol. **3** No.1, pp.15–18, (1990).
3. L. Jódar y J.L. Morera, "Solución de Problemas de Contorno para Ecuaciones en Diferencias Matriciales de Segundo Orden", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **6** No.3, pp. 397–407, (1990).
4. L. Jódar y E. Navarro, "Rectangular Co-solutions of Polynomial Matrix Equations and Applications", *Applied Maths. Letters*, (1991), en imprenta.
5. C.R. Rao y S.K. Mitra, *"Generalized Inverses of Matrices and its Applications"*, John-Wiley, New York, (1971).