

UN MODELO NUMERICO PARA EL ANALISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS LAMINARES DE REVOLUCION DE HORMIGON PRETENSADO

PEDRO ROCA
y
ANTONIO MARI

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Jordi Girona Salgado, 31
08034 BARCELONA
ESPAÑA*

RESUMEN

Se ha desarrollado un método numérico de análisis para el estudio de la respuesta no lineal, por la geometría y el material, de estructuras laminares de revolución de hormigón armado y pretensado. Para ello se ha utilizado el Método de los Elementos Finitos. La geometría de la lámina se modeliza mediante elementos isoparamétricos de tres nodos. Mediante un modelo multicapa se representa el armado y la variación de las propiedades del hormigón en el espesor de la lámina. El hormigón se considera sometido a un estado biaxial de tensiones en la lámina, y uniaxial en los anillos rigidizadores. El método incluye la modelización del pretensado y de sus efectos estructurales. El modelo desarrollado ha sido implementado numéricamente en el programa de ordenador *AXSHL*. El correcto funcionamiento del método ha sido comprobado mediante la comparación con resultados de ejemplos de solución analítica o numérica conocida. Los ejemplos numéricos presentados ilustran la validez del modelo realizado para la predicción de la capacidad última de estas estructuras, y de su comportamiento bajo altos niveles de carga en general.

SUMMARY

In this paper, a numerical method for the nonlinear geometric and material analysis of axisymmetric reinforced and prestressed concrete shell structures, is presented. This method is based on the Finite Element Technique of analysis. The shell geometry has been modelled by isoparametric elements of three nodes. A multi-layered model is used to describe the reinforcement and the changes in the concrete properties across the shell thickness. Concrete is assumed to be submitted to a biaxial stress state in the shell, and a uniaxial stress state in the ring-beams. The method includes the modelling of prestressing and its structural effects. Based on the present numerical model, a computer program (*AXSHL*) has been developed. The numerical method has been proved to yield good results by comparison with examples whose solution is known analytically or numerically. The numerical examples included in this paper also show the capability of the present model to predict the ultimate load of such structures as well as their general behavior under high load levels.

Recibido: Noviembre 1987

INTRODUCCION

Una gran variedad de estructuras laminares de hormigón armado y/o pretensado forman parte de la tipología de revolución: éste es el caso de los depósitos en general, edificios de contención, torres de refrigeración, cúpulas, etc. Su cálculo y dimensionamiento normalmente se realiza mediante métodos basados en la hipótesis de elasticidad lineal.

Las láminas de revolución, como las estructuras laminares de hormigón en general, presentan un comportamiento complejo y a menudo difícil de prever en proyecto. La fisuración, en particular, puede considerarse como la primera causa de la no linealidad en el comportamiento de tales estructuras, condicionando altamente su rango de servicio así como incluso su seguridad en muchos casos. Otros factores tales como las relaciones tenso-deformacionales no lineales de los materiales, los efectos diferidos y la propia esbeltez de la estructura (se trata de láminas delgadas fuertemente comprimidas), aumentan aún más las dificultades en la predicción de su comportamiento.

Con el uso de los actuales ordenadores y técnicas de cálculo sofisticadas como el Método de los Elementos Finitos, resulta hoy posible simular numéricamente el comportamiento de las estructuras de hormigón bajo estados generales de carga, a lo largo de sus fases elástica, fisurada y última. Resulta así posible un mayor conocimiento del rango de servicio y de la capacidad última, y en definitiva, de su seguridad. Tales métodos deben incorporar los efectos de carácter no lineal antes citados, ya sean de tipo geométrico (grandes corrimientos y deformaciones) o material (fisuración, plasticidad, etc).

Métodos de análisis no lineal han sido ya concebidos para casi todos los tipos de estructuras, y gran parte de los esfuerzos de investigación se centran actualmente en su desarrollo y mejora.

La mayoría de los trabajos sobre láminas de revolución incorporan la no linealidad geométrica, centrándose especialmente en el pandeo, como en el caso de Basu¹ y Gould². Oliver³ desarrolló un modelo para análisis no lineal por la geometría y el material (plasticidad) y Chan⁴ elaboró un método específico para láminas de hormigón armado, incluyendo ambas no linealidades y los efectos de retracción y fluencia.

Precisamente por su forma de trabajar, se hace conveniente dotar a muchas láminas de vigas de borde o rigidizadores que en muchas ocasiones trabajan a tracción. Y un pretensado, contenido en la lámina o en la viga de borde, resulta interesante en muchos casos, cuando no fundamental, para ampliar el rango de servicio de tales estructuras.

Se dispone por el momento de pocos trabajos previos sobre el tratamiento numérico del pretensado en análisis de láminas y estructuras de hormigón en general. Kang⁵ elaboró un método para análisis de estructuras reticulares planas de hormigón pretensado y Mari⁶ desarrolló su generalización a tres dimensiones. Van Greunen⁷ elaboró un método para placas y paneles pretensados. Posteriormente, el modelo elaborado por Chan⁸ para análisis de láminas de hormigón armado, se completó en el Departamento de Estructuras de la Escuela de Caminos de Barcelona con la inclusión del pretensado en las vigas de borde⁹.

En el presente trabajo se presenta un método para el análisis no lineal, por la geometría y el material, de láminas de revolución de hormigón pretensado, incluyendo

anillos rigidizadores. El presente trabajo se inscribe en un programa de investigación centrado en la elaboración de métodos de análisis para láminas de geometría general de hormigón armado y pretensado.

TEORÍA DE LÁMINAS E HIPÓTESIS EMPLEADAS

La Figura 1 representa un esquema de lámina de revolución típica. En la Figura 2 se ha representado la sección meridional de una lámina de revolución en las proximidades de un punto P_0 de la superficie media.

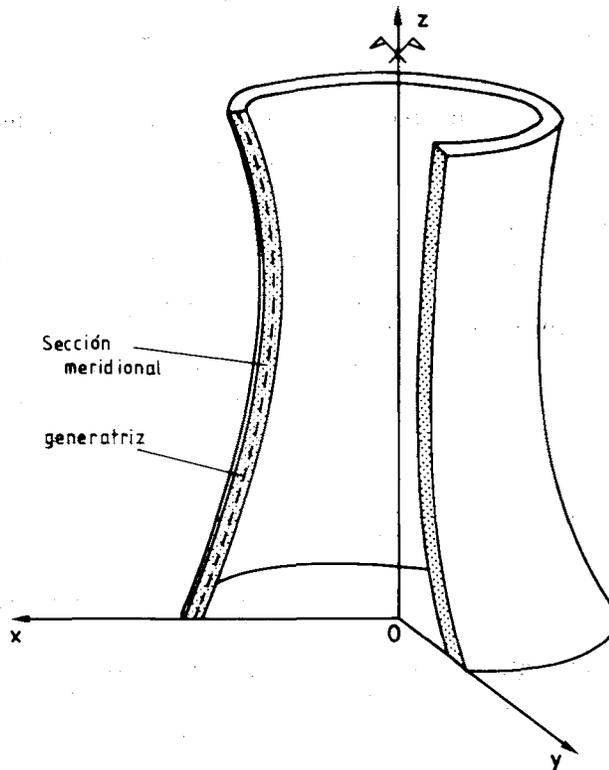


Figura 1. Geometría de una lámina de revolución.

Se considera en este trabajo la teoría de láminas de Reisner-Mindlin. Esta teoría supone que las normales a la generatriz permanecen rectas, aunque no necesariamente ortogonales a la misma, después de la deformación. Con la variación del giro de la normal respecto a la posición ortogonal se modeliza la parte de deformación debida al cortante. La teoría de Reisner-Mindlin está en principio concebida para placas y láminas moderadamente gruesas. Esta hipótesis permite describir el movimiento de un punto cualquiera de la lámina a partir de los corrimientos del punto de la superficie media situado en la misma normal, y el giro de ésta. Tal relación puede representarse mediante la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 - z' \theta \vec{v}_2 \quad (1)$$

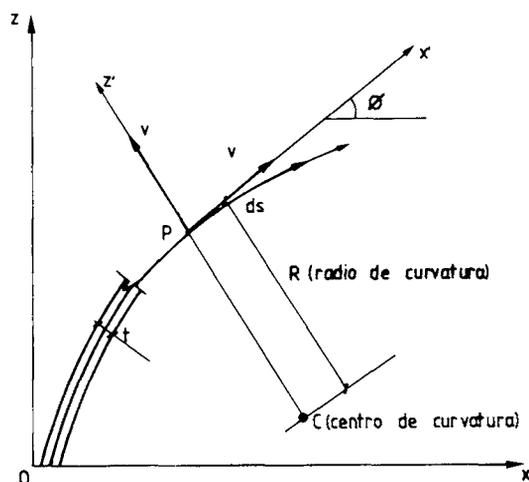


Figura 2. Sección meridional de una lámina de revolución. Definición del sistema de coordenadas locales.

donde \vec{u} y \vec{u}_0 son los vectores de desplazamiento de un cierto punto P y de un punto de la superficie media P_0 , situado en la misma normal que P ; θ representa el giro de la normal respecto de su posición inicial y \vec{v}_2 el vector unitario en la dirección de ésta; z' define la distancia a la superficie según la normal.

Por la condición de simetría de revolución existen dos movimientos posibles en cada punto de lámina: el desplazamiento radial (u) y el paralelo al eje de revolución (w). Así, la ecuación (1) puede escribirse también de la forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ x_0 \end{Bmatrix} - t\theta \begin{Bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

donde ϕ representa el ángulo de la tangente a la superficie media con respecto al eje $0\bar{X}$ en la sección meridional.

Los movimientos en ejes globales (u, w) pueden ser transformados al sistema de ejes local, donde x' es la coordenada en la dirección meridional y z' es la coordenada en la dirección normal a la superficie media. Las componentes respecto del sistema local (u', w') se relacionan matricialmente con las componentes en el sistema global, según:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Si se acepta la hipótesis, común en el estudio de láminas, de que la componente de tensión normal a la superficie media de la lámina es despreciable ($\sigma_{z'} = 0$), la correspondiente deformación según la normal ($\epsilon_{z'}$) no interviene en la energía de deformación. Entonces no es preciso considerar tal deformación en el análisis. Además, existen otros tres tipos de deformación en una lámina de revolución: la deformación longitudinal en dirección meridional ($\epsilon_{x'}$), la deformación longitudinal en sentido circunferencial (ϵ_{φ}), y la distorsión angular en el plano $0XZ$, $\gamma_{x'z'}$. La relación de estas deformaciones con los movimientos de la lámina viene dada por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{x}$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (4)$$

Si se prevén grandes corrimientos, a las cantidades anteriormente presentadas habrá que sumar los términos de segundo orden:

$$\eta_{x'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)$$

$$\eta_{\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{x} \right)^2$$

$$2\eta_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \quad (5)$$

Las deformaciones totales se obtienen como suma de las componentes lineales y de segundo orden:

$$\epsilon_{x'} = \varepsilon_{x'} + \eta_{x'}$$

$$\epsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi} + \eta_{\varphi}$$

$$2\epsilon_{x'z'} = \gamma_{x'z'} + 2\eta_{x'z'} \quad (6)$$

La Figura 3 representa las tensiones y esfuerzos de un elemento de lámina de revolución, con la notación correspondiente.

Los esfuerzos en la lámina se obtienen mediante la siguiente integración de las tensiones en el espesor (h) de la misma:

$$\begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{\phi} \\ M_{x'} \\ M_{\phi} \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\phi} \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_{\phi} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' \quad (7)$$

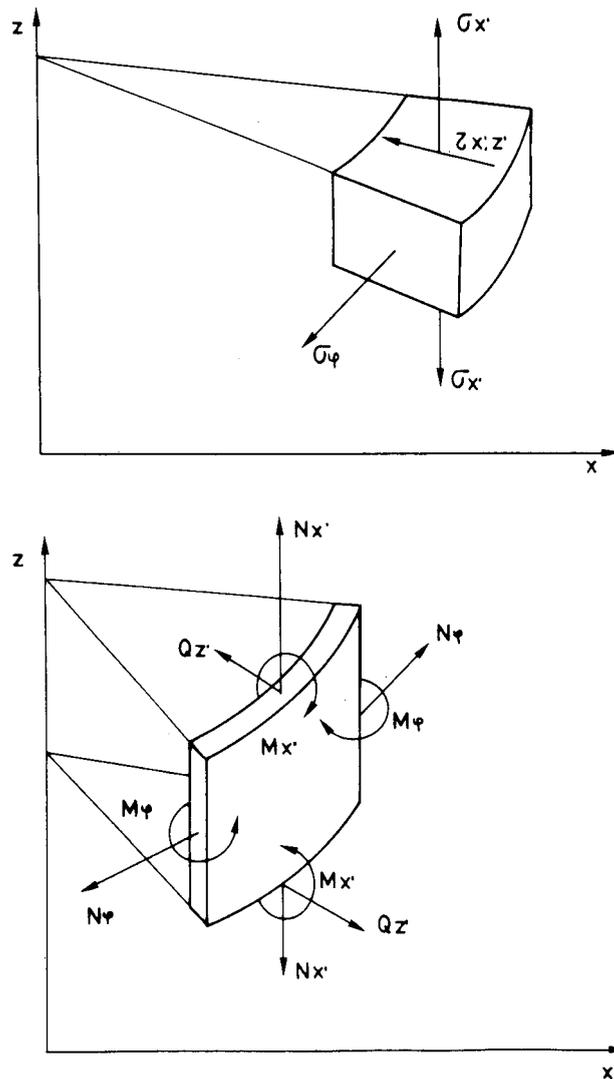


Figura 3. Tensiones y esfuerzos de lámina de revolución.

RELACION ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Hormigón

Para la representación del comportamiento mecánico del hormigón se ha adoptado el modelo biaxial ortótropo de Darwin y Pecknold¹⁰. Este modelo ha sido ya utilizado por diversos autores para análisis no lineal de láminas, placas, y elementos estructurales que, en general, se vean sometidos a estados de tensiones predominantemente biaxiales. Este modelo puede reflejar efectos tales como la variación de resistencias y módulos debido al confinamiento tensional, la influencia de la historia de carga, el reblandecimiento una vez superada la tensión máxima en el hormigón (*tension softening*), y otros. Su definición parte de la envolvente de resistencias biaxiales obtenida experimentalmente por Kupfer¹¹ (Figura 4). Normalmente se utiliza en complemento con un sistema de ramas secundarias para descarga y recarga y los

criterios de entrada correspondientes. El modelo de Darwin, particularizado para una lámina de revolución, da lugar a una relación tangente del tipo:

$$d\sigma = Dde \tag{8}$$

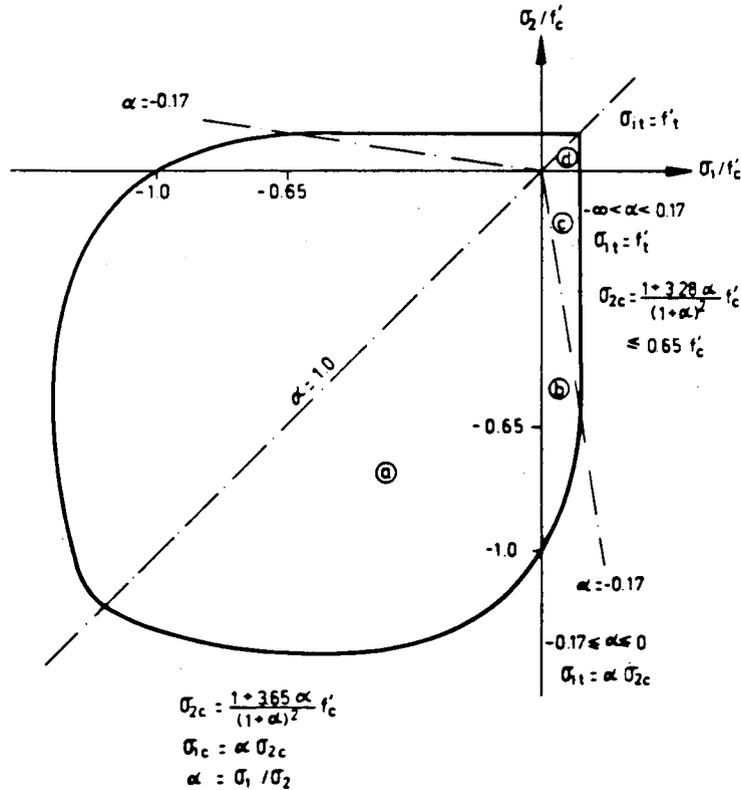


Figura 4. Envoltorio de resistencias biaxiales de Kupfer y Gerstle

o bien en forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{x'} \\ d\sigma_{\phi} \\ d\tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 + \nu^2} \begin{bmatrix} E_{x'} & 0 \\ 0 & E_{\phi} \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{x'u} \\ d\varepsilon_{\phi u} \\ d\gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

donde $d\varepsilon_{x'u}$ y $d\varepsilon_{\phi u}$ son unas “deformaciones equivalentes” que permiten establecer el desacoplamiento formal entre las direcciones x' (meridional) y ϕ (circunferencial), y que se definen de la siguiente manera:

$$d\varepsilon_{x'u} = d\varepsilon_{x'}/(1 - \nu\alpha n) \quad d\varepsilon_{\phi u} = d\varepsilon_{\phi}/(1 - \nu\alpha n) \tag{10}$$

con:

$$\alpha = d\sigma_1/d\sigma_2 \tag{11}$$

$$n = E_2/E_1 \quad (12)$$

$$d\sigma_1 = \max(d\sigma_{x'}, d\sigma_{\varphi}), \quad d\sigma_2 = \min(d\sigma_{x'}, d\sigma_{\varphi}) \quad (13)$$

Los módulos de deformación E_1 y E_2 se corresponden respectivamente a las direcciones de las tensiones principales σ_1 y σ_2 . Su valor depende del nivel de carga y del estado de confinamiento tensional, a través del parámetro α . El desacoplamiento entre las dos direcciones principales permite utilizar curvas uniaxiales para caracterizar la relación entre las tensiones y las deformaciones equivalentes. La Figura 5 muestra una curva uniaxial equivalente genérica. Los parámetros que determinan tales curvas dependen del estado de confinamiento tensional, a través de α y n .

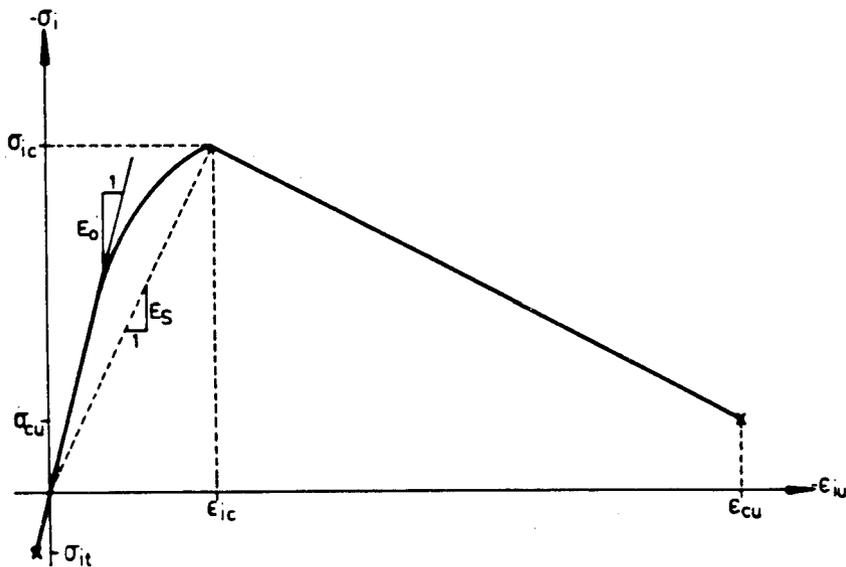


Figura 5. Diagrama tensión-deformación equivalente del modelo biaxial para hormigón de Darwin y Pecknold.

El modelo queda totalmente determinado con los siguientes datos:

- E_0 : el módulo elástico inicial
- f_c : la resistencia a compresión uniaxial
- f_t : la resistencia a tracción uniaxial
- ϵ_u : la deformación última por aplastamiento (en compresión uniaxial)

El comportamiento del hormigón en tracción se asimila al de un material elástico lineal con rotura perfectamente frágil al alcanzarse la resistencia a tracción, suponiéndose entonces la aparición de una fisuración uniformemente distribuida. Con la aparición de la fisuración, la tensión del hormigón en dirección normal a las fisuras se hace nula y el hormigón se comporta como un material uniaxial. A partir de ese momento sólo una fisuración ortogonal a la primera es susceptible de aparecer.

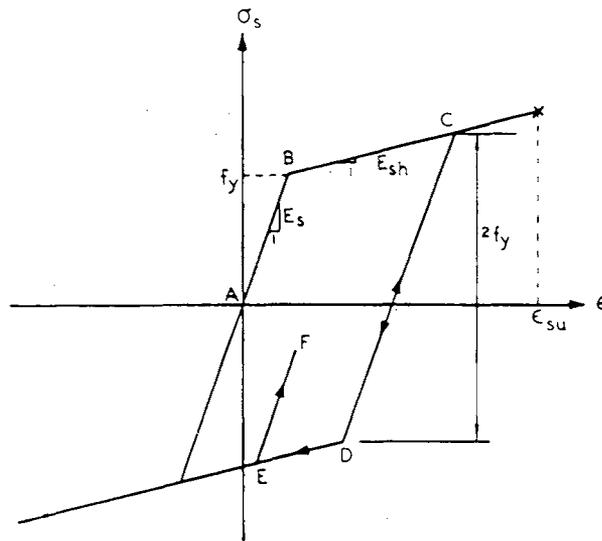


Figura 6. Relación entre tensiones y deformaciones para el acero de la armadura pasiva.

La formulación completa del modelo puede hallarse en las referencias⁸ y⁹.

Acero. Contribución del hormigón traccionado entre fisuras

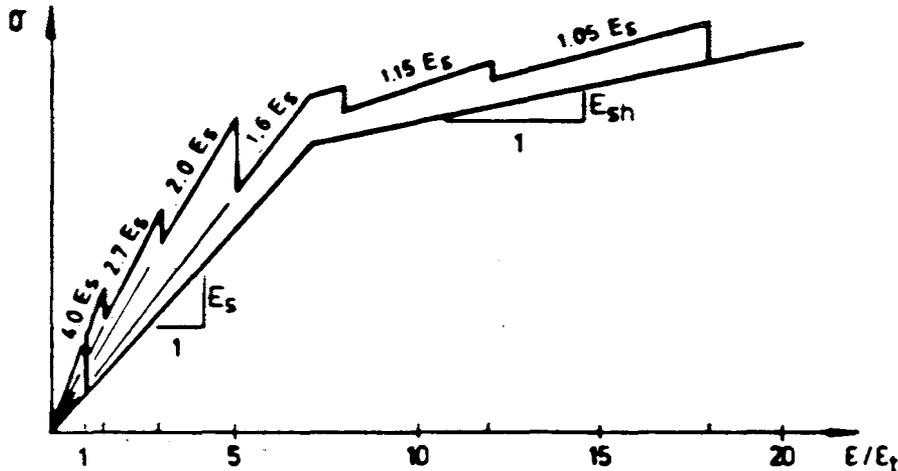


Figura 7. Diagrama tensión-deformación del acero pasivo modificado para la modelización del efecto de *tension stiffening*.

La mayoría de los trabajos previos (Chan⁴, Marí⁶,...) emplean diagramas bilineales como el representado en la Figura 6 para la modelización mecánica del acero. Incluyen además ramas para descarga y recarga. Como en⁸, también en este trabajo se utiliza una aproximación consistente en un aumento controlado del módulo de elasticidad del acero como forma de modelizar la contribución del hormigón entre fisuras a la resistencia de tracciones (*tension stiffening*). El diagrama modificado adoptado para el acero se muestra en la Figura 7.

MODELIZACION DE LA GEOMETRIA DE LA LAMINA

Debido a la condición de simetría de revolución, sólo es preciso discretizar en elementos finitos la sección meridional de la estructura, con lo cual pueden utilizarse elementos unidimensionales. Normalmente se consideran dos tipos de elementos en la modelización de láminas de revolución (Figura 8). El más simple de ellos, el elemento troncocónico o lineal de dos nodos, es con mucho el más frecuentemente utilizado debido a su simplicidad y eficiencia. El elemento isoparamétrico cuadrático de tres nodos (Figura 8) permite una descripción más precisa de la geometría de la lámina a costa de una menor eficiencia numérica. El uso del elemento cuadrático resulta interesante cuando se incluye el pretensado en el análisis, con lo que se precisa de una definición más perfecta de la geometría de la lámina. Por ello, éste ha sido el tipo de elemento adoptado para el presente trabajo.

El carácter de isoparamétrico indica que la descripción de la geometría se realiza con las mismas funciones de forma que se utilizan para la descripción de los movimientos. El vector de posición de cualquier punto de lámina, \vec{x} puede obtenerse mediante la siguiente interpolación:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left\{ \vec{x}_{0i} + \frac{1}{2} \eta h'_i \vec{v}_{2i} \right\} \quad (14)$$

donde \vec{x}_{0i} , $i = 1, 2, 3$ son los vectores de posición de cada uno de los nodos del elemento de lámina. N_1, N_2 y N_3 son las funciones de forma para el elemento elegido; h_i , $i = 1, 2, 3$ son los espesores de lámina correspondientes a cada uno de los nodos; \vec{v}_{2i} , $i = 1, 2, 3$ representan los correspondientes vectores normales. La Figura 8 contiene las expresiones de las funciones de forma. La coordenada normalizada η indica la distancia del punto de lámina a la superficie media de ésta según su normal.

Por otra parte, la expresión (1) da lugar a la siguiente interpolación para los vectores de movimientos de puntos de lámina:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 N_i(x_i) \left\{ \vec{u}_{0i} - \frac{1}{2} \eta h_i \theta \vec{v}_{1i} \right\} \quad (15)$$

Los vectores \vec{u}_{0i} , $i = 1, 2, 3$ representan los movimientos de los nodos del elemento de lámina; \vec{v}_{1i} son sus correspondientes vectores unitarios en dirección tangente a la superficie media de lámina.

Mediante la aplicación del *Principio de los Trabajos Virtuales* con las interpolaciones (14) y (15), se obtienen las expresiones de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas internas resistentes, así como del resto de cantidades necesarias para la resolución del problema.

segundo orden en la relación entre corrimientos y deformaciones. Este tipo de efecto puede influir sensiblemente en el comportamiento de ciertos tipos de estructuras. En este trabajo se acepta la hipótesis de grandes desplazamientos y rotaciones y pequeñas deformaciones. Esta hipótesis resulta en general aceptable en el estudio de estructuras de hormigón armado o pretensado.

Elemento de lámina de hormigón armado en análisis no lineal

La resolución del problema de Elementos Finitos exige la evaluación de varias integrales extendidas al volumen. En un problema con simetría de revolución, la integración en dirección circunferencial es directa de forma que el problema se reduce a dos dimensiones. En caso elástico lineal la integración según el espesor es inmediata y por ello se suele trabajar directamente con las expresiones integradas según esta dimensión.

Si se considera la no linealidad del material se precisa en principio de algún método de integración numérica. Con este fin el elemento de lámina se modeliza como un sistema de capas, cada una de ellas caracterizada por las propiedades mecánicas correspondientes al estado que el material ha alcanzado a lo largo del análisis. La integración en el espesor se realiza mediante una regla de Simpson múltiple. El acero pasivo se asimila a un segundo sistema de capas, cada una de ellas caracterizada por un espesor equivalente t_s :

$$t_s = a_s/s \quad (16)$$

donde s es la separación de las barras contenidas en una misma *capa de armadura* y a_s es el area de acero correspondiente a cada barra. El elemento de lámina resultante formado por capas de hormigón y acero se ha representado en la Figura 9.

Introducción de la no linealidad geométrica

Al considerar la hipótesis de grandes desplazamientos y rotaciones pero pequeñas deformaciones, el procedimiento de análisis no lineal por la geometría experimenta importantes simplificaciones, y se resume en la actualización de la geometría de la estructura y la evaluación de la matriz de rigidez geométrica, además de la inclusión de los términos de segundo orden en las relaciones entre deformaciones y corrimientos. Todo ello puede verse justificado en las referencias⁴ y⁸. El equilibrio se establece sobre la geometría actualizada de la estructura.

METODO DE ANALISIS

Los desplazamientos nodales se eligen como sistema de incógnitas básicas del problema, obteniéndose así directamente de la resolución de las ecuaciones de equilibrio. Las deformaciones y tensiones en el hormigón y el acero pasivo, así como las variaciones de la fuerza de pretensado inducidas por la deformación de la estructura bajo acciones externas, se obtienen a partir de los desplazamientos nodales como consecuencia de la aplicación de las relaciones geométricas y constitutivas del problema.

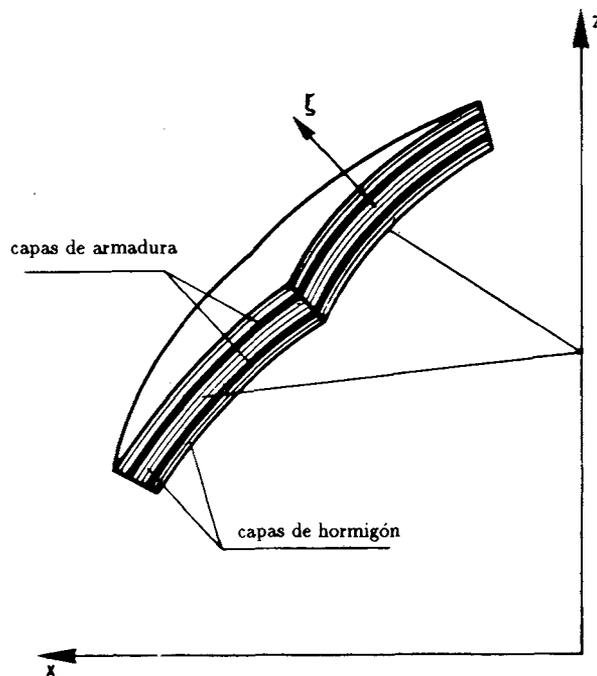


Figura 9. Elemento de lámina descompuesto en capas de hormigón y acero.

El análisis permite considerar acciones externas de tipo gravitatorio, cargas superficiales y presión normal, reduciéndolas automáticamente a fuerzas nodales equivalentes.

Para las condiciones de equilibrio se utiliza una formulación incremental. La correspondiente ecuación matricial puede expresarse como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \quad (17)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} es una función del vector de desplazamientos nodales \mathbf{r} y de las propiedades de los materiales. La condición de equilibrio es no lineal al depender la rigidez del estado de la geometría y los materiales, que a su vez resultan de los desplazamientos \mathbf{r} .

El sistema de ecuaciones de equilibrio se resuelve mediante un método que combina incrementos de carga con procesos iterativos en cada incremento. La parte de carga externa a aplicar en cada incremento se decide automáticamente mediante un procedimiento basado en la imposición de un desplazamiento máximo según un grado de libertad de la estructura.

VIGA DE BORDE Y ANILLOS RIGIDIZADORES

Este tipo de elementos estructurales aparece frecuentemente en las láminas de hormigón armado o pretensado, y de forma especial en la tipología de revolución.

En la formulación correspondiente sólo han sido considerados efectos de viga, suponiéndose para los puntos de su sección transversal la existencia de una única tensión

no nula, en la dirección de los paralelos. Esta hipótesis puede admitirse si la relación del ancho de la sección con la distancia al eje de revolución es suficientemente grande, de forma que ciertos efectos de carácter tridimensional resulten despreciables. Ello permite emplear un modelo de comportamiento uniaxial para el hormigón, del tipo:

$$\sigma = E(x, z)\varepsilon \quad (18)$$

donde σ y ε son la tensión y la deformación circunferenciales en cada punto (x, z) de la sección meridional de anillo, y $E(x, z)$ un módulo de deformación que refleja el estado del material.

La lámina de revolución impondrá a un anillo rigidizador que le sea solidario unos corrimientos u, w y un giro θ , medidos en un cierto punto de referencia P perteneciente a la sección. El movimiento w produce en el rigidizador un puro movimiento de sólido rígido, sin traducirse en ningún tipo de deformación. El corrimiento radial u se traduce en una deformación circunferencial, medida en el punto P de referencia, de valor:

$$\varepsilon_\varphi = u/x \quad (19)$$

Por su parte, el giro θ provoca una curvatura C_z de eje paralelo al $0\bar{X}$:

$$C_z = -\theta/x \quad (20)$$

Las relaciones (19) y (20) se obtienen simplemente imponiendo compatibilidad de deformaciones bajo simetría de revolución. La deducción de estas relaciones se presenta en la Figura 10.

La deformación uniaxial de las fibras del anillo puede escribirse mediante (19) y (20) en función de los movimientos impuestos por la lámina:

$$\varepsilon = \varepsilon_\varphi - C_z z' = u/x - (\theta/x)z' \quad (21)$$

Se define $z' = (Z - Z_P)$, siendo Z_P la coordenada según $0\bar{Z}$ del punto de referencia P . Análogamente, se define $x' = (X - X_P)$.

Si se incluyen grandes corrimientos en el análisis, a la relación (21) es preciso añadir el término de segundo orden:

$$\eta = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (22)$$

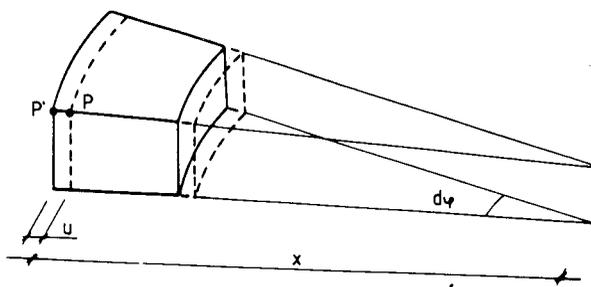
siendo entonces la deformación circunferencial total:

$$\epsilon = \varepsilon + \eta \quad (23)$$

Los esfuerzos posibles en la sección del anillo son un axil circunferencial N_φ y un flector M_z (de eje paralelo a $0\bar{X}$). Tales esfuerzos se obtienen en función de los movimientos integrando las tensiones del anillo en su sección meridional y aplicando (18) y (21):

$$N_\varphi = u \int_A \frac{1}{x} E dx' dz'$$

$$M_z = \theta \int_A \frac{z'^2}{x} E dx' dz' \tag{24}$$



$$\epsilon_\varphi = \frac{(x+u)d\varphi - x d\varphi}{x d\varphi} = \frac{u}{x}$$

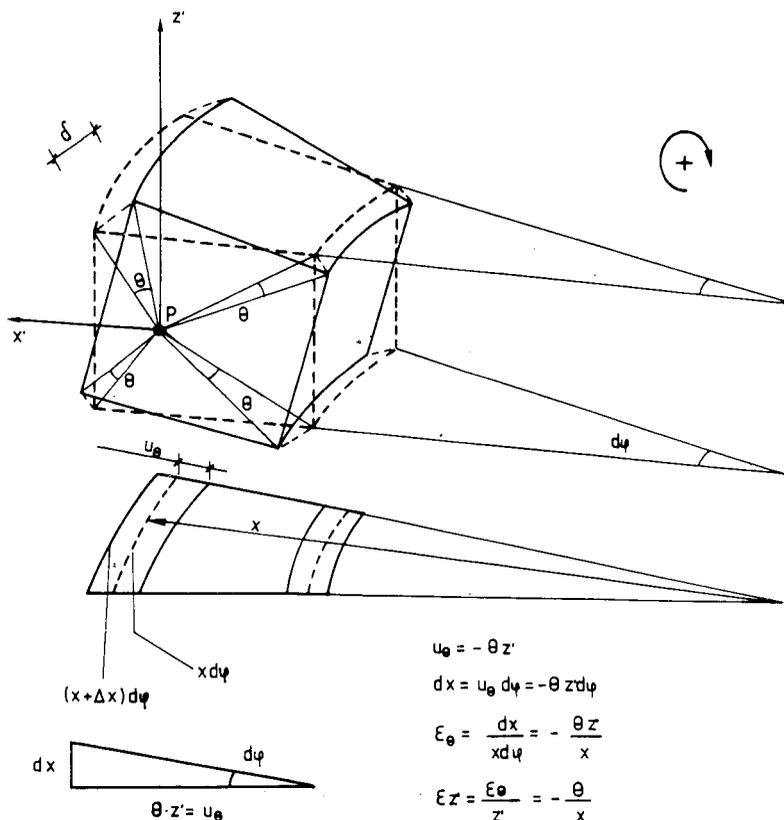


Figura 10. Deducción de los valores de las deformaciones seccionales de la viga-anillo, ϵ_φ y $\epsilon_{z'}$, por compatibilidad de movimientos.

Estos esfuerzos también pueden obtenerse directamente imponiendo el equilibrio del anillo con las fuerzas internas de compatibilidad entre el anillo y la lámina. Estas fuerzas se resumen en una fuerza radial p_u y un momento m_θ repartidos a lo largo del paralelo de contacto entre el anillo y la lámina.

La relación (21) implícitamente incorpora la hipótesis de la conservación de las secciones planas tras la deformación. Por ello, un único nodo situado en un punto de referencia de la sección transversal P , no necesariamente coincidente con el baricentro de ésta, es suficiente para definir y conectar el elemento de viga-anillo con el resto de la malla de elementos del problema. En este nodo se sitúan los dos grados de libertad del anillo: el ensanchamiento en el plano, definido por un corrimiento horizontal u , y el giro del anillo alrededor de su eje, θ .

Para modelizar el vínculo entre lámina y anillos rigidizadores se supone que la conexión entre ambos tipos de elemento se realiza mediante una biela rígida ficticia, y que por lo tanto los correspondientes movimientos están condicionados por una relación de sólido rígido (Figura 11).

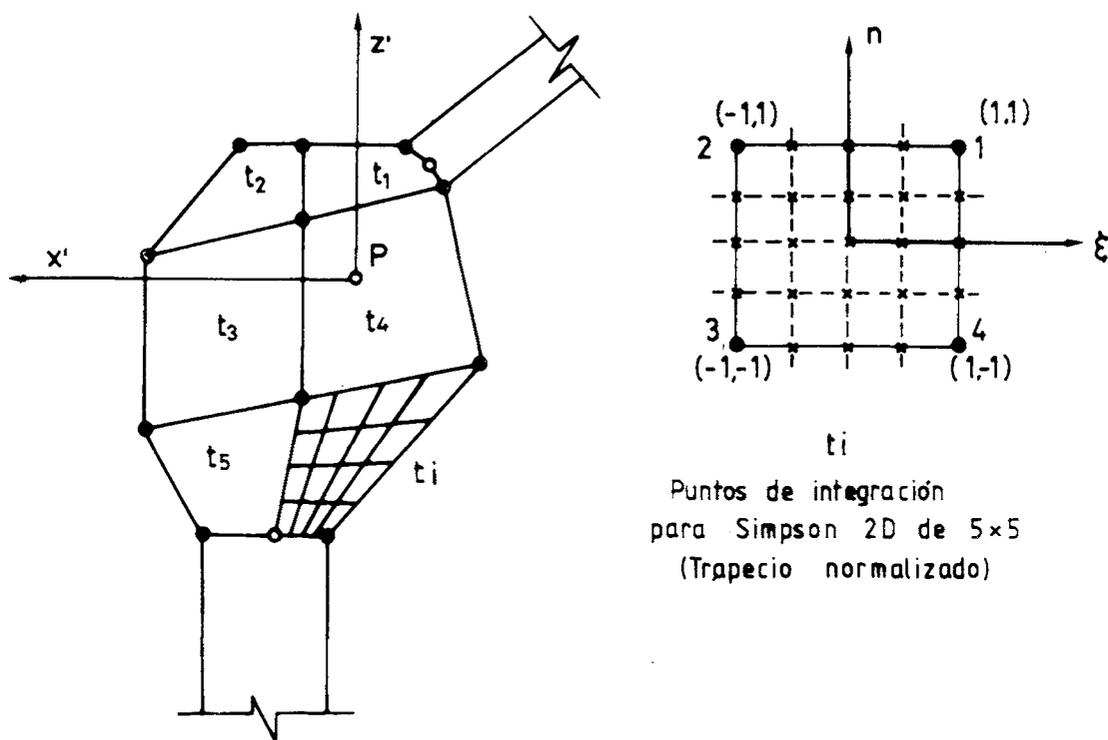


Figura 11. Conexión entre nodos de anillo rigidizador y lámina mediante una biela rígida.

Por otra parte se precisa de un método para la descripción de una sección transversal de anillo rigidizador o viga de borde lo más general posible. En el presente trabajo se ha adoptado un método especialmente apto para secciones de contorno poligonal. Se basa en la descomposición de la sección en una serie de trapezoides $t(1), t(2), \dots, t(n)$ (Figura 12). Se establece una transformación de un cuadrado

normalizado a cada uno de los trapecios, lo cual es factible con una interpolación mediante funciones de forma lineales bidimensionales. La resolución del problema exige, como se indicó en el apartado 5, la evaluación de ciertas integrales sobre la sección transversal. Utilizando el jacobiano de tal transformación, es posible realizar tales integraciones mediante la aplicación de algún algoritmo de integración bidimensional sobre los cuadrados normalizados. Se ha escogido como algoritmo de integración una regla de Simpson bidimensional múltiple.

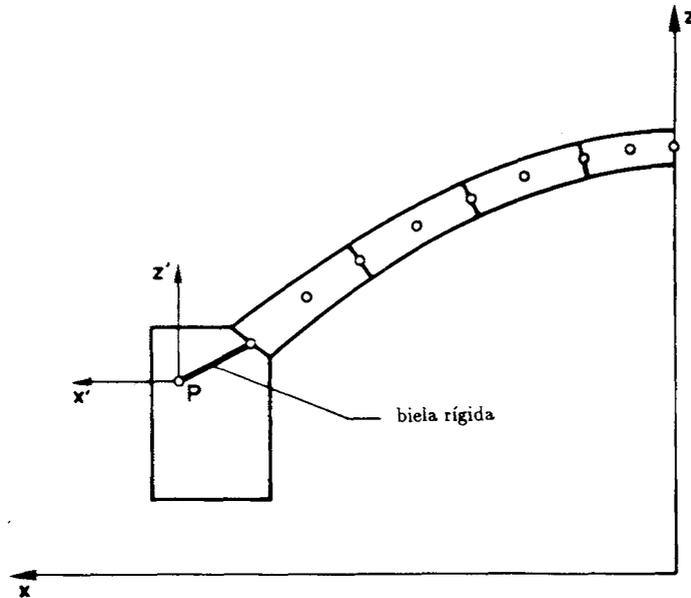


Figura 12. Sección meridional de un elemento de viga-anillo, definida mediante trapecios.

La integración debe extenderse también a las barras de armadura, caracterizadas en este caso individualmente mediante sus coordenadas y el área de acero.

PRETENSADO

Introducción

El pretensado de una estructura de hormigón puede idealizarse a través de dos efectos:

- 1) Un efecto activo, consistente en un sistema de fuerzas (cargas de pretensado, esfuerzos isostáticos de pretensado, etc.) de carácter cuasi-permanente.
- 2) Un efecto pasivo o contribución del acero a la rigidez de la estructura. Este efecto es función directa de la adherencia entre hormigón y acero.

El pretensado de la mayoría de las estructuras láminares es de tipo posteso: los tendones se tesan de forma posterior al endurecimiento del hormigón. El pretensado

se transfiere gradualmente al hormigón durante la operación de tesado, al tiempo que la estructura se deforma bajo la acción de las fuerzas inducidas por el pretensado; por ello el esfuerzo de un tendón al finalizar el tesado coincide con la fuerza proporcionada por los gatos de tesado, que es conocida. La introducción del mortero o lechada de relleno se lleva a cabo posteriormente, por lo que durante la operación de tesado no existe adherencia entre el hormigón y el acero de armadura activa, y por lo tanto la rigidez del acero de pretensado no debe considerarse en el análisis. En el caso de una armadura pretesa, el tesado de los tendones es anterior al vertido del hormigón. Cuando este ha endurecido, los tendones se sueltan y la fuerza de pretensado se transfiere a la estructura. Durante la transferencia existe adherencia entre hormigón y acero, y por ello la misma armadura activa interviene en la resistencia de las fuerzas de pretensado, lo que se traduce en una variación de la fuerza de tesado inicialmente proporcionada al acero. En la práctica de las estructuras pretensadas este efecto se identifica a una pérdida de pretensado por acortamiento elástico. Numéricamente, este efecto queda sistemáticamente incorporado si desde un principio se considera adherencia entre hormigón y armadura activa, esto es, si se considera la rigidez del acero de pretensado en la formación de la rigidez global de la estructura, y la deformación de la armadura se obtiene por compatibilidad de deformaciones con el hormigón circundante.

Queda por resolver el caso de las armaduras postesas no adherentes, algo más complejo de formulación, en el que se está trabajando actualmente.

Modelización geométrica del pretensado

La complejidad de la geometría en estructuras espaciales y, consecuentemente en el trazado de los tendones de pretensado, plantea normalmente grandes dificultades que conciernen tanto a la formulación de los métodos de análisis como a la preparación de los datos necesarios para la definición de los tendones. En los trabajos realizados sobre vigas pretensadas (por Kang⁵ y Mari⁶) y de placas y paneles pretensados (por Van Gruenen⁷), normalmente los tendones de pretensado han sido idealizados como una sucesión de segmentos rectilíneos. Para geometrías más complejas, como tendones contenidos en láminas, parece interesante el la búsqueda de aproximaciones más realistas.

Con el fin de preservar la simetría de revolución, se consideran dos posibles tipos de tendones: 1) *tendones circunferenciales*, enteramente incluidos en paralelos de la lámina de revolución, y 2) *tendones meridionales*, contenidos en planos meridionales de la estructura (Figura 13).

La modelización geométrica puede realizarse de una forma sencilla en el caso de un tendón circunferencial de una lámina de revolución. En el presente trabajo se considera que un tendón circunferencial queda determinado en el plano meridiano por un punto **K** coincidente con el centro de la sección de acero. Este punto se hace coincidir con un nodo de la malla de elementos finitos, o bien queda vinculado a ésta mediante la introducción de una biela rígida ficticia como la definida para modelizar el vínculo entre lámina y anillos rigidizadores. La fuerza de pretensado y las deformaciones del tendón bajo cargas externas producen fuerzas lineales extendidas a todo el paralelo correspondiente al tendón, tal y como se ha esquematizado en la Figura 14.

En las estructuras reales el pretensado circunferencial se consigue mediante series

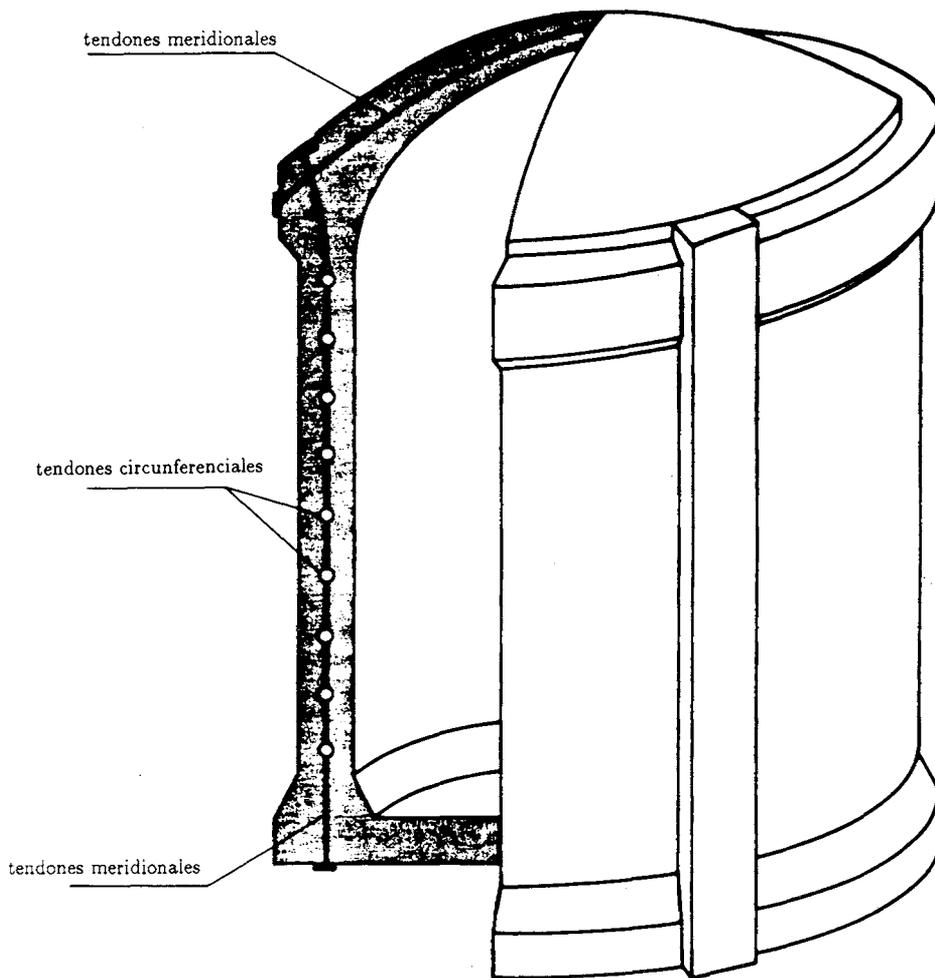


Figura 13. Tendones circunferenciales y meridianales.

de tendones secuencialmente distribuidos que individualmente no ocupan más que una porción de la circunferencia (Figura 15). Por otra parte, la fuerza de pretensado varía a lo largo de cada tendón debido a las pérdidas experimentadas en la operación de tesado. Para mantener en el modelo la simetría de revolución, se evalúa un promedio de la fuerza de pretensado y se utiliza como valor representativo para tendones ideales que cubren toda la circunferencia.

Los distintos grupos de tendones meridianales de una lámina pretensada se asimilan a capas axisimétricas de un espesor equivalente de acero. En la evaluación de este espesor equivalente interviene tanto la disposición geométrica de los grupos de tendones como la separación entre tendones individuales dentro de cada grupo. Debe aceptarse un espesor equivalente variable en la dirección meridional para tener en cuenta la variación de la separación de los tendones con la proximidad al eje de revolución, así como para modelizar ciertos sistemas de pretensado meridional que solamente aproximan de forma práctica la condición de simetría de revolución (Figura 16).

La siguiente modelización matemática, utilizada por Hofstetter y Mang¹⁰ ha sido

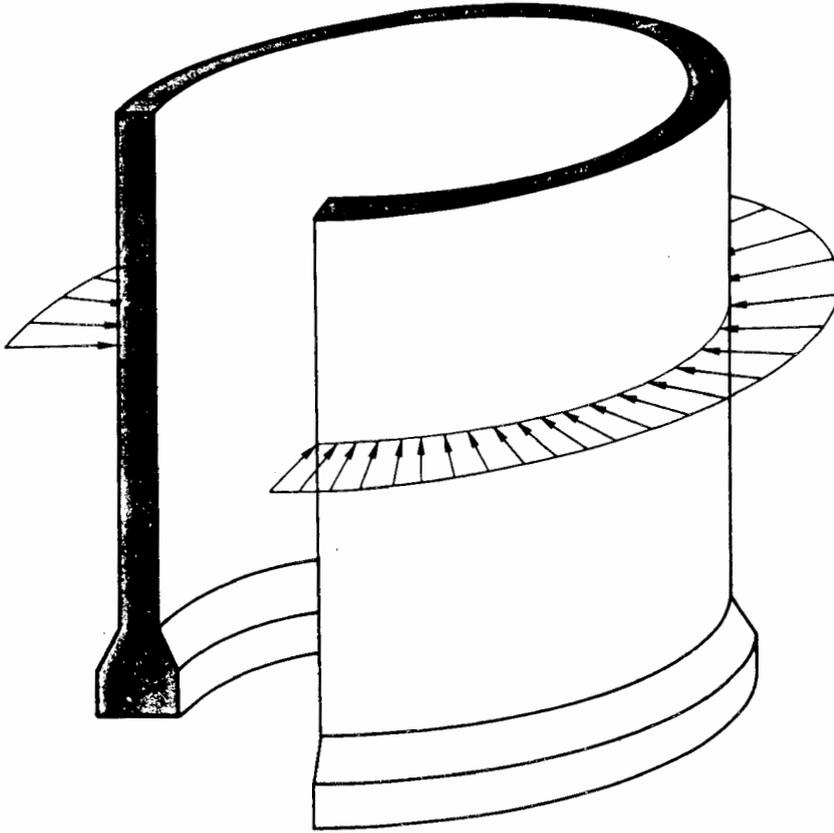


Figura 14. Fuerza axisimétrica linealmente distribuída causada por un tendón circular.

adoptada en el presente trabajo para describir el trazado de los tendones meridionales:

$$\vec{x}_T = \vec{x}_0 + e(s) \vec{v}_2 \quad (25)$$

donde \vec{x}_T representa el vector de posición de los puntos pertenecientes al tendón, \vec{x}_0 refiere puntos contenidos en la superficie media de la lámina, \vec{v}_2 representa el vector unitario normal a la superficie media, y $e(s)$ es una función del parámetro arco s que describe una posible excentricidad del tendón respecto a la superficie media de la lámina. \vec{x}_T es tan sólo una aproximación puesto que \vec{x}_0 se obtiene por interpolación mediante las funciones de forma de los elementos de lámina. Resulta por ello interesante partir de una modelización geométrica de la lámina precisa.

Utilizando la interpolación mediante funciones de forma, como en (14), la aproximación resultante puede escribirse como:

$$\vec{x}_T = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \{ \vec{x}_{0i} + e(s) \vec{v}_{2i} \} \quad (26)$$

La expresión (26) permite calcular las cantidades geométricas necesarias para la obtención del vector de cargas equivalentes de pretensado, considerando pérdidas, así

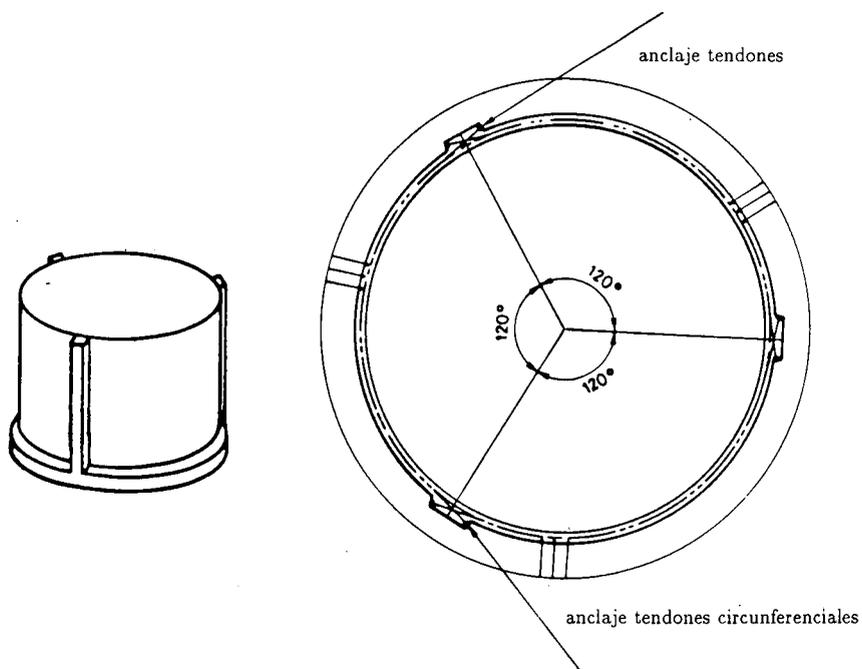


Figura 15. Ejemplo de distribución real de tendones circunferenciales en una lámina de revolución pretensada.

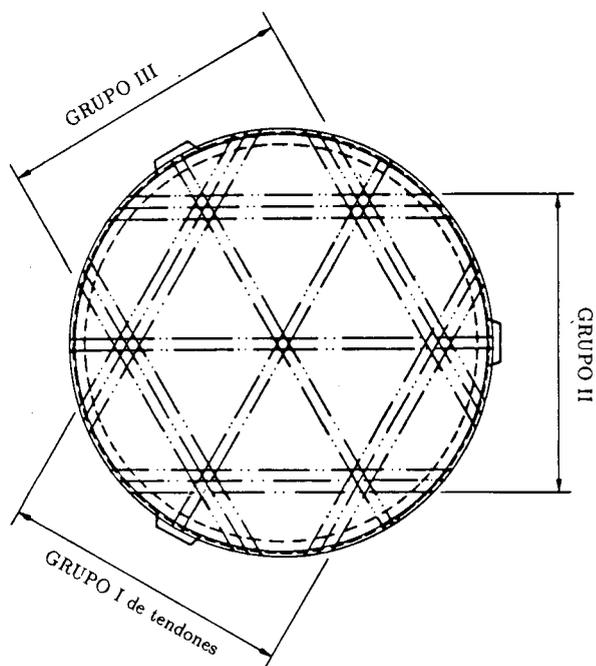


Figura 16. Ejemplo de distribución real de tendones de pretensado meridionales en varios haces simétricos.

como la contribución del acero de pretensado en la rigidez de la estructura y las

variaciones de fuerza y deformación en los tendones generadas por cargas externas.

Las cargas equivalentes de pretensado se obtienen a partir de las fuerzas distribuidas causadas por la fricción y la curvatura a lo largo de la longitud del tendón, y de las fuerzas de anclaje en los extremos de éste. Mediante procedimientos relacionados con el Método de los Elementos Finitos, estas fuerzas son convertidas automáticamente en vectores de fuerzas nodales. El sistema de fuerzas resultante debe mantenerse autoequilibrado tanto a nivel global como en cada elemento finito.

Consideraciones sobre las pérdidas de pretensado

La fuerza de pretensado experimenta pérdidas en la longitud de un tendón debido a varias causas: 1) el rozamiento del tendón con la vaina, ya sea de tipo angular o longitudinal (parásito), 2) la penetración de las cuñas en los anclajes durante la operación de tesado, en su caso, y 3) los acortamientos del tendón debidos a la deformación de la estructura en la operación de tesado.

El efecto (3) queda automáticamente modelizado como consecuencia de la solidaridad entre deformaciones de hormigón y acero de pretensado cuando existe adherencia.

Para las pérdidas por rozamiento se considera la conocida ecuación exponencial, solución del equilibrio de fuerzas del cable. Para obtener las pérdidas por penetración de cuña se realiza la hipótesis de que el rozamiento frente al tesado y destesado es el mismo. Para su evaluación numérica se utiliza el algoritmo desarrollado por Mari⁶.

Modelización mecánica del pretensado

Cuando existe adherencia entre el acero de pretensado y el hormigón, los tendones de pretensado tienden a deformarse con la estructura bajo la acción de cargas externas. Los incrementos de deformación del pretensado pueden obtenerse aplicando el tensor de deformaciones del hormigón en la dirección del eje del tendón, es decir, realizando una transformación de las deformaciones del hormigón mediante el Círculo de Mohr.

Las propiedades mecánicas del acero de pretensado se modelizan mediante un diagrama tensión-deformación multilíneal como el mostrado en la Figura 17. Se incluyen ramas de descarga y recarga cuya pendiente se asume igual al primer módulo.

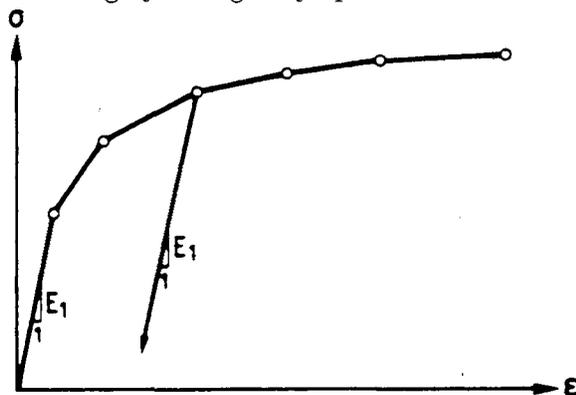


Figura 17. Diagrama tensión-deformación multilíneal para el acero pretensado.

Las expresiones para la rigidez debida al pretensado y las fuerzas internas resistentes ofrecidas por el pretensado se obtienen como consecuencia de la aplicación del *Principio de los Trabajos Virtuales* sobre un segmento de tendón de pretensado contenido en un elemento de lámina, en el caso de los tendones meridionales, o sobre un tendón circunferencial completo.

PROGRAMA DE ORDENADOR AXSHL

El modelo numérico presentado ha sido implementado numéricamente en un programa en FORTRAN al que se ha denominado *AXSHL*.

El programa *AXSHL* ha sido utilizado para la comprobación del modelo mediante comparación con ejemplos de solución conocida. Los ejemplos numéricos estudiados ponen de manifiesto la validez del método elaborado para el estudio de estructuras laminares de revolución en análisis no lineal por la geometría y el material, y en particular, para la predicción de su carga última.

EJEMPLOS NUMERICOS

Ejemplo 1 – Análisis no lineal por la geometría de una placa circular cargada uniformemente

El objeto de este ejemplo es mostrar la validez de la formulación para un caso cuya solución analítica es conocida, a pesar de su comportamiento no lineal.

En este ejemplo, una placa circular de material elástico, empotrada en su borde externo, se somete a una presión vertical uniformemente distribuida en la superficie. Las dimensiones y las propiedades del material son las siguientes:

- $E = 1.010^7$
- t (espesor) = 0.1
- R (radio) = 10.0
- $\nu = 0.3$

La placa ha sido modelizada mediante 8 elementos cuadráticos de igual longitud.

Los valores obtenidos para la flecha en el centro de la placa bajo carga creciente han sido comparados con las soluciones analíticas de Timoshenko y de Yaghmai (ver referencia⁴), así como con los resultados numéricos obtenidos con el programa de ordenador *NAARCS*⁴, hallándose muy buena coincidencia (Figura 18).

El efecto de la inclusión de la no linealidad geométrica se traduce en este caso en una progresiva rigidización de la estructura con el aumento del nivel de carga, consecuencia de la movilización del mecanismo de resistencia como membrana. En efecto, se ha observado la aparición de axiles importantes, tanto en dirección radial como circunferencial. Tales esfuerzos resultan nulos en hipótesis de linealidad del material y geométrica. Se observa además que estos esfuerzos axiles crecen más que proporcionalmente con la carga exterior aplicada.

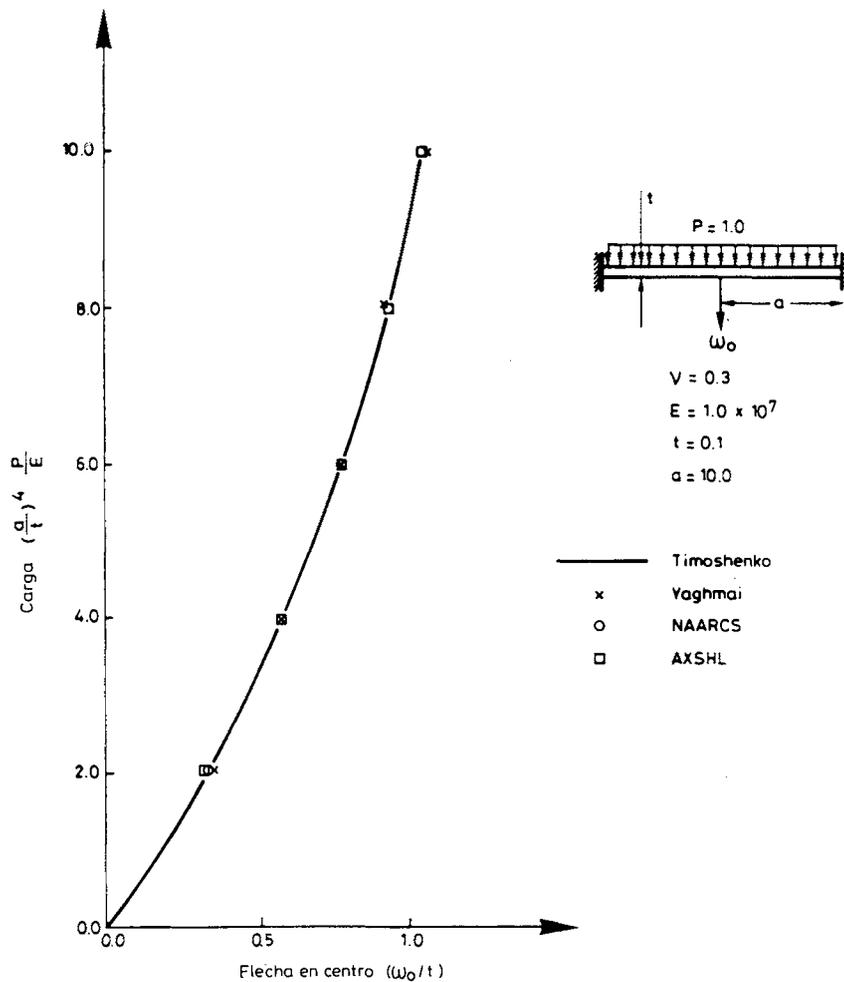


Figura 18. Ejemplo 1 -- Relación entre el nivel de carga y la flecha en el centro de la placa.

Ejemplo 2 – Análisis no lineal por el material de una cúpula esférica con anillo elástico

El presente ejemplo se ha obtenido del trabajo de Chan⁴ sobre análisis no lineal de láminas de revolución de hormigón armado.

La estructura en estudio está formada por una cúpula esférica de hormigón armado y un anillo de material elástico de sección rectangular situado en la base de aquella. Las dimensiones de la cúpula y las propiedades de los materiales pueden hallarse en la Figura 19. La modelización de la geometría por elementos finitos se ha esquematizado en la Figura 20. La distribución de la armadura pasiva se describe en la Tabla 1.

Este ejemplo ha sido estudiado mediante el programa *AXSHL*, y sus resultados han sido comparados con los que obtuvo Chan⁴ con el programa *NAARCS*. Para permitir esta comparación, y de acuerdo con la modelización utilizada para el programa *NAARCS* la viga de borde ha sido modelizada mediante un elemento de material elástico lineal. Los resultados obtenidos mediante el programa *AXSHL* muestran un

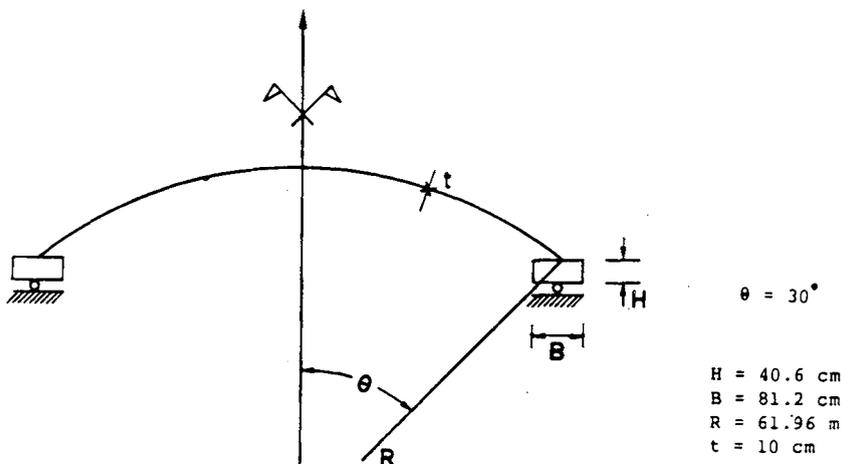


Figura 19. Ejemplos 2 y 3 – Geometría y dimensiones de la cúpula

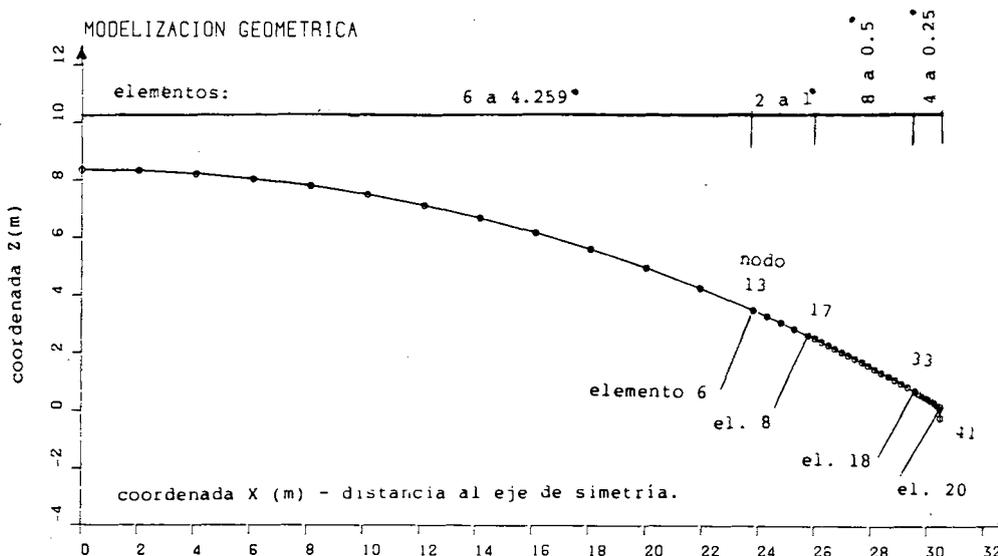


Figura 20. Ejemplos 2 y 3 – Discretización en elementos finitos de tres nodos.

parecido razonable a los de Chan, como puede observarse en las Figuras 21 y 22. Las discrepancias obtenidas son sensibles en la zona de primera fisuración, y pueden explicarse como consecuencia del empleo de distintos modelos de comportamiento del hormigón y distintas envolventes biaxiales de resistencias, ambos más simples en el modelo numérico de Chan.

Ejemplo 3 – Estudio de una cúpula esférica pretensada

La misma cúpula del ejemplo anterior ha sido empleada para el estudio del efecto de un pretensado circular.

Para la viga de borde anular se ha considerado en este caso el mismo tipo de material no lineal de la lámina. Además, en la viga se ha introducido armadura activa

elementos	meridional			circunferencial		
	ϕ	z'	s	ϕ	z'	s
1 a 6	0.63	3.8	30.5	0.63	3.0	30.5
	0.63	- 3.8	30.5	0.63	- 3.8	30.5
7 y 8	0.95	- 3.8	30.5	0.63	3.0	30.5
				0.63	3.0	30.5
9 a 12	0.95	- 3.8	30.5	0.95	- 3.0	30.5
15 a 20	2.54	3.2	10.2	3.50	- 1.3	10.2
	2.54	- 3.2	10.2	3.50	- 1.3	10.2

TABLA I. Ejemplo 1 – Distribución de la armadura pasiva en la cúpula.
 z' = distancia de una barra de acero a la superficie media de lámina en cm. (+): superior; (-): inferior.
 s = separación entre barras en cm.
 ϕ = diámetro de las barras en cm.

y pasiva, según se define en la Figura 23. El pretensado consiste en un único tendón circular contenido en la viga de borde. En la Figura 24 el diagrama multilineal empleado para el acero de pretensado.

Se considera que la armadura activa es postesa. En el análisis se procede según la siguiente secuencia:

- 1) Introducción simultánea del peso propio y una fuerza de pretensado de valor $P = 2.72 \text{ mN}$. El nivel de pretensado proporcionado es tal que tras este primer paso la estructura se mantiene globalmente en estado elástico. No se considera en esta fase adherencia entre armadura activa y hormigón.
- 2) Aumento gradual de la carga uniformemente repartida vertical. Durante esta fase se considera adherencia entre armadura activa y hormigón.

Se ha seguido la técnica del control de un desplazamiento en el proceso incremental, lo que ha permitido llevar el análisis mas allá de la situación de carga máxima. Se ha prolongado el análisis arbitrariamente hasta una flecha de 15 cm en el centro de la cúpula. Se ha realizado un análisis no lineal por el material (ANLM) y un análisis no lineal por la geometría y el material (ANLGM) de esta estructura.

Los diagramas de las Figuras 25 y 26 reflejan la evolución de la estructura en su paso por distintas fases. En tales diagramas el origen ($Q/Q_0 = 0$) se corresponde con el estado 1) de la estructura tras la transmisión de la fuerza de pretensado. La carga Q_0 de referencia es de 5 kPa .

Con el aumento del nivel de carga externa, el estado de compresión inducido por el pretensado sobre la viga de borde evoluciona a un estado de tracción compuesta.

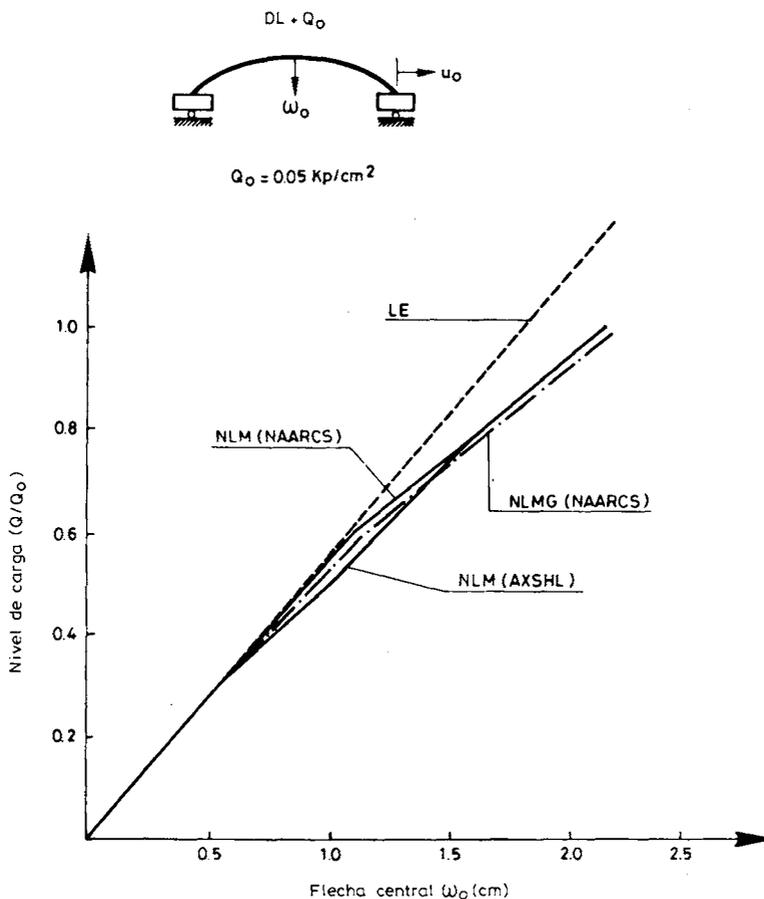


Figura 21. Ejemplo 2 - Relación entre el nivel de carga externa y la deflexión (w_0) en el centro de la cúpula.

Es este elemento estructural el que en mayor medida determina el comportamiento del conjunto. Al hallarse totalmente sometida a tracción, finalmente la viga de borde experimenta para cierto nivel de carga una fisuración repentina y extendida a toda su sección. Ello ha quedado perfectamente reflejado en las Figuras 25 y 26, en forma de una primera disminución de la rigidez (punto 1). El esfuerzo de tracción anteriormente soportado por el hormigón de la viga se transmite, tras esta fisuración, al acero de pretensado y la armadura pasiva. Este proceso de transferencia exige una deformación de la estructura a carga prácticamente constante hasta que el acero se moviliza lo suficiente como para absorber el importante esfuerzo de tracción que existe a nivel de la viga de borde. El alcance de este nivel se refleja en una importante rigidización de la estructura (punto 2 en Figura 25). Durante esta fase actúa el efecto de *tension stiffening*, que va reduciéndose progresivamente hasta que el acero pasivo del anillo plastifica.

La aparición de zonas fisuradas en la misma lámina, tanto en dirección radial como meridional, provoca una nuevas pérdidas de rigidez (punto 3). Las primeras fisuraciones de la lámina aparecen en los puntos próximos a la base. En el punto 5 comienza el proceso de plastificación del acero contenido en las fibras inferiores de la sección de

LE : Elástico lineal
 NLM : No lineal por el material
 NLGM : No lineal por la geometría y el material

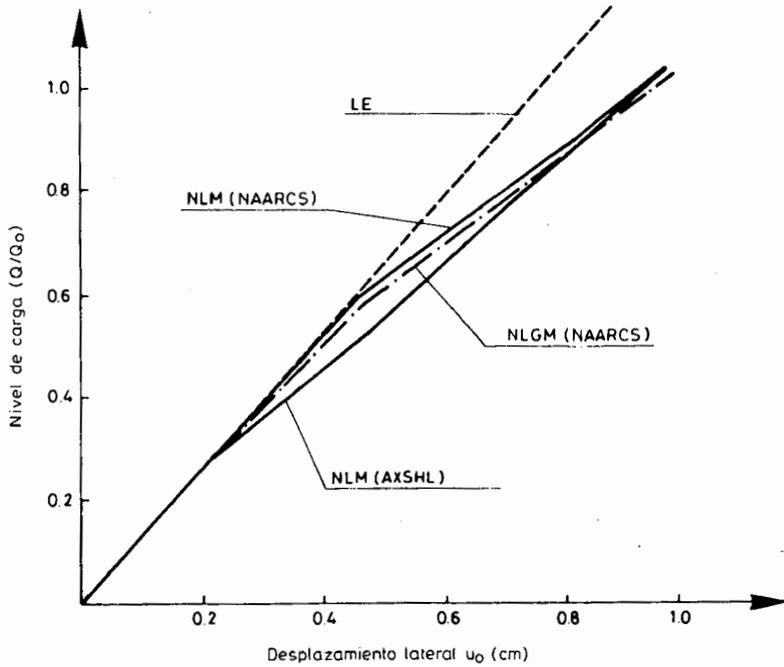


Figura 22. Ejemplo 2 - Relación entre el nivel de carga externa y el movimiento lateral en la base de la cúpula (u_0).

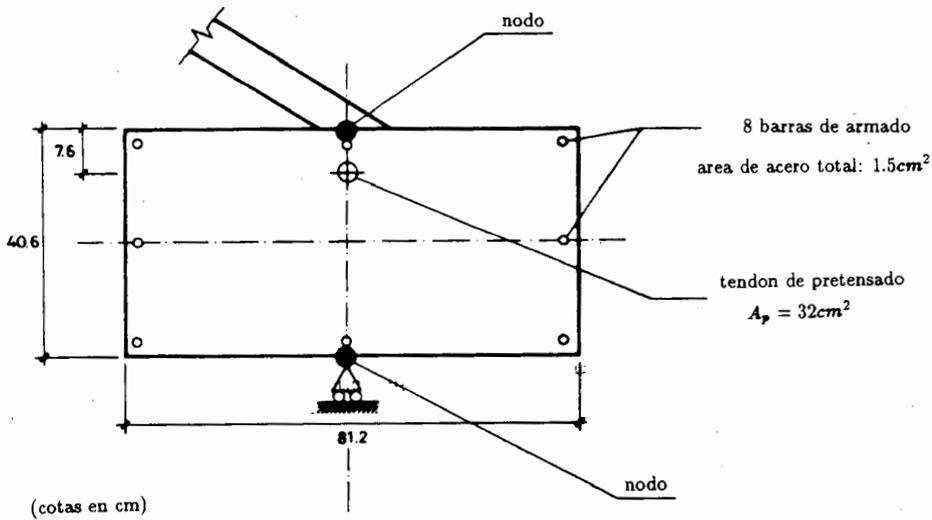


Figura 23. Ejemplo 3 - Geometría y distribución de la armadura en la viga de borde.

lámina, en las zonas coincidentes con la fisuración.

La Figura 27 representa la relación entre el esfuerzo axial del tendón de pretensado y

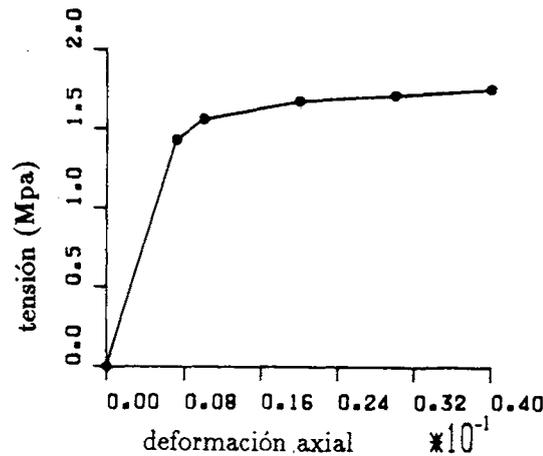


Figura 24. Ejemplo 3 – Diagrama tenso-deformacional definido para el acero de pretensado.

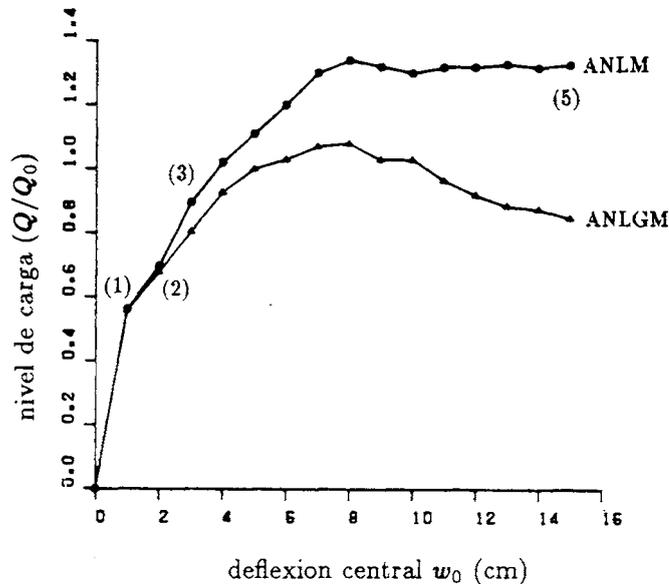


Figura 25. Ejemplo 3 – Relación entre el nivel de carga externa y la deflexión (w_0) en el centro de la cúpula.

el desplazamiento lateral w_0 en la base de la cúpula. Se observa como tal relación tiende a reproducir el diagrama tenso-deformacional empleado para el acero de pretensado. Se observa como el acero del tendón ha evolucionado hasta alcanzar la tercera pendiente de este diagrama.

Del presente análisis ha resultado una predicción sobre la carga máxima de $1.37Q_0$ en ANLM y de $1.14Q_0$ en ANLGM, lo que representa unas cargas repartidas de 6.85 kPa y 5.70 kPa respectivamente, para una flecha en centro cúpula de 7.7 cm . A partir del punto de máxima carga, la estructura exhibe, tras un limitado descenso de la capacidad de carga, un aumento de la deformación a carga prácticamente constante en ANLM y una rama descendente en ANLGM. Durante este proceso la fisuración interna de la lámina progresa a la vez que aumenta la tracción del tendón de pretensado.

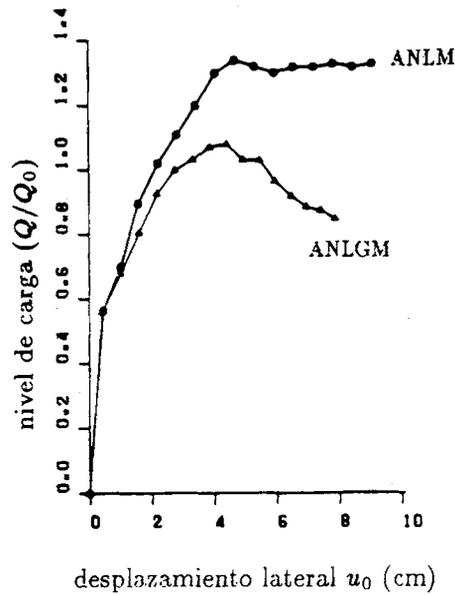


Figura 26. Ejemplo 3 – Relación entre el nivel de carga externa y el movimiento lateral en la base de la cúpula (w_0).

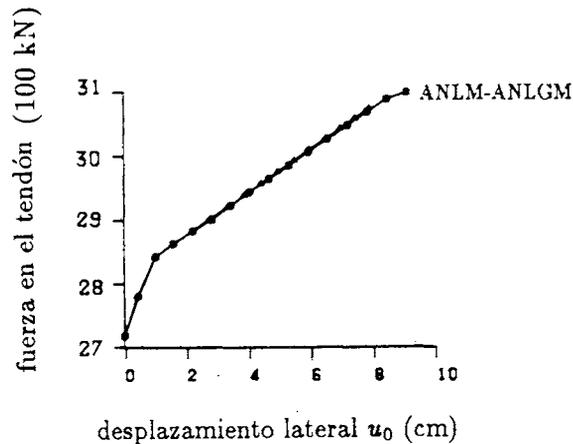


Figura 27. Ejemplo 3 – Relación entre la fuerza en el tendón y el desplazamiento lateral en la base (u_0).

La Figura 28 muestra el estado del material de la lámina para diferentes valores de la carga aplicada, en ANLGM. Los cambios del estado del material solamente afectan a la zona próxima a la base. Se aprecia la progresión de la fisuración tanto según los paralelos como en dirección meridional. A lo largo del análisis aparece plastificación en el acero pasivo circunferencial de la lámina. El modelo empleado también ha reproducido una restringida zona en aplastamiento.

Los efectos de no linealidad geométrica se muestran especialmente notables en los rango fisurado y último del comportamiento de la estructura. La consideración de estos efectos provoca una disminución de la carga máxima, sin afectar al rango elástico o de servicio.

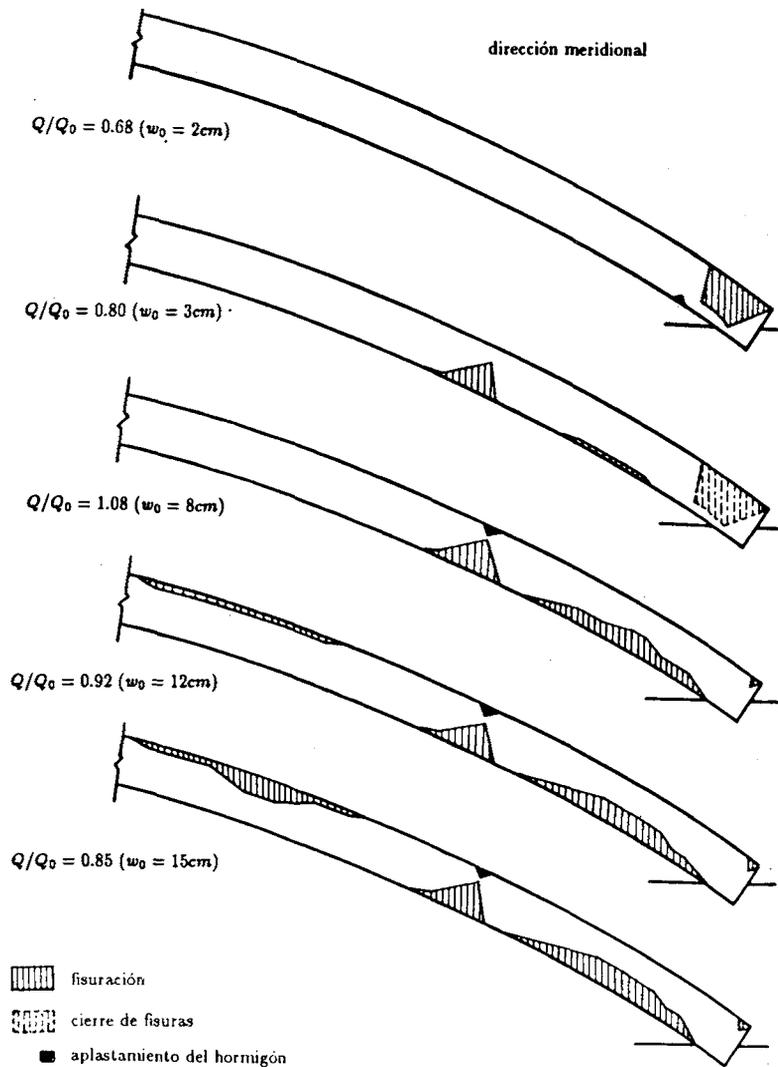


Figura 28.a. Ejemplo 3 – fisuración y estado de los materiales para distintos niveles de aplicación de carga externa. Dirección meridional.

La misma estructura ha sido estudiada bajo distintos niveles de pretensado y en ANLG, según se muestra en la Figura 29. Se observa como, a partir de cierto nivel de fuerza de pretensado, variaciones incluso importantes de ésta no afectan sensiblemente al valor de la carga última. Sin embargo, el pretensado sí tiene influencia en todos los casos en la determinación del rango de servicio de la estructura. Para valores bajos de la fuerza de pretensado, la capacidad última de la estructura sufre una importante reducción como consecuencia de la entrada en funcionamiento de los efectos de no linealidad geométrica tras una más rápida fisuración.

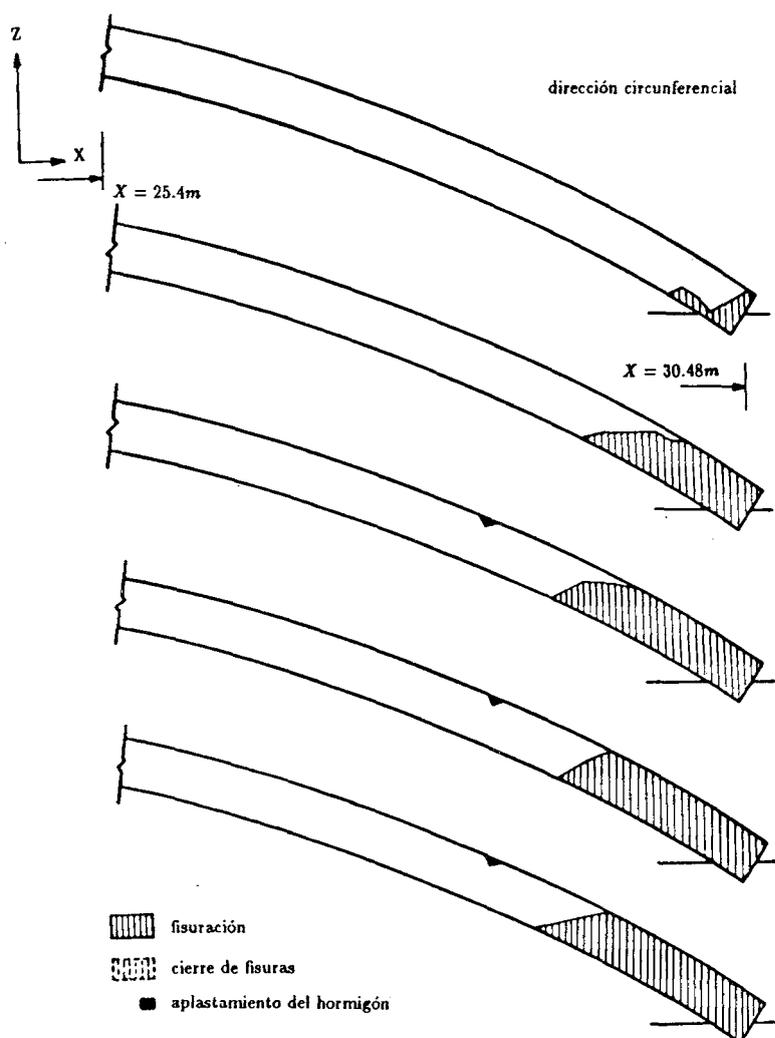


Figura 28.b. Ejemplo 3 - fisuración y estado de los materiales para distintos niveles de aplicación de carga externa. Dirección circunferencial.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se ha presentado un modelo numérico para el análisis no lineal de estructuras laminares de revolución armadas o pretensadas y con anillos rigidizadores, sometidas a cargas axisimétricas instantáneas.

Se ha comprobado el correcto funcionamiento del método mediante la comparación de resultados con ejemplos resueltos analíticamente o numéricamente por otros autores.

Los ejemplos numéricos presentados también han ilustrado la validez del modelo para el estudio y la predicción del comportamiento no lineal de este tipo de estructuras.

Por otra parte, los ejemplos analizados ponen de manifiesto el interés que desde un punto de vista estructural tienen los anillos rigidizadores y el pretensado. El pretensado

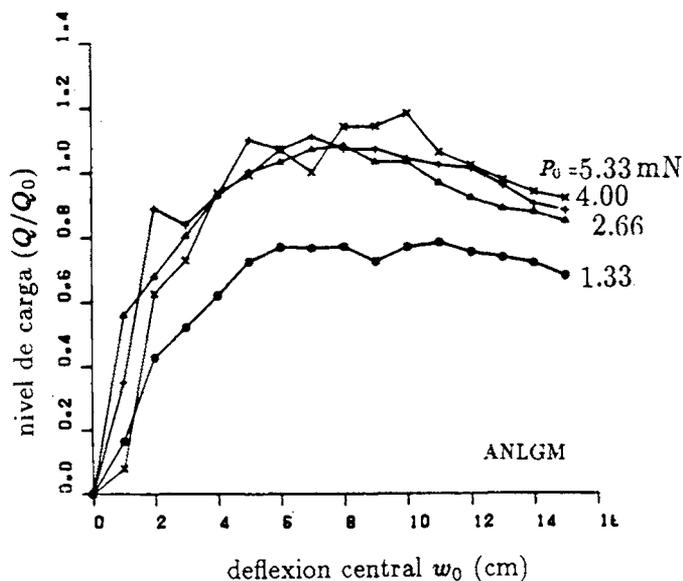


Figura 29. Ejemplo 3 – Relación entre el nivel de carga externa y la deflexión central (w_0) para distintas fuerzas de pretensado.

determina en gran medida el rango de servicio de tales estructuras y en ciertos casos influye también sobre la capacidad portante.

Como perspectivas de futuro cabe destacar el interés que presentaría la modelización ajustada del comportamiento de los tendones no adherentes, así como la inclusión de los efectos dependientes del tiempo (fluencia, retracción, relajación) en el análisis estructural. Estos temas y la generalización a láminas de forma general están siendo objeto de estudio por parte de los autores de este artículo.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo aquí presentado es parte del proyecto investigación CCA 8510-005 “Análisis no lineal y resistencia última de estructuras laminares de hormigón”, financiado por el Comité Conjunto Hispano-Norteamericano para la Cooperación Científica y Tecnológica, desarrollado en la Universidad Politécnica de Cataluña, en colaboración con la Universidad de California, Berkeley.

REFERENCIAS

1. K.P. Basu y P.L. Gould, “Shore II. Shell of Revolution Finite Element Program-Static Case”, Structural Division, Civil and Environmental Engineering Department, School on Engineering and Applied Science, Washington University, USA.
2. P.L. Gould y S.K. Send, “Mixed and Displacement Model Finite Elements for the Static Analysis of Shells of Revolution”. *Research report no. 20*, Structural Division, Civil and Environmental Engineering Department, School on Engineering and Applied Science, Washington University, USA (1972).

3. J. Oliver, "Una formulación cuasi-intrínseca para el estudio, por el Método de los Elementos Finitos, de vigas, arcos, placas y láminas, sometidos a grandes corrimientos en régimen elastoplástico", Departamento de Estructuras, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
4. E.C. Chan, "Nonlinear Analysis of Axisymmetric Reinforced Concrete Shells", *Research Report CE 299*, Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA, (1979).
5. Y.J. Kang, "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames", Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA.
6. A.R. Mari, "Nonlinear Geometric Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames", *Report no. UC/SESM 84/12*, Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA (1984).
7. J. Van Greunen, "Nonlinear Geometric Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Panels", *Report no. UC/SESM 79/7*, Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA (1979).
8. E.C. Chan, "Nonlinear Geometric Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells with Edge Beams", *Report no. UC/SESM 82/8*, Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA.
9. P. Roca, "Análisis no lineal por la geometría y el material de estructuras laminares de hormigón armado con elementos de borde pretensados", Departamento de Estructuras, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, (1985).
10. D. Darwin y D. Pecknold, "Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **103**, no. EM2, (1977).
11. H.B. Kupfer y K.H. Gerstle, "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, no. EM4, (1973).
12. G. Hofstetter y H.A. Mang, "Work-equivalent Node Forces from Prestress of Concrete Shells", en *Finite Element Methods for Plate and Shell Analysis*, Eds. T.J.R. Hughes y E. Hinton, Stanford University, Stanford, California, USA, (1985).