

FORMULACIÓN ELASTOPLÁSTICA PARA EL ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE PÓRTICOS PLANOS DE HORMIGÓN ARMADO

OSCAR MÖLLER*
MARCELO RUBINSTEIN*
y
GUILLERMO ETSE**

* *Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE)*
Universidad Nacional de Rosario
Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina
Tel.: + 54-41-256010 Fax: + 54-41-256207
E-mail: moller@fceia.unr.edu.ar

** *Laboratorio de Estructuras*
Universidad Nacional de Tucumán
CC 134, Correo Central, 4000 Tucumán, Argentina
Fax: + 54-81-229366 E-mail: cetse@herrera.untmre.edu.ar

RESUMEN

Se presenta una formulación de endurecimiento-ablandamiento en términos de resultantes de tensiones y desplazamientos para aplicar la teoría de elastoplasticidad a elementos de barra. Los factores se calibran con respecto a relaciones momento-curvatura de las secciones, obtenidas a partir de ecuaciones constitutivas realistas del hormigón y del acero.

Ejemplos muestran la capacidad del modelo y la importancia del ablandamiento en la respuesta estructural hasta los estados límites considerados.

ELASTOPLASTIC FORMULATION FOR COMPUTATIONAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE FRAMES

SUMMARY

A formulation of hardening and softening is presented in terms of stress resultants and displacements to apply the elastic-plastic theory to bar elements. The factors are adjusted with regard to moment-curvature relations of sections, obtained from realistic constitutive equations of confined concrete and steel.

Examples shown the model capacity and the importance of softening in the structural response up to the limit states considered.

Recibido: Febrero 1997

INTRODUCCIÓN

Para el análisis de la respuesta no lineal de pórticos planos de hormigón armado sismorresistente es necesario formular modelos matemáticos que establezcan una adecuada relación entre simplicidad y realismo.

La simplicidad del modelo es condición necesaria para su aplicación a estructuras, de uso corriente en la práctica, compuesta por numerosas barras, en donde se debe garantizar la convergencia de los procesos iterativos en un número razonablemente acotado de pasos.

El realismo es también una condición necesaria y esta cualidad debe ser incorporada al modelo estableciendo una adecuada relación entre la respuesta de la barra y las ecuaciones constitutivas de los materiales que la componen.

Así por ejemplo un modelo de barra con plasticidad concentrada en los extremos y comportamiento elastoplástico ideal resulta simple pero no realista ya que, al no tener en cuenta efectos de endurecimiento, será capaz de seguir, de manera aproximada, el comportamiento del pórtico sólo hasta la formación del mecanismo de colapso.

El modelo de barra que se propone en este trabajo para aplicación del método de elementos finitos en desplazamientos cumple con los dos requisitos mencionados. Se incorpora el endurecimiento y ablandamiento al modelo elastoplástico ideal utilizado en con una ley isótropa que gobierna la evolución del criterio de fluencia definido en términos de solicitaciones de sección M y N . A partir de las pendientes de endurecimiento o ablandamiento de las relaciones momento-curvatura de las secciones extremas del elemento, se deducen términos a incluir en la matriz de rigidez elastoplástica de la barra.

La ley momento-curvatura se construye por el método clásico, teniendo en cuenta relaciones $\sigma - \varepsilon$ realistas para el acero y el hormigón² e incluyendo la posibilidad de considerar procesos cíclicos. El colapso se manifiesta cuando se alcanza un valor límite para la curvatura asociado con la ocurrencia de uno de los estados límites establecidos.

Se presentan dos ejemplos para realizar una primera calibración y verificación de los factores de endurecimiento y ablandamiento del modelo propuesto, que pusieron de manifiesto la eficacia del mismo para representar la sobrerresistencia de la estructura, registrando la respuesta más allá de la entrada en el campo plástico de una cantidad de secciones suficientes para la formación de un mecanismo y para tener en cuenta efectos de localización de deformaciones por ablandamiento derivados, en este caso, de armaduras comprimidas y confinamiento insuficientes.

Dentro del compromiso entre eficiencia y precisión de este modelo aparecen como limitaciones para un futuro perfeccionamiento, que la ley momento-curvatura se deduce para un valor fijo del esfuerzo normal y que el modelo no tiene en cuenta la rotación concentrada en la interfaz barra-nudo por deslizamiento de las armaduras.

TEORÍA DE ELASTOPLASTICIDAD APLICADA A ELEMENTOS DE BARRA

La Figura 1 presenta el elemento de barra con sus grados de libertad y variación de esfuerzos internos considerados.

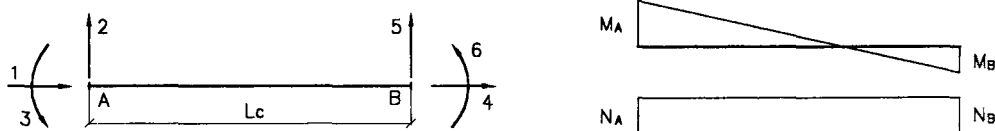


Figura 1. Elemento de la barra

La relación entre incrementos de fuerzas $\Delta \mathbf{F}$ y de desplazamientos $\Delta \mathbf{u}$ en las secciones extremas del elemento A y B se obtiene aplicando la teoría general de elastoplasticidad^{1,3,4}

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_{ep} \Delta \mathbf{u} \tag{1}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^e + \Delta \mathbf{u}^p = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{F}} \Delta \Lambda \tag{2}$$

$\Delta \mathbf{u}^e$ es el incremento de desplazamientos elásticos, en el cual $\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}$ con \mathbf{K}_L matriz de rigidez lineal elástica¹, \mathbf{K}_{NL} matriz de rigidez no lineal¹, $\Delta \mathbf{u}^p$ es el incremento de desplazamientos plásticos, con $\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{F}$ matriz gradiente de la superficie de fluencia y $\Delta \Lambda^T = [\Delta \lambda_A, \Delta \lambda_B]$ contiene los multiplicadores plásticos.

Los incrementos de fuerzas internas son

$$\Delta \mathbf{F}^T = [\Delta N_A, \Delta Q_A, \Delta M_A, \Delta N_B, \Delta Q_B, \Delta M_B]$$

A partir de la relación elástica

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_{ep} \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{K} (\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^p) = \mathbf{K} \left(\Delta \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{F}} \Delta \Lambda \right) \tag{3}$$

y la condición de consistencia

$$Y(\mathbf{F}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \rightarrow \Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{F}} \Delta \mathbf{F} + \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \Delta \boldsymbol{\kappa} = 0 \tag{4}$$

resulta

$$\Delta \Lambda = \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} \tag{5}$$

con

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{F}} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_A & \\ & A_B \end{bmatrix}, \quad A_i = -\frac{1}{\Delta \lambda_i} \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \boldsymbol{\kappa}_i} \Delta \boldsymbol{\kappa}_i \quad (6)$$

Reemplazando (5) en (3) y reordenando se obtiene

$$\Delta \mathbf{F} = \left[\mathbf{K} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{K} \right] \Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_{ep} \Delta \mathbf{u} \quad (7)$$

donde \mathbf{K}_{ep} es la matriz de rigidez elastoplástica.

En este trabajo se propone como función de fluencia para sección rectangular la siguiente expresión

$$Y(\mathbf{F}, \boldsymbol{\kappa})_i = \frac{|M|}{M_p(\kappa_M)} + \left(\frac{N}{N_p(\kappa_N)} \right)^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

donde $M_p = \sigma_y Z$ es el momento plástico con σ_y tensión de fluencia del material y Z el módulo plástico de la sección; $N_p = \sigma_y A$ es el esfuerzo normal plástico; κ_M, κ_N son los parámetros de endurecimiento o ablandamiento.

La matriz gradiente a la superficie de fluencia resulta

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{2 N_A}{N_p^2 A} & 0 & \frac{\text{Sig. } M_A}{M_p A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2 N_B}{N_p^2 B} & 0 & \frac{\text{Sig. } M_B}{M_p B} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los términos de endurecimiento se definen

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}^T = \left[\Delta \boldsymbol{\kappa}_A^T, \Delta \boldsymbol{\kappa}_B^T \right] \quad (10)$$

con

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_i = \begin{bmatrix} \Delta \kappa_N \\ \Delta \kappa_M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} N \Delta(\Delta l)_p \\ M \Delta \theta_p \end{bmatrix}_i = \Delta \lambda_C \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 2N/N_p^2 \\ \text{Sig. } M/M_p \end{bmatrix}_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} \right)_A & \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} \right)_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} \right)_B & \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} \right)_B \end{bmatrix} \quad (12)$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} &= \frac{\partial Y}{\partial N_p} \frac{dN_p}{d\kappa_N} = -2 \frac{N}{N_p^3} H'_N, & H'_N &= \frac{dN_p}{d\Delta l_p} \\ \frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} &= \frac{\partial Y}{\partial M_p} \frac{dM_p}{d\kappa_M} = -\frac{\text{Sig. } M}{M_p^2} H'_M, & H'_M &= \frac{dM_p}{d\theta_p} \end{aligned} \quad (13)$$

Reemplazando (11), (12) y (13) en (6) se obtiene

$$A_i = \frac{4N^3}{N_p^5} H'_N + \frac{M}{M_p^3} H'_M \quad (14)$$

Los factores H'_N y H'_M deben estar relacionados entre sí y con la tensión de fluencia del material; se propone

$$\begin{aligned} \Delta N_p &= A \Delta \sigma_y \\ \Delta M_p &= Z \Delta \sigma_y = \frac{Z}{A} \Delta N_p = \frac{d}{4} \Delta N_p \end{aligned} \quad (15)$$

donde d es la altura de la sección rectangular.

Además

$$\begin{aligned} \Delta N_p &= H'_N \Delta(\Delta l)_p = H'_N \Delta \lambda 2N / N_p^2 \\ \Delta M_p &= H'_M \Delta \theta_p = H'_M \Delta \lambda \text{Sig. } M / M_p = \frac{d}{4} H'_N \Delta \lambda 2N / N_p^2 \end{aligned} \quad (16)$$

El factor H'_M se obtiene a partir de la relación momento curvatura de la sección recta de la barra y su deducción se presenta en el apartado siguiente.

Luego

$$H'_N = H'_M \frac{8}{d^2} \frac{N_p}{N} \text{Sig. } M \quad (17)$$

Para

$$N = 0 \implies H'_N \rightarrow \infty, \quad \Delta(\Delta l) \rightarrow 0, \quad \text{luego} \quad \Delta N_p = \frac{A}{Z} \Delta M_p \quad (18)$$

El momento plástico y el esfuerzo normal plástico se actualizan para cada sección extrema de la barra con

$$\begin{bmatrix} N_p \\ M_p \end{bmatrix}_i^{n+1} = \begin{bmatrix} N_p \\ M_p \end{bmatrix}_i^n + \Delta \lambda_i \begin{bmatrix} H'_N \\ H'_M \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 2N / N_p^2 \\ \text{Sig. } M / M_p \end{bmatrix}_i \quad (19)$$

Con el incremento de desplazamientos Δu , obtenido del proceso incremental iterativo de Newton-Raphson, se encuentran, por relaciones geométricas, los incrementos de giros en las secciones A y B: $\Delta \theta_A$, $\Delta \theta_B$ y el incremento de alargamiento $\Delta(\Delta l)$. Con ellos se obtienen ΔN_A , $\Delta N_B = -\Delta N_A$, ΔM_A , ΔM_B , $\Delta \lambda_A$, $\Delta \lambda_B$, $\Delta \theta_{pA}$, $\Delta \theta_{pB}$ y $\Delta(\Delta l)_p$ de acuerdo a¹ y teniendo en cuenta (14).

El ajuste final a la superficie de fluencia se realiza con el método de la rigidez tangente y corrección radial³. Los incrementos de esfuerzos de corte se calculan por equilibrio $\Delta Q_A = -\Delta Q_B = (\Delta M_A + \Delta M_B) / L$.

Esta metodología fué implementada en el código DINLI para análisis estático y dinámico de estructuras con no linealidad física y geométrica, utilizando el método de elementos finitos¹.

RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA, PARÁMETROS DE ENDURECIMIENTO-ABLANDAMIENTO, ESTADOS LÍMITES ÚLTIMOS

Se construye la relación momento-curvatura para la sección rectangular de hormigón armado con un esfuerzo normal constante dado a partir de las siguientes hipótesis:

- Ecuación de compatibilidad de deformaciones: validez de la hipótesis de Bernoulli, es decir, la sección se mantiene plana.
- Ecuaciones constitutivas del hormigón confinado y acero: modelos propuestos por Mander *et al.*².
- Equilibrio entre esfuerzo normal interno y externo: obtenido por iteraciones para cada incremento de curvatura, luego se evalúa el momento flector asociado a cada curvatura.

El proceso está implementado en un programa de computación MPHI⁵ y se puede hacer un análisis monótono creciente o cíclico. Para este último caso la curva monótona creciente es buena aproximación de la envolvente. Dicha curva se puede rectificar, ver ejemplos, obteniéndose el momento plástico inicial M_{p0} , la rigidez (EI), curvatura de fluencia ϕ_y , endurecimiento $h(EI)$, ablandamiento $s(EI)$, momento máximo M_{pmax} y curvatura última ϕ_u , como muestra la Figura 2.

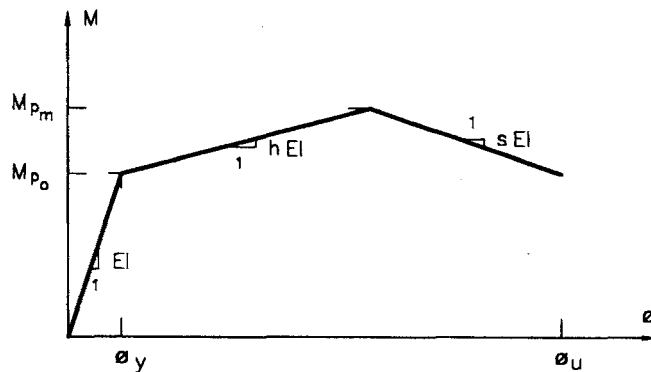


Figura 2. Parámetros de la relación momento-curvatura

Para definir la curvatura última ϕ_u se analizan varios estados límites:

- Degradación del momento resistente en un 20 % con relación al momento máximo alcanzado.
- Capacidad de absorber energía por parte de los estribos de confinamiento. A partir del balance energético de la sección se puede estimar la deformación última a compresión del hormigón⁶.
- Deformación última de las barras de armadura, a tracción y a compresión (pandeo).

La relación entre la pendiente de endurecimiento $h(EI)$ o ablandamiento $s(EI)$ a nivel de sección y el factor H'_M a nivel de elemento se deduce de la siguiente manera

- Para la sección extrema de la barra

$$\Delta M_p = h(EI)\Delta\phi \tag{20}$$

$$\Delta\phi = \Delta\phi^e + \Delta\phi^p = \frac{\Delta M}{EI} + \frac{\Delta\theta_p}{l_p} \tag{21}$$

donde $\Delta\theta_p$ es el incremento de giro plástico y l_p es una longitud característica o longitud de rótula plástica equivalente. De (21) resulta

$$\Delta\theta_p = \left(\Delta\phi - \frac{\Delta M}{EI} \right) l_p \tag{22}$$

- A nivel de elemento y a partir de (13), reemplazando $\Delta\theta_p$ por (22)

$$\Delta M_p = H'_M \Delta\theta_p = \frac{H'_M l_p}{1 + \frac{H'_M l_p}{EI}} \Delta\phi \tag{23}$$

Comparando (20) con (23) resulta finalmente

$$H'_M = \frac{h}{1-h} \frac{EI}{l_p} \tag{24}$$

EJEMPLOS

Ejemplo 1

Se trata de una viga ménsula sismorresistente de hormigón armado de la estructura de un balcón, V_1^v o V_2^v de la Figura 3. Está diseñada con la carga estática según el reglamento INPRES-CIRSOC 103 con los siguientes datos: zona sísmica 3, suelo tipo II, destino: edificio privado de habitación, materiales: hormigón H-17, acero ADN-420, carga permanente $0,415 \text{ t/m}^2$ y sobrecarga $0,5 \text{ t/m}^2$. También se indica la sección y armaduras resultantes.

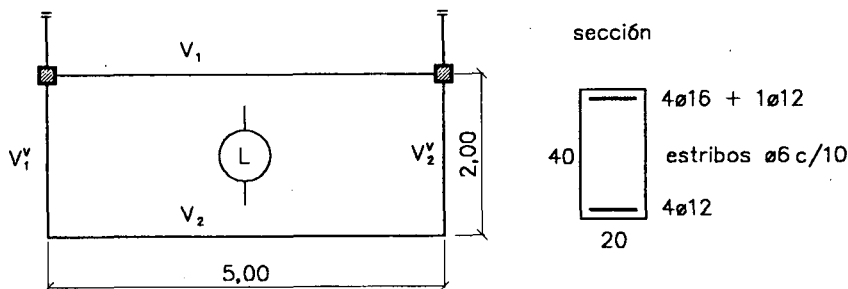


Figura 3. Ménsula-datos y diseño s/INPRES-CIRSOC 103

En la Figura 4 se muestra la ley momento-curvatura de la sección de empotramiento para análisis monótono creciente, se indican los estados límites y los datos que surgen para el modelo de la barra, como se presentó en la Figura 2. Se destaca que los valores de $h(EI)$ y $s(EI)$ pueden ser ambos positivos, como en este caso, correspondiente a dos pendientes de endurecimiento o con valores negativos para ablandamiento.

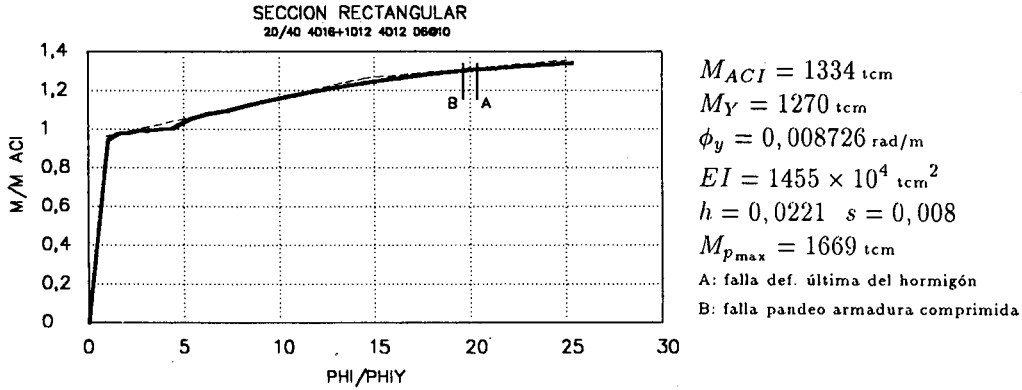


Figura 4. Sección de la ménsula con armaduras s/INPRES-CIRSOC 103

Se ha considerado el caso de un diseño de armaduras indebido a partir de la sollicitación determinante, pero sin tener en cuenta condiciones reglamentarias de armadura comprimida mínima y estribos de confinamiento. Resulta una armadura inferior $2\phi 6$ y estribos $\phi 6c/14$, manteniéndose la armadura superior en $4\phi 16 + 1\phi 12$.

En la Figura 5 se observa la relación momento-curvatura mostrando un breve período de endurecimiento y luego ablandamiento al prevalecer la caída de resistencia del hormigón poco confinado frente al endurecimiento de la escasa armadura comprimida. Se indica también los estados límites alcanzados.

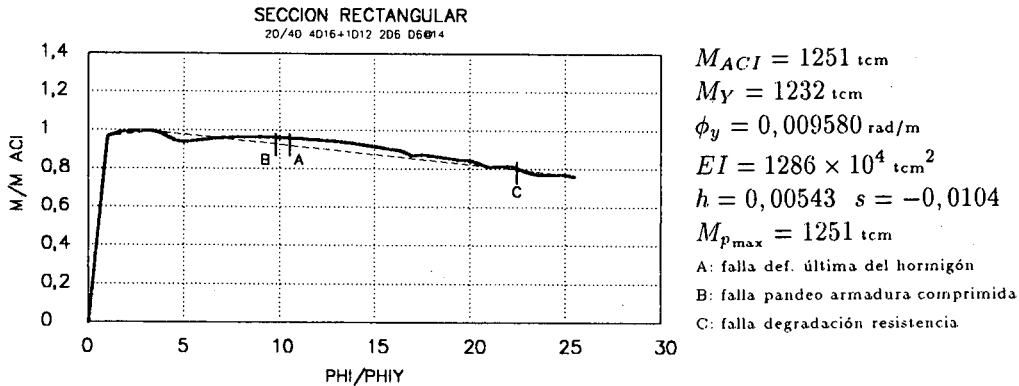


Figura 5. Sección de la ménsula con armaduras convencionales

La respuesta estructural no lineal se obtiene imponiendo incrementos de desplazamientos verticales en el extremo libre de la ménsula. Los resultados se presentan en la Figura 6 para los dos casos de armaduras: s/IMPRES-CIRSOC 103 y convencionales.

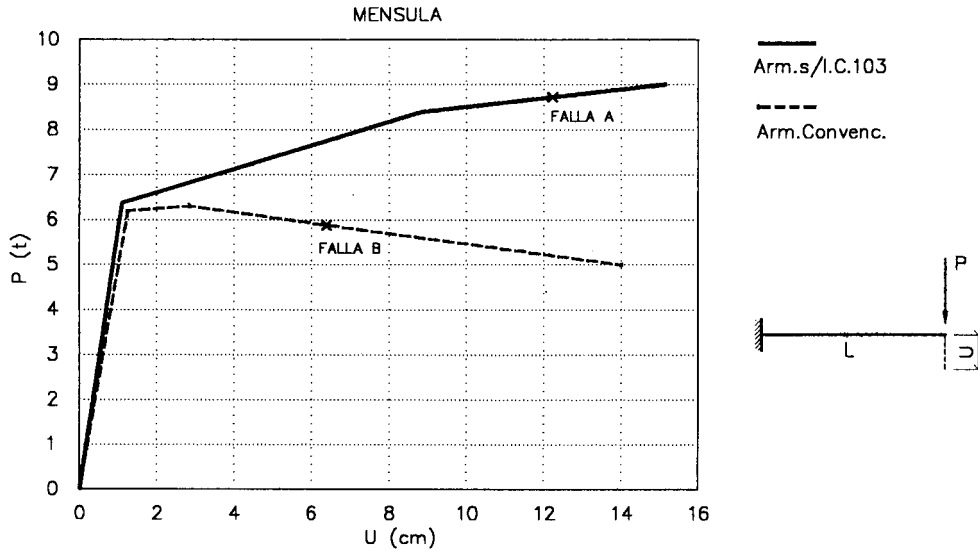


Figura 6. Respuesta de la ménsula: fuerza-desplazamiento vertical

De la respuesta estructural se obtiene el momento $M = P L$ y la curvatura $\phi = \phi_e + \phi_p = M/EI + \theta_p l_p$, donde θ_p es la rotación plástica en el extremo empotrado de la barra y $l_p = 0,75 d$ es la longitud de rótula plástica equivalente referida a la altura d de la sección. Con las curvaturas ϕ se obtienen los valores de momento flector a partir de la relación $M - \phi$ (Figuras 2,3) de la sección de empotramiento. Estos resultados se comparan con los valores de M de la respuesta estructural, encontrándose una perfecta coincidencia entre ambos, validando de esta manera la deducción del parámetro H'_M (24).

A partir de los resultados de la Figura 6 se calcula la relación entre las rigideces del elemento en el período de endurecimiento K_h y la rigidez elástica inicial K , resultando $K_h/K = 0,046$. Si se compara con la relación de rigideces a flexión de la sección $h = 0,0221$, se observa que la pendiente de endurecimiento en la respuesta estructural es algo mayor que el doble de la misma relación para la sección, similar al factor 2 recomendado en⁷.

Se pone de manifiesto en la Figura 6 la diferencia de resistencia y ductilidad de ambos casos: $P_u = 8,68 t$, $\mu = 12,1/1,21 = 10$ para el diseño s/IMPRES-CIRSOC 103, frente a $P_u = 5,87 t$, $\mu = 6,2/1,28 = 4.84$ para el diseño con armaduras convencionales, destacándose la importancia del efecto de localización de deformaciones por ablandamiento.

Ejemplo 2

Es un pórtico simple sismorresistente de hormigón armado de la estructura de un entrepiso interno para un depósito de mercadería, mostrado en la Figura 7, diseñado con el método estático del reglamento INPRES-CIRSOC 103 con los siguientes datos: zona sísmica 3, suelo tipo II, destino: edificio industrial de baja densidad de ocupación, materiales: hormigón H-17, acero ADN-420, carga permanente $0,41 \text{ t/m}^2$ y sobrecarga $0,8 \text{ t/m}^2$.

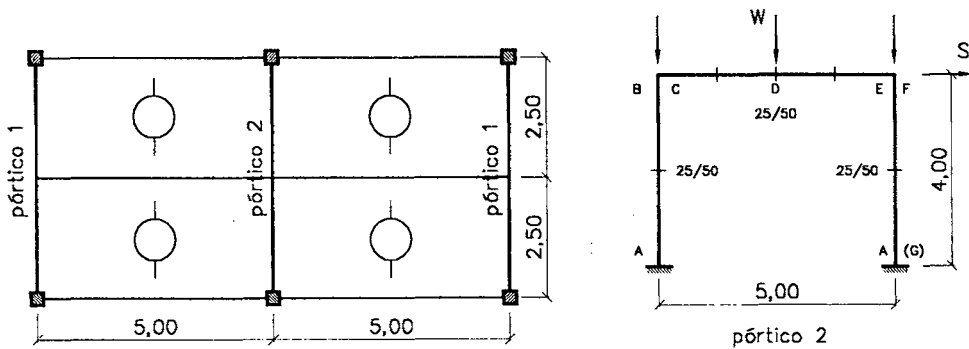


Figura 7. Pórtico-datos geométricos y discretización

Del análisis de la ley momento-curvatura de las secciones A a G surgen los parámetros de la Tabla I, de acuerdo a la Figura 2, con curvaturas últimas producidas en un análisis con cuatro ciclos completos hasta ϕ_u y $-\phi_u$.

Sección 25/50	M_{p0} tcm	ϕ [rad/m]	EI 10^4 [tcm ²]	$\frac{M_{p_{max}}}{M_{p0}}$	h	s	ϕ_u [rad/m]
A	1836	0,007459	2461	1,304	0,01530	0,00205	0,18368
B	1848	0,007166	2578	1,325	0,01644	0,00174	0,14870
C	2601	0,007277	3575	1,426	0,02166	0,00232	0,18526
D	3641	0,008579	4244	1,185	0,01100	0,00086	0,06729
E	2496	0,007429	3360	1,433	0,02150	0,00221	0,20187
F	2615	0,008281	3157	1,297	0,01536	0,00113	0,14615
G	1584	0,007192	2203	1,019	0,00473	-0,00415	0,07917

Tabla I. Parámetros de las secciones del pórtico

Para la columna derecha, sección inferior, se consideró como variante la sección tipo G con insuficiente armadura comprimida (externa) y estribos convencionales, obteniéndose ablandamiento en dicha sección.

La respuesta del pórtico para desplazamientos horizontales impuestos en la viga se presenta en la Figura 8. Las dos combinaciones reglamentarias 1,3 W+S, 0,85 W+S originan respuestas con diferencias pequeñas, y en ambos casos la falla se produce por alcanzarse la curvatura última en la base de las dos columnas, secciones A.

También en este ejemplo se verifica la validez del parámetro H'_M a través de la igualdad entre los momentos flectores obtenidos de la respuesta estructural y los calculados a partir de la curvatura y la relación $M - \phi$ de la sección. La longitud característica l_p se fijó en $0,75 d$, en forma similar al Ejemplo 1.

La respuesta con la sección tipo G en la columna derecha, presenta una caída de resistencia de 26,15 t a 21,0 t, y disminución de ductilidad global de 8,25 a 3,25, pero sin entrar en ablandamiento general del pórtico, ni modificación del mecanismo de plastificación, debido a que sólo una sección fué debilitada.

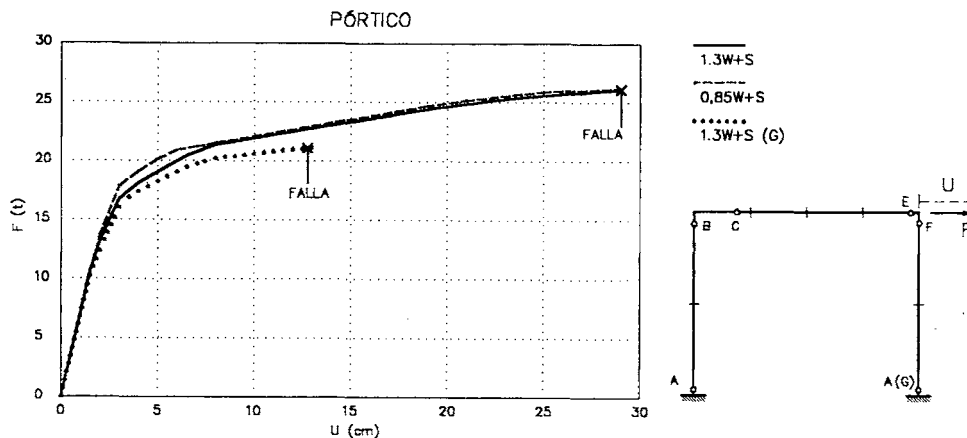


Figura 8. Respuesta del pórtico: fuerza-desplazamiento horizontal

CONCLUSIONES

Se presentó un modelo de endurecimiento y ablandamiento para utilizar la teoría general de elastoplasticidad en elementos de barra para pórticos planos, donde se relacionan incrementos de esfuerzos internos (resultantes de tensiones) con incrementos de desplazamientos en las secciones extremas del elemento.

La calibración se realizó a partir de relaciones momento-curvatura obtenidas para las secciones, utilizando ecuaciones constitutivas realistas para el hormigón confinado y el acero. Se encontró una expresión analítica que relaciona las pendientes de endurecimiento y ablandamiento de la relación momento-curvatura de la sección, con el parámetro H'_M que representa el endurecimiento y ablandamiento del elemento de barra. Para ello la longitud característica o de regularización, representa la longitud de rótula plástica equivalente.

La presencia de secciones con ablandamiento, por ejemplo debido a deficiencias en el diseño, reducen sensiblemente la resistencia y ductilidad estructural.

REFERENCIAS

1. O. Möller, M. Rubinstein, "Análisis dinámico no lineal físico y geométrico de barras: discusión del campo de aplicación de teorías aproximadas", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 11, 2, pp. 151-182, (1995).
2. J.B. Mander, M.J.N. Priestley y R. Park, "Seismic Design of Bridge Piers", Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand, Research report 84-2 (1984).
3. D.R. Owen y E. Hinton, "*Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*", Pineridge Press Limited, U.K. (1980).
4. O.C. Zienkiewicz, "*El Método de los Elementos Finitos*", Reverté, (1980).
5. O. Möller, "Diseño probabilístico de estructuras para depósitos de agua elevados solicitados por acción sísmica", Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Rosario (1989).
6. T. Paulay y M.J.N. Priestley, "*Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*", John Wiley & Sons Inc. (1992).
7. F.C. Filippou y A. Issa, "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames Under Cyclic Load Reversals", Report N. UCB/EERC-88/12 (1988).