

# INFLUENCIA DE LA PERMEABILIDAD VERTICAL EN EL FLUJO DE PETRÓLEO HACIA UN POZO PRODUCTOR

GABRIELA B. SAVIOLI\*  
MARÍA S. BIDNER\*  
PABLO M. JACOVKIS\*\*

y  
L.W. LAKE\*\*\*

\* *Laboratorio de Ingeniería de Reservorios  
Facultad de Ingeniería, UBA  
Pabellón Industrias, Ciudad Universitaria  
1428 Buenos Aires, Argentina  
Tel.: + 54-1-784 8085 Fax: + 54-1-780 0145  
E-mail: gsavioli@di.fcen.uba.ar*

\*\* *Instituto de Cálculo y Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA  
Pabellón II, Ciudad Universitaria  
1428 Buenos Aires, Argentina*

\*\*\* *Center for Petroleum and Geosystems Engineering  
The University of Texas at Austin  
CPE 2.502 Austin, Texas 78712, USA*

## RESUMEN

Se describe el flujo bidimensional de petróleo a través de un reservorio heterogéneo mediante una ecuación parabólica en derivadas parciales, que es una extensión de la denominada ecuación de difusividad. Este modelo tiene interés práctico en ingeniería de reservorios: se utiliza para predecir la producción de un pozo de petróleo y también en la interpretación de ensayos de presión en pozos. La solución numérica de dicha ecuación se obtiene mediante una familia de esquemas de diferencias finitas que dependen de un parámetro  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Una técnica basada en la expansión en serie de Taylor de funciones matriciales (TSMF) es usada para resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante. El simulador numérico descrito se aplica para estudiar el comportamiento de reservorios de dos capas con valores típicos de permeabilidad vertical iguales o menores que los de permeabilidad horizontal. Específicamente, para un pozo de petróleo que produce a caudal constante, se analiza la influencia de la permeabilidad vertical en las respuestas de presión y caudal de cada capa. Se concluye que la permeabilidad vertical influye en las respuestas de presión y caudal a tiempos cortos e intermedios, por lo que debería ser tenida en cuenta tanto en el diseño como en la interpretación de los ensayos de presión en pozos.

Recibido: Febrero 1997

## INFLUENCE OF VERTICAL PERMEABILITY ON FLUID FLOW TOWARDS A WELL

### SUMMARY

The two dimensional flow of oil through an heterogeneous porous media is described using a parabolic partial differential equation, which is an extension of the diffusivity equation. This model has practical interest in reservoir engineering: it is used to predict the production of an oil well and also in well test analysis. The numerical solution is obtained by applying a family of finite difference schemes which depend on one parameter  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . A technique based on Taylor Series of Matrix Functions (TSMF) is used to solve the resulting system of linear equations. The numerical simulator is applied to study the behavior of two-layer reservoirs with vertical permeability less or equal than horizontal permeability. Specifically, the influence of vertical permeability is analyzed for an oil well producing at constant rate. We deduce that vertical permeability affects pressure and flow rate response at low and intermediate times, therefore it has to be considered in the design and interpretation of pressure transient tests.

### INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos a través de un medio poroso se obtienen combinando la ley de Darcy y la ecuación de conservación de masa<sup>1,2</sup>. Aunque todos los reservorios son tridimensionales, en muchas situaciones prácticas se puede desestimar el flujo en alguna coordenada. En este trabajo se analiza el flujo monofásico de petróleo hacia un pozo productor en dos dimensiones (radial y vertical). Al considerar flujo monofásico se obtiene una ecuación que puede utilizarse como modelo matemático de los ensayos de pozos<sup>3</sup>. Básicamente, el ensayo consiste en cambiar bruscamente el caudal de producción o inyección del pozo y medir la respuesta de presión resultante. Dicha respuesta depende de las propiedades de la roca-reservorio y de los fluidos y de la geometría del flujo. En consecuencia, cabe esperar que algunos de estos parámetros, característicos del pozo y del reservorio, puedan ser estimados a partir de los valores de presión medidos.

Modelos bidimensionales fueron considerados por otros autores (Lefkovits *et al.*<sup>4</sup>, Prijambodo *et al.*<sup>5</sup>), pero en casos simplificados con propiedades constantes en cada capa del reservorio y despreciando la permeabilidad vertical<sup>4</sup> o los efectos gravitatorios<sup>5</sup>.

En este trabajo se analiza la influencia de la permeabilidad vertical en las respuestas de presión y caudal de un pozo con el objetivo futuro de poder obtener dicho parámetro a partir de datos medidos durante ensayos de pozo. Este parámetro fue siempre despreciado por los modelos matemáticos más comunes, ya sean los tradicionales unidimensionales<sup>3</sup> o aquellos que consideran al reservorio estratificado en capas de distinta permeabilidad, pero sin comunicación vertical entre ellas ("commingled reservoir"<sup>4</sup>). En nuestro caso se simulan reservorios estratificados pero con comunicación vertical entre capas. Se utilizan valores contrastantes de permeabilidad horizontal y vertical para un mejor análisis de las respuestas de presión y caudal.

El modelo matemático del flujo bidimensional de petróleo hacia un pozo productor se deduce rigurosamente en el apartado siguiente. Se lo resuelve numéricamente

aplicando diferencias finitas. La discretización del modelo y su resolución se describen brevemente más adelante. Un estudio detallado de los modelos matemáticos para el flujo en una y dos dimensiones fue realizado por Savioli *et al.*<sup>6</sup>, en el cual se puede encontrar, además de la discretización de las ecuaciones, su correspondiente análisis de estabilidad. El sistema de ecuaciones lineales resultante se resuelve mediante una técnica basada en la expansión en serie de Taylor de funciones matriciales (TSMF). En un trabajo anterior<sup>7</sup> esta técnica fue comparada con los métodos tradicionales de direcciones alternadas (ADI) y de sobrerelajación por bloques (BSOR), concluyendo que consume menos tiempo CPU si se eligen valores adecuados del parámetro  $\theta$  y del incremento de tiempo  $\Delta t$ . Finalmente, a continuación se aplica este modelo para analizar la influencia de la permeabilidad vertical en la respuesta de presión y caudal de un reservorio de dos capas con valores contrastantes de permeabilidades.

### MODELO MATEMÁTICO

En un reservorio de petróleo (que supondremos acotado) fluyen hasta tres fases: gas, petróleo y agua que denominaremos con los subíndices  $g, o$  y  $w$ . Se considera el modelo composicional más general, donde hay  $n$  especies químicas o componentes, que pueden existir en una o todas las fases y pueden transferirse entre las fases. Dichos componentes corresponden en su mayoría a los hidrocarburos puros que constituyen el petróleo y el gas y en su minoría a componentes no hidrocarburos.

La *ecuación de continuidad*<sup>1,2</sup> para el modelo composicional general de  $n$  componentes y 3 fases (gas, petróleo y agua) es

$$-\nabla \cdot (c_{ig}\rho_g\vec{v}_g + c_{io}\rho_o\vec{v}_o + c_{iw}\rho_w\vec{v}_w) + q_i = \frac{\partial}{\partial t}(\phi(c_{ig}\rho_g S_g + c_{io}\rho_o S_o + c_{iw}\rho_w S_w)) \quad (1)$$

$i = 1, \dots, n$

Por otro lado se tiene la *ecuación de Darcy*, que es la ecuación de movimiento en medios porosos. Es una ecuación empírica que permite definir la permeabilidad de la roca. Esto es una medida de la facilidad con que los fluidos pueden moverse a través de los poros. La expresión para cada fase  $j, j = o, g, w$  es

$$\vec{v}_j = -\frac{k}{\mu_j} \frac{k_{rj}}{\mu_j} (\nabla p_j - g p_j \nabla D) \quad (2)$$

Si bien la ecuación de Darcy tiene un origen experimental, ha sido deducida a partir de la ley de Newton de la mecánica de los fluidos y también a partir de la ley de Navier-Stokes para fluidos newtonianos<sup>8,9</sup>.

Las ecuaciones (1) y (2) se simplifican considerablemente para el flujo monofásico de petróleo. En efecto, en la ecuación (1)  $c_{ig} = c_{iw} = 0, c_{io} = 1, S_o = 1$ ; y en la ecuación (2)  $j = o, k_{ro} = 1$ . Usando estas hipótesis y combinando (1) y (2), se llega a

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{1}{\mu} k (\nabla p - g \rho \nabla D) \right) + q = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (3)$$

(a fin de simplificar la notación, se ha eliminado el subíndice  $o$ ).

Se analiza el flujo monofásico de petróleo hacia un pozo productor. Entonces, como modelo geométrico se considera un reservorio cilíndrico con un único pozo situado en el centro. Dicho reservorio está compuesto por un cierto número de capas horizontales paralelas, cada una de las cuales posee características físicas particulares. Además, no existe flujo a través de las tapas ni de las paredes del reservorio<sup>5,6</sup>. La Figura 1 describe el modelo del reservorio.

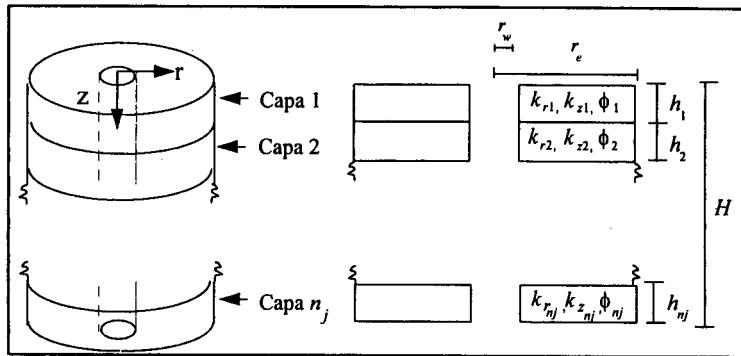


Figura 1. Modelo geométrico del reservorio

Así, es conveniente plantear las ecuaciones en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Haremos la suposición de flujo axisimétrico, por lo tanto el fluido se mueve únicamente en las direcciones  $(r, z)$ . Además, se hacen rotar los ejes de coordenadas para superponerlos a los ejes principales del tensor de permeabilidad de modo que éste resulte diagonal. La profundidad se mide en la dirección del eje vertical  $z$ , es decir,  $D(r, \theta, z) = z$ . Introduciendo estas hipótesis en la ecuación (3) se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho(p) \frac{k_r(r, z)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial r}(r, z, t) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho(p) \frac{k_z(r, z)}{\mu(p)} \left( \frac{\partial p}{\partial z}(r, z, t) - g\rho(p) \right) \right) + q(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi(p)\rho(p)) = \phi(p) \frac{\partial \rho}{\partial t}(p) + \rho(p) \frac{\partial \phi}{\partial t}(p) \quad (4)$$

Para resolver esta ecuación es necesario especificar las ecuaciones de estado y la variación de la porosidad en función de la presión. Con respecto a la ecuación de estado supondremos que el petróleo es un fluido levemente compresible, de compresibilidad constante  $c$

$$c = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = c\rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5)$$

Con respecto a la porosidad, supondremos que sólo depende de las coordenadas espaciales  $\phi = \phi(r, z)$  (se desprecia la compresibilidad de la roca).

Finalmente, introduciendo (5) y (6) en (4), se llega a la expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho(p) \frac{k_r(r, z)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial r}(r, z, t) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho(p) \frac{k_z(r, z)}{\mu(p)} \left( \frac{\partial p}{\partial z}(r, z, t) - g \rho(p) \right) \right) + \quad (7)$$

$$+ q(r, z, t) = \phi(r, z) c \rho(p) \frac{\partial p}{\partial t}(r, z, t)$$

En la ecuación (7) aparece la densidad del petróleo  $\rho(p)$ . Usualmente, los simuladores numéricos de reservorios no se plantean en función de la densidad, sino del *factor de volumen del fluido*  $B_f^{1,2}$ , que se define como el cociente entre el volumen del fluido a la presión y temperatura del reservorio y el volumen de la misma cantidad de fluido en condiciones estándar de superficie (CS). En este caso particular, en el que se considera petróleo monofásico, resulta

$$B_o(p) = \frac{[V_o]_{CR}}{[V_o]_{CS}} = \frac{(\rho_o)_{CS}}{(\rho_o)_{CR}} = \frac{\rho_{CS}}{\rho(p)} \quad (8)$$

Introduciendo  $B_o(p)$  en la ec. (7), dividiendo por  $\rho_{CS}$  y llamando

$$T_r(r, z, p) = \frac{k_r(r, z)}{\mu(p) B_o(p)}, \quad T_z(r, z, p) = \frac{k_z(r, z)}{\mu(p) B_o(p)} \quad (9)$$

$$\beta(r, z, p) = \frac{\phi(r, z) c}{B_o(p)}, \quad \hat{q}(r, z, t) = \frac{q(r, z, t)}{\rho_{CS}}$$

se obtiene la ecuación general

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_r(r, z, p) \frac{\partial p}{\partial r}(r, z, t) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( T_z(r, z, p) \left( \frac{\partial p}{\partial z}(r, z, t) - g \frac{\rho_{CS}}{B_o(p)} \right) \right) + \quad (10)$$

$$+ \hat{q}(r, z, t) = \beta(r, z, p) \frac{\partial p}{\partial t}(r, z, t)$$

Con el objeto de linealizar la ecuación (10), se supone que la viscosidad  $\mu(p)$  y el factor de volumen del petróleo  $B_o(p)$  son aproximadamente constantes. Además, el caudal  $\hat{q}$  se considera no nulo solamente en el contorno (el reservorio tiene área acotada). Introduciendo estas hipótesis y las variables adimensionales

$$x = \ln \left( \frac{r}{r_w} \right), \quad z = \frac{z}{H}, \quad t = \frac{t}{\mu c} \quad (11)$$

la ecuación (10) se convierte en

$$\frac{1}{r_w^2} e^{-2x} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_x(x, z) \frac{\partial p}{\partial x}(x, z, t) \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left( T_z(x, z) \left( \frac{1}{H} \frac{\partial p}{\partial z}(x, z, t) - g \frac{\rho_{CS}}{B_o} \right) \right) = \quad (12)$$

$$= \frac{\beta(x, z)}{\mu c} \frac{\partial p}{\partial t}(x, z, t)$$

- La condición inicial es presión del reservorio conocida  $p_{IN}$

$$p(x, z, t = 0) = p_{IN}(x, z) \tag{13}$$

- Las condiciones de contorno en el pozo ( $r = r_w$  ó  $x = 0$ ) son -caudal total conocido

$$q_T(t) = \frac{2\pi H}{\mu B_0} \int_0^1 k_r(x = 0, z) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} dz \tag{14}$$

-presiones relacionadas por la fuerza gravitatoria

$$p(x = 0, z, t) = p_{wf} + \frac{\rho_{CS}}{B_0} g H z, \quad \text{donde } p_{wf} = p(x = 0, z = 0, t) \tag{15}$$

En los límites del reservorio (exterior, superior e inferior) se impone la condición de no flujo

$$\frac{k_r(x, z)}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x}(x, z, t) \right) \Big|_{x=\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{k_z(x, z)}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z}(x, z, t) - g \frac{\rho_{CS}}{B_0} \right) \Big|_{z=0,1} = 0 \tag{17}$$

### SOLUCIÓN NUMÉRICA

Se considera un dominio rectangular  $\Omega$  en el plano  $(x, z)$ ,  $\Omega = \{(x, z)/0 \leq x \leq \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right), 0 \leq z \leq 1\}$ . Lo dividimos en una grilla uniforme con puntos  $(x_i, z_j) = (i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta z)$   $0 \leq i \leq n_i; 0 \leq j \leq n_j$ , donde  $\Delta x$  y  $\Delta z$  son los incrementos en las direcciones  $x$  y  $z$ , respectivamente. El tiempo se discretiza como  $t^n = n\Delta t$ , siendo  $\Delta t$  el incremento temporal.  $P_{i,j}^n$  representa la presión en  $(x_i, z_j, t^n)$ . Entonces, la ec. (12) se aproxima usando una familia de esquemas en diferencias finitas que dependen de un parámetro  $\theta$  (ref.<sup>6</sup>)

$$\frac{\beta_{i,j}}{\mu c} \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \right) = \theta \Phi_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) \Phi_{i,j}^n \tag{18}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^n = & \frac{1}{r_w^2} e^{-2x_i} \left( \frac{T_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta x} \right) - T_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \right) + \\ & + \frac{1}{H} \left( \frac{T_{z_{i,j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{H} \left( \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta z} \right) - g \frac{\rho_{CS}}{B_0} \right) - T_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{H} \left( \frac{P_{i,j}^n - P_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) - g \frac{\rho_{CS}}{B_0} \right)}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

La ec. (18) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} &\theta c_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} + \theta g_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \theta a_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + \theta f_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} + \theta b_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} = \\ &= -(1 - \theta) c_{i,j} P_{i-1,j}^n - (1 - \theta) g_{i,j} P_{i,j-1}^n + (1 - (1 - \theta) a_{i,j}) P_{i,j}^n - \\ &- (1 - \theta) f_{i,j} P_{i,j+1}^n - (1 - \theta) b_{i,j} P_{i+1,j}^n + e_{i,j} \end{aligned} \quad (19)$$

definiendo

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{e^{-2x_i}}{r_w^2 \Delta x^2} T_{x_{i-\frac{1}{2},j}} & b_{i,j} &= -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{e^{-2x_i}}{r_w^2 \Delta x^2} T_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \\ f_{i,j} &= -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{1}{H^2 \Delta z^2} T_{z_{i,j+\frac{1}{2}}} & a_{i,j} &= -[c_{i,j} + b_{i,j} + g_{i,j} + f_{i,j}] \\ g_{i,j} &= -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{1}{H^2 \Delta z^2} T_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} & e_{i,j} &= \frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{g \rho C S}{H \Delta z B_o} \left( T_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} - T_{z_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

$$1 \leq i \leq n_i - 1, \quad 1 \leq j \leq n_j - 1$$

Las condiciones de contorno en el pozo ( $i = 0$ ), dadas por (13) y (14), se discretizan

$$\theta q_T^{n+1} + (1 - \theta) q_T^n = \frac{\pi H \Delta z}{\mu B_o \Delta x} \sum_{j=0}^{n_j} k_{r0,j} [\theta (P_{1,j}^{n+1} - P_{-1,j}^{n+1}) + (1 - \theta) (P_{1,j}^n - P_{-1,j}^n)] \quad (20)$$

donde  $P_{-1,j}$  son puntos auxiliares fuera del dominio y

$$P_{0,j}^n = P_{0,0}^n + \frac{\rho C S}{B_o} g j H \Delta z \quad \forall j = 1, n_j \quad (21)$$

En los bordes externos ( $i = n_i, j = 0, j = n_j$ ) las ecs. (16) y (17) se satisfacen tomando

$$T_{x_{n_i+\frac{1}{2},j}} = 0, \quad T_{z_{i,-\frac{1}{2}}} = 0, \quad T_{z_{i,n_j+\frac{1}{2}}} = 0, \quad i = 0, \dots, n_i, \quad j = 0, \dots, n_j \quad (22)$$

eligiendo un orden adecuado de incógnitas y ecuaciones y operando con la matriz resultante<sup>6</sup>, el sistema de ecuaciones lineales a resolver puede escribirse como

$$(I + \theta T) P^{n+1} = (I - (1 - \theta) T) P^n + \Psi^{n+1} \quad (23)$$

donde la matriz  $T \in R^{\bar{N} \times \bar{N}}$  ( $\bar{N} = (n_j + 1)n_i + 1$ ). Se puede demostrar que  $(I + \theta T)$  es una matriz estrictamente diagonal dominante<sup>6,7</sup>, por lo tanto es no singular y se cumple que

$$P^{n+1} = (I + \theta T)^{-1} (I - (1 - \theta) T) P^n + (I + \theta T)^{-1} \Psi^{n+1} \quad (24)$$

Usando que  $(1 + \theta x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \theta^n x^n$  si  $|\theta x| < 1$ , se puede escribir

$$P^{n+1} = (I - T + \theta T^2 - \theta^2 T^3 + \theta^3 T^4 - \theta^4 T^5 + \dots) P^n + \gamma^{n+1} \quad (25)$$

donde  $\gamma^{n+1} = (I + \theta T)^{-1} \Psi^{n+1}$ , si  $|\theta \lambda_j| < 1$  para todos los autovalores  $\lambda_j$  de  $T^{7,10}$ . Aplicando una técnica habitual de evaluación de polinomios resulta

$$P^{n+1} = (I - T)P^n + T(\theta T(P^n + \theta T(-P^n + \theta T(P^n + \theta T(-P^n + \theta T(\dots)))))) + \gamma^{n+1} \quad (26)$$

Este método de resolución del sistema lineal de ecuaciones lo hemos denominado TSMF, pues está basado en la serie de Taylor de funciones matriciales. En un trabajo anterior<sup>7</sup> se demostró que el desarrollo en serie converge si  $\theta$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  se eligen de manera que  $\theta \frac{4\Delta t}{\phi_{\min}} \left( \frac{k_{r\max}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z\max}}{H^2 \Delta z^2} \right) < 1$ , donde  $k_{r\max}$  y  $k_{z\max}$  son cotas superiores de los valores de permeabilidad horizontal y vertical y  $\phi_{\min}$  es una cota inferior de porosidad. Además, suponiendo que  $\Delta x$  y  $\Delta z$  son fijos, el  $\Delta t$  máximo se obtiene seleccionando  $\theta = 0,25$ . Esta técnica fue comparada con los métodos tradicionales de direcciones alternadas (ADI) y de sobrerelajación por bloques (BSOR), concluyendo que consume menos tiempo CPU si se elige  $\theta = 0,25$  y valores adecuados del incremento de tiempo  $\Delta t$  (ref.<sup>7</sup>).

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

El objetivo de este trabajo es analizar la influencia de la permeabilidad vertical de la roca-reservorio en las respuestas de presión y caudal de un pozo que produce a caudal constante. A medida que avanza la producción, las capas de despresurizan de manera diferente de acuerdo a sus propiedades físicas. En consecuencia, se crean gradientes de presión verticales en el reservorio. Es justamente la permeabilidad vertical la que hace posible que exista flujo de petróleo desde una capa del reservorio hacia otra, en respuesta a estos gradientes verticales.

En este análisis de sensibilidad se simula la respuesta de un reservorio constituido por dos capas de igual espesor y porosidad, pero con valores contrastantes de permeabilidad horizontal y vertical. La condición de igual porosidad en ambas capas se estableció como simplificación, dado que la influencia de la porosidad en la respuesta de presión de pozos en producción es escasa<sup>11</sup>. Se comparan tres tipos de reservorios:

- *reservorio homogéneo equivalente*. Está formado por una única capa de propiedades constantes. Su permeabilidad horizontal es el promedio de las permeabilidades horizontales de las dos capas. Esto equivale a considerar las dos capas en paralelo<sup>12</sup>.
- *estratificado sin flujo vertical (ESFV)*. El reservorio está formado por dos capas, pero la permeabilidad vertical es nula. Las dos capas aportan petróleo en conjunto al pozo productor. No existe flujo entre ellas. Se conoce con el nombre de "commingled reservoir"<sup>4</sup>.



- *estratificado con flujo vertical (ECFV)* En este caso, el reservorio está también formado por dos capas. Cada una de ellas aporta petróleo al pozo productor. Además existe una cierta permeabilidad vertical que permite el flujo cruzado (*crossflow*) entre capas. Para este tipo de reservorio se analizaron diferentes relaciones de permeabilidad vertical-permeabilidad horizontal.

**Influencia de la permeabilidad vertical sobre la presión dinámica de fondo ( $p_{wf}$ )**

El reservorio analizado tiene dos capas. En una de ellas la permeabilidad horizontal es de 10 mD, en la otra de 1000 mD. La permeabilidad vertical se ha supuesto directamente proporcional a la permeabilidad horizontal. Por ello, se consideraron relaciones entre ambas permeabilidades iguales en ambas capas:  $k_z/k_r = 1$ ,  $k_z/k_r = 0,1$ ,  $k_z/k_r = 0,01$ . Los datos correspondientes al reservorio en estudio se resumen en la Tabla I.

radio del pozo $r_w = 0,1$ m	comp. del petróleo $c = 1,45 \times 10^{-9}$ Pa <sup>-1</sup>
radio externo $r_e = 500$ m	porosidad $\phi = 20$
espesor total de la formación $H = 15$ m	caudal total de extracción $q_T = 10^{-3}$ m <sup>3</sup> /s
viscosidad del petróleo $\mu = 10^{-2}$ Pa·s	presión inicial $p_{IN} = 20$ MPa

Tabla I

En la Figura 2 se muestran los resultados obtenidos al simular la respuesta de presión de un pozo en los tres tipos de reservorios considerados. En los primeros tiempos se observa que los reservorios correspondientes a los tipos homogéneo y ESFV dan como resultado curvas paralelas en un gráfico semilogarítmico. Este comportamiento se basa en que la permeabilidad efectiva de un arreglo de capas en paralelo sin flujo vertical es la media aritmética de las permeabilidades de cada capa<sup>12</sup>. Precisamente, las soluciones analíticas aproximadas de ambos casos a tiempos cortos se expresan como

$$p_{wf} = p_{IN} - \frac{q_T \mu}{4\pi \bar{k}_r H} \ln t + c_1 \tag{27}$$

para el modelo unidimensional<sup>3</sup> y

$$p_{wf} = p_{IN} - \frac{q_T \mu}{4\pi \bar{k}_r H} \ln t + c_2 \tag{28}$$

para el reservorio ESFV de dos capas<sup>4</sup> ( $H = h_1 + h_2$ ;  $c_1$  y  $c_2$  son diferentes constantes). Es decir, (27) y (28) son rectas en  $\ln t$  con la misma pendiente. Además, por la ley de Darcy se cumple que

$$q_T \approx \text{const } k_r h (p_{IN} - p_{wf}) \tag{29}$$

Entonces,  $p_{wf}$  en el reservorio ESFV debe resultar menor que  $p_{wf}$  en el caso homogéneo, pues en los primeros tiempos, el flujo del ESFV se debe casi exclusivamente a la capa más permeable (supongamos  $k_{r1} > k_{r2}$ ) y como  $k_{r1}h_1 < k_{r1}h_1 + k_{r2}h_2$  se necesita una mayor caída de presión para producir el mismo caudal.

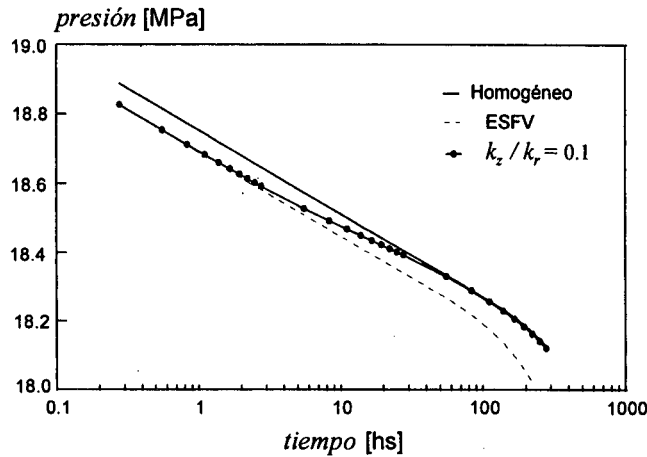


Figura 2. Comparación de la respuesta de presión en los tres tipos de reservorio

A tiempos más largos comienza a sentirse el efecto del borde impermeable, a través del cual no hay flujo. Este efecto tiene lugar antes en el reservorio ESFV, donde en realidad es la capa más permeable la que siente primero esta influencia, afectando así la respuesta de presión de todo el reservorio. Si analizamos ahora el comportamiento del sistema ECFV, puede decirse que a tiempos cortos se comporta como si se tratara de un reservorio ESFV. Esto se debe a que el gradiente vertical de presión aún no se ha establecido. Consecuentemente, en este período inicial, la permeabilidad vertical no tiene ninguna influencia. A tiempos suficientemente largos, el comportamiento del reservorio ECFV se vuelve idéntico al del reservorio homogéneo equivalente (con permeabilidad constante igual al promedio de las permeabilidades de las dos capas). Entre ambos extremos existe un período de transición. En este período intermedio comienza la transferencia de fluido de la capa menos despresurizada hacia la más despresurizada. La capa menos despresurizada es la de menor permeabilidad. Por el contrario, la capa de mayor permeabilidad produce inicialmente un caudal mucho mayor y pierde presión rápidamente, creándose así un gradiente vertical de presión que actúa como fuerza impulsora para el flujo cruzado. En este período de transición, la permeabilidad vertical es el parámetro dominante.

En la Figura 3 se muestran las presiones calculadas para distintas relaciones entre permeabilidad vertical y horizontal. Se observa claramente que a medida que la permeabilidad vertical aumenta, el período de transición aparece antes.

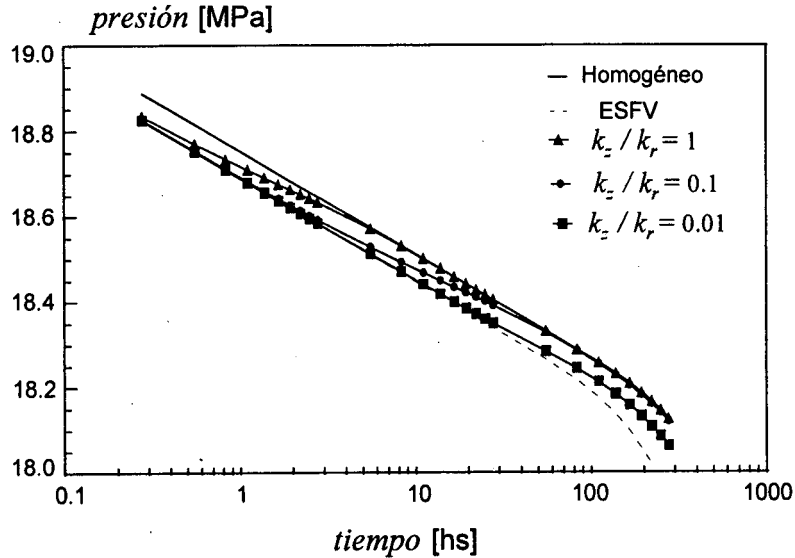


Figura 3. Influencia de la relación  $k_z/k_r$

**Influencia de la permeabilidad vertical sobre los caudales de las capas**

El simulador supone conocido el caudal total de producción en función del tiempo, es decir, la sumatoria de los caudales de las distintas capas. En este caso se simula un ensayo de caída de presión en un pozo: el caudal es nulo antes de comenzar el ensayo y toma un valor constante una vez que se pone el pozo en producción. Es claro que la fracción de ese caudal producida a través de la capa más permeable será mayor que la producida a través de la capa menos permeable. Sin embargo, estos caudales fraccionales no son constantes en el tiempo, pues dependen de la forma relativa en que las capas pierden presión y de cómo afecta el flujo vertical a esta despresurización.

En la Figura 4 se muestra la forma en que varía el caudal fraccional de la capa más permeable  $\frac{q_{mp}}{q_T}$ , tanto para el reservorio del tipo ESFV como para los ECFV con distintas relaciones entre permeabilidad vertical y horizontal. En el caso homogéneo, como se considera una sola capa,  $\frac{q_{mp}}{q_T} = 1$  (el subíndice *mp* indica capa más permeable).

Para el reservorio ESFV, el caudal de producción de la capa más permeable aumenta a tiempos cortos, llegando a un valor máximo cuando el efecto del borde del reservorio comienza a sentirse. A partir de ese momento, este caudal decrece abruptamente. La capa más permeable ha perdido presión y, al no recibir aporte de capas adyacentes, su producción es cada vez menor.

Por el contrario, en los casos de reservorio ECFV el caudal fraccional de la capa más permeable aumenta continuamente hasta estabilizarse en un valor proporcional a la capacidad de flujo de la capa en relación a la capacidad de flujo total del reservorio. Se denomina genéricamente capacidad de flujo al producto  $k_{r_i} h_i$ , donde  $k_{r_i}$  es la permeabilidad horizontal y  $h_i$  es el espesor de cada capa. Entonces se cumple

$$\frac{q_{mp}}{q_T} = \frac{k_{r_{mp}} h_{mp}}{\sum_i k_{r_i} h_i} \tag{30}$$

Este resultado coincide con lo encontrado por Lefkovits<sup>4</sup>. La permeabilidad vertical no afecta el valor en el que se estabiliza el caudal fraccional de la capa más permeable. La influencia de la permeabilidad vertical radica en el tiempo requerido para que se alcance este valor estable, siendo necesario más tiempo cuanto menor sea la permeabilidad vertical. En realidad, a tiempos suficientemente largos, los caudales de todas las capas se estabilizan en valores constantes (excepto cuando  $k_z = 0$ ), proporcionales a la relación entre su capacidad de flujo y la capacidad total e independientes de la permeabilidad vertical.

Nuevamente, como en el caso de la presión dinámica de fondo, la influencia de la permeabilidad vertical se advierte en los tiempos intermedios.

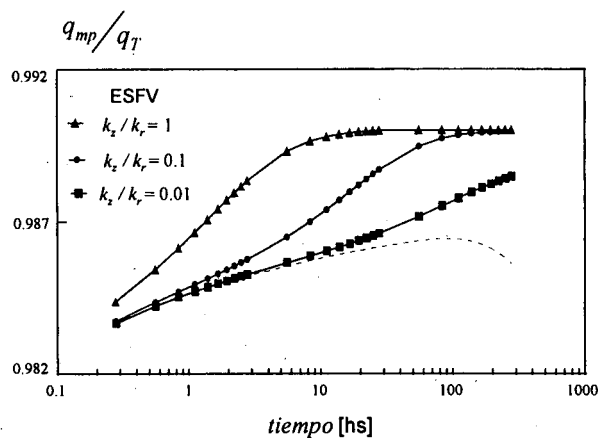


Figura 4. Efecto de la permeabilidad vertical sobre el caudal de la capa más permeable

## CONCLUSIONES

- La respuesta de presión del sistema estratificado sin flujo vertical, ESFV, resulta paralela y con valores más bajos de presión dinámica de fondo que el reservorio homogéneo equivalente. A tiempos largos las curvas se separan porque el reservorio ESFV siente primero el efecto del borde.
- La respuesta de presión del sistema estratificado con flujo vertical, ECFV, resulta similar a la del ESFV a tiempos cortos y a la del reservorio homogéneo a tiempos largos. Entre ambos extremos existe un período de transición donde la permeabilidad vertical es el parámetro determinante. El período de transición comienza tanto más temprano cuanto mayor es el valor de la permeabilidad vertical.
- La permeabilidad vertical también influye sobre los caudales de producción de cada una de las capas. En el reservorio ESFV el caudal de la capa más permeable crece hasta un valor máximo que tiene lugar cuando comienza a sentirse el efecto del borde. A partir de entonces, este caudal fraccional decrece. En cambio, en el reservorio ECFV los caudales fraccionales de todas las capas se estabilizan en valores constantes debido al aporte de petróleo desde las capas menos permeables.

hacia las más permeables, llegando así a un estado pseudo-estacionario. El valor de la permeabilidad vertical influye en los tiempos intermedios. El tiempo en que se alcanza el caudal de producción constante en las capas es menor cuanto mayor sea el valor de la permeabilidad vertical.

- Este trabajo demuestra que a tiempos cortos e intermedios la permeabilidad vertical influye en las respuestas de presión y caudal, por lo que debería ser tenida en cuenta tanto en el diseño como en la interpretación de los ensayos de presión en pozo.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue solventado por la Universidad de Buenos Aires, el CONICET y las empresas petroleras AMOCO ARGENTINA y PLUSPETROL. Agradecemos a Esteban Falcigno, Martín Cocco y Lucas Kichic por su colaboración en el procesamiento de los datos.

### NOMENCLATURA

$B_o$ = factor de volumen del petróleo ( $m^3/m^3$ )	$p_{wf}$ = presión dinámica de fondo (Pa)
$c$ = compresibilidad del petróleo (1/Pa)	$q_T$ = caudal total ( $m^3/s$ )
$g$ = constante gravitatoria ( $m/s^2$ )	$q_{mp}$ = caudal de la capa más permeable ( $m^3/s$ )
$H$ = espesor total del reservorio (m)	$r_e$ = radio externo (m)
$h_i$ = espesor de cada capa (m)	$r_w$ = radio del pozo (m)
$k_r$ = permeabilidad horizontal (mD)	$t$ = tiempo (s)
$k_z$ = permeabilidad vertical (mD)	$\phi$ = porosidad
$p$ = presión (Pa)	$\mu$ = viscosidad (cp)
$p_{IN}$ = presión inicial (Pa)	$\rho$ = densidad ( $kg/m^3$ )

### REFERENCIAS

1. K. Aziz y A. Settari, "Petroleum Reservoir Simulation", Elsevier Applied Science Publishers, London & New York, (1985).
2. D. Peaceman, "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Elsevier, New York, (1977).
3. R. Horne, "Modern Well Test Analysis-A Computer Aided Approach", Petroway, Inc. Palo Alto, CA, USA, (1990).
4. H.C. Lefkovits, P. Hazebroek, E.E. Allen y C.S. Matthews, "A Study of the Behavior of Bounded Reservoirs Composed of Stratified Layers", *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 1, 1, pp. 43-58, (1961).
5. R. Prijambodo, R. Raghavan y A. Reynolds, "Well Test Analysis for Wells Producing Layered Reservoirs with Crossflow", *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 25, No. 3, pp. 380-396, (1985).
6. G.B. Savioli, P.M. Jacovkis y M.S. Bidner, "Stability Analysis and Numerical Simulation of 1-D and 2-D Radial Flow towards an Oil Well", a ser publicado en *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 33, No. 3, pp. 121-135, (1997)

7. G.B. Savioli, P.M. Jacovkis y M.S. Bidner, "Comparación de un método de desarrollo en serie, ADI y BSOR aplicados al flujo en medios porosos heterogéneos", *Anales del III. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Vol. 1, pp. 471-480, Zaragoza, España, (1996).
8. J. Bear, "*Dynamics of Fluids in Porous Media*", American Elsevier Publishing Company, New York, (1972).
9. J.C. Slattery, "*Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*", R.E. Krieger Publishing Company, New York, (1981).
10. G. Golub y C. Van Loan, "*Matrix Computations*", 2nd Edition, The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, (1989).
11. G.B. Savioli, M.S. Bidner y P.M. Jacovkis, "Statistical Analysis of Heterogeneities and their Effect on Build-Up and Draw-Down Tests", *Journal of Petroleum Science & Engineering*, Vol. 15, pp. 45-55, (1996).
12. J.S. Archer y C.G. Wall, "*Petroleum Engineering, Principles and Practice*", Graham & Trotman, (1986).