

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CONFORMADO METÁLICO. EFICIENCIA NUMÉRICA EN PROCESOS DE LAMINACIÓN. PARTE II**

M.A. GUTIÉRREZ\*

M. OJANGUREN\*

y

J.J. ANZA\*\*

\* *Departamento de Mecánica y CAD-CAM, LABEIN  
Cuesta de Olabeaga 16, 48013 Bilbao, España  
Tel.: + 34-4-489 2400 Fax: + 34-4-411 1749*

\*\* *Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad del País Vasco  
Alameda de Urquijo s/n, 48013 Bilbao, España  
Tel.: + 34-4-427 8055 Fax: + 34-4-441 4041  
E-mail: mapanagj@bi.ehu.es*

### **RESUMEN**

La resolución aproximada mediante técnicas de elementos finitos de la simulación del conformado requiere un gran esfuerzo computacional contradictorio con la interactividad requerida en la aplicación industrial. En la segunda parte de este trabajo se analiza la eficiencia computacional de los algoritmos combinados de la elastoplasticidad, deformación finita y contacto, incidiendo especialmente en la resolución óptima del sistema de ecuaciones lineales que es preciso afrontar numerosas veces dentro del esquema incremental iterativo propio del análisis no lineal. Se presenta en esta línea un método basado en la descomposición de dominios cuya aplicación a problemas de contacto y en especial a la simulación de proceso de laminación resulta muy ventajosa.

### **NUMERICAL SIMULATION OF METAL FORMING. NUMERICAL EFFICIENCY IN ROLLING PROCESSES. PART II**

#### **SUMMARY**

The numerical simulation of metal forming processes follows a highly non linear analysis where general aspects as elastoplasticity, finite deformation and contact mechanics are combined. Approximated solutions obtained by finite element techniques require strong computational effort, that contradicts the need of interactivity for industrial applications. In this work, computational efficiency is analysed, especially the optimum solution of the linear systems to be solved through the incremental-iterative schemes associated with non linear analysis. A domain decomposition method, especially adapted to contact problems is presented, as well as the improved performance obtained in the application to hot rolling simulation.

Recibido: Diciembre 1996

## INTRODUCCIÓN

En el marco del análisis no lineal del sólido deformable discretizado mediante elementos finitos, el estudio de la eficiencia del proceso incremental-iterativo de resolución implícita, admite dos planteamientos o perspectivas. En la primera se consideran los aspectos relacionados con la formulación teórica y su aproximación, que afectan al coste del cálculo elemental y pueden condicionar el tamaño de cada incremento y el número de iteraciones por incremento<sup>1</sup>. En la segunda se considera el proceso iterativo de resolución de un incremento; dada una formulación y su aproximación, la eficiencia global del proceso depende de la estrategia de actualización y factorización de la rigidez tangente en cada iteración<sup>4</sup>.

El primer planteamiento afecta al cálculo de los vectores de fuerzas internas y de las matrices de rigidez tangente. El reciente desarrollo de los procedimientos implícitos ha sido importante en este sentido y en la actualidad existen métodos robustos que permiten alargar los incrementos, manteniendo su resolución en pocas iteraciones. Ello ha sido posible a partir de la mejora de la integración de las ecuaciones constitutivas de la elastoplasticidad en deformación finita mediante algoritmos de retorno y formulaciones corrotacionales o hiperelásticas<sup>2,3</sup>, que solventan la integración objetiva de las ecuaciones planteadas como relación de tasas temporales y permiten establecer rigideces tangentes consistentes que se conservan la convergencia cuadrática del método de Newton<sup>5-7</sup>.

El segundo planteamiento se refiere a la sucesiva actualización y resolución de los grandes sistemas lineales de ecuaciones asociados con la aproximación mediante elementos finitos. En el campo de la resolución de sistemas lineales de ecuaciones, el esfuerzo investigador trasciende el ámbito de aproximación numérica del sólido e incluso del continuo<sup>8,13</sup> tanto en relación con la computación secuencial o paralela como con respecto a los métodos directos o iterativos.

En la línea del segundo planteamiento y como continuación de la parte primera<sup>1</sup>, en esta segunda parte del trabajo se profundiza en la eficiencia computacional de procesos de conformado con grandes deformaciones elastoplásticas y contacto. En el contexto de las estructuras numéricas asociadas con el tratamiento de contacto mecánico mediante multiplicadores de Lagrange, los desarrollos que se proponen están orientados al tratamiento diferenciado de todas aquellas partes físicas y de interacción que lo requieran, procediéndose a la actualización y la factorización del sistema de ecuaciones en bloques, mediante los métodos de resolución *directos* o *iterativos* más adecuados para cada una de ellos. Los resultados obtenidos en una estación Indigo2 R3000 se discuten en los diversos ejemplos presentados, en los que el comportamiento elastoplástico está calculado en formato hipoeelástico corrotacional con integración en la configuración intermedia<sup>1</sup>.

## CONTACTO

## Resolución del sistema lineal de ecuaciones

El sistema de ecuaciones lineal que surge en un problema de contacto sin deslizamiento entre dos cuerpos deformables mediante multiplicadores de Lagrange tiene la forma<sup>1</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$  son las matrices de rigidez de cada uno de los sólidos y  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  son las matrices de acomplamiento que introducen la restricción cinemática del contacto. El sistema es no singular, y por tanto tiene solución única, pero la matriz de coeficientes no es definida positiva y no es posible aplicar directamente el método del gradiente conjugado. Al estar los multiplicadores concentrados en las últimas ecuaciones, el complemento de Schur es definido negativo y el sistema puede resolverse mediante una descomposición  $\text{LDL}^T$ .

Si las matrices de rigidez de cada uno de los cuerpos en contacto son invertibles, eliminando los desplazamientos  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , el sistema anterior puede expresarse en función de los multiplicadores de Lagrange, obteniéndose el siguiente condensado en la interfase de contacto

$$\mathbf{L}\lambda = \mathbf{b} \quad \text{donde} \quad \mathbf{L} = \mathbf{C}_1\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{C}_2^T \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{C}_1\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{f}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{f}_2 - \mathbf{d} \quad (2)$$

La matriz  $\mathbf{L}$  es simétrica, definida positiva y llena. Su dimensión coincide con el número de grados de libertad en contacto, y por tanto es en general menor que la del sistema original. Existen varias formas de resolver este problema, dependiendo del método elegido para obtener  $\mathbf{K}_1^{-1}$  y  $\mathbf{K}_2^{-1}$  y para resolver el sistema condensado. Resuelto éste, los desplazamientos pueden recuperarse, ya que

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_j^{-1}(\mathbf{f}_j - \mathbf{C}_j^T\lambda) \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

El sistema condensado (2) puede resolverse con un método *directo*, pero para ello es necesario calcular de forma explícita la matriz de coeficientes  $\mathbf{L}$ . El método del gradiente conjugado<sup>16</sup> (GC), resuelve el sistema realizando solamente productos de la matriz  $\mathbf{L}$  por las direcciones  $\mathbf{p}$  de búsqueda y esta operación puede realizarse sin calcular de forma explícita la matriz  $\mathbf{L}$ . Una vez factorizadas cada una de las submatrices de rigidez, el producto  $\mathbf{Lp}$  se realiza de forma eficiente mediante multiplicación de matrices dispersas por un vector y sustituciones progresivas y regresivas. Para cada uno de los cuerpos en contacto se procede de la forma siguiente:

- 1) Multiplicación del vector  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{C}_j^T$ ;
- 2) Sustitución progresiva y regresiva en la factorización de  $\mathbf{K}_j$ ;
- 3) Multiplicación del vector resultante por  $\mathbf{C}_j$ .

Del mismo modo, los desplazamientos (3) pueden obtenerse una vez calculados los multiplicadores de Lagrange mediante sustituciones progresivas y regresivas en la factorización de las submatrices de rigidez. Para la factorización de las submatrices de rigidez puede elegirse cualquier método *directo*. En este trabajo se ha utilizado el método clásico de eliminación gaussiana basado en columnas activas (ACTCOL<sup>17</sup>).

Denominaremos *mixto* al método que divide la matriz de rigidez en los bloques inducidos por el contacto con multiplicadores de Lagrange y combina un método *directo* (ACTCOL) para la resolución de las submatrices de los cuerpos en contacto y un método iterativo (GC) para resolver la interacción entre ellos. Las ventajas proporcionadas por este método frente a la resolución directa del sistema de ecuaciones están relacionadas con la reducción del almacenamiento y del tiempo de cálculo. Los escasos elementos no nulos de las matrices de contacto  $\mathbf{C}_j$  afectan negativamente al ancho de banda de matriz global y al formato *standard skyline* que implica el almacenamiento de un gran número de ceros. En el método *mixto* la matriz de rigidez se trata por bloques que se almacenan de forma independiente pudiéndose así emplear un modelo *skyline* para las submatrices de rigidez de los sólidos y un almacenamiento disperso para las matrices de contacto. Los sistemas que van a triangularizarse ahora con métodos *directos* para obtener  $\mathbf{K}_i^{-1}$  tendrán tamaño y ancho de banda menores que el problema original y el esfuerzo necesario para la factorización de todas las matrices locales será sustancialmente menor que el empleado para la matriz completa.

Para que el método *mixto* proporcione una solución más eficiente en su conjunto, es necesario que el orden de convergencia del método del gradiente conjugado en la interfase sea suficientemente bueno. El número de iteraciones empleadas por el método del gradiente conjugado depende en gran medida del número de condición de la matriz del sistema a resolver y es como mucho igual al número de ecuaciones. La matriz del sistema condensado es menor y está mejor condicionada que la matriz original, por ello GC resulta un método efectivo de resolución incluso sin preconditionador<sup>25</sup>. Otra ventaja adicional se tiene cuando el tratamiento del contacto con fricción conduce a una matriz no simétrica, cuya resolución directa presenta los inconvenientes de aumento de almacenamiento y tiempo de cálculo que ello conlleva. Con el método *mixto* es posible mantener la simetría de las matrices locales y diferenciar tan sólo la parte de las restricciones, siendo el aumento de almacenamiento mucho menor, ya que estas matrices se almacenan de forma dispersa. Será necesario utilizar un método de resolución para matrices no simétricas tan sólo en el sistema condensado en la interfase.

### Tratamiento de los sistemas singulares. Gradiente conjugado proyectado

Aunque el problema global sea estable, es decir, no tenga movimientos de sólido rígido, puede ocurrir que algunos de los cuerpos componentes sólo lo sea como consecuencia de las restricciones de contacto. En ese caso, las matrices locales de estos cuerpos son singulares y su factorización requiere un tratamiento especial.

Sean  $n$  cuerpos en contacto y supongamos que uno de ellos denominado genéricamente ( $j$ ) tenga impedidos los movimientos de sólido rígido sólo a través de las restricciones de contacto. Entonces, en la aplicación del método *mixto* descrito en el punto anterior es necesario resolver un sistema singular de la forma

$$\mathbf{K}_j \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_j - \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4)$$

Como la matriz  $\mathbf{K}_j$  es simétrica, el sistema anterior tendrá al menos una solución, si y sólo si el término independiente no tiene componentes en el espacio nulo de  $\mathbf{K}_j$ , es decir,  $\mathbf{f}_j - \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\lambda}$  es ortogonal a una base  $\mathbf{R}_j$  del espacio nulo de  $\mathbf{K}_j$

$$\mathbf{R}_j^T (\mathbf{f}_j - \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (5)$$

La condición (5) de ortogonalidad expresa que los elementos de la base  $\mathbf{R}_j$  representan desplazamientos del cuerpo  $j$  que no aportan energía de deformación sobre las fuerzas externas que actúan sobre el mismo, condición que es satisfecha por los modos de movimiento de sólido rígido del cuerpo  $j$ , que constituyen una base del espacio nulo de  $\mathbf{K}_j$ . Existe por tanto una matriz  $\mathbf{K}_j^+$  pseudoinversa, verificando  $\mathbf{K}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{K}_j = \mathbf{K}_j$  de forma que la solución de (4) viene dada por

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_j^+ (\mathbf{f}_j - \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha} \quad (6)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es un vector real de dimensión igual al número de movimientos de sólido rígido del cuerpo  $j$ . Si el cuerpo  $j$  tiene  $n$  grados de libertad y  $r$  movimientos de sólido rígido, la matriz  $\mathbf{K}_j$  tiene rango  $p = n - r$  y puede reordenarse de forma que las singularidades aparezcan al final

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j^{pp} & \mathbf{K}_j^{pr} \\ \mathbf{K}_j^{pr^T} & \mathbf{K}_j^{rr} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_j^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j^{pp^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_j^{pp^{-1}} \mathbf{K}_j^{pr} \\ \mathbf{I}_{nr} \end{bmatrix}$$

La matriz  $\mathbf{K}_j^+$  es una pseudoinversa de  $\mathbf{K}_j$  y la matriz  $\mathbf{R}_j$  es una base del espacio nulo de  $\mathbf{K}_j$ . De esta forma si se tiene un sistema de contacto con  $n_f$  cuerpos flotantes, la sustitución de los desplazamientos (6) en la ecuación de los multiplicadores (2) introduce como incógnita adicional al vector  $\boldsymbol{\alpha}$ . Añadiendo la condición de ortogonalidad (5), el problema quedará definido, obteniéndose por el método *mixto* un sistema condensado en la interfase, simétrico y no singular, que admite una única solución  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$  y que determina unívocamente los desplazamientos de cada uno de los  $n$  cuerpos del sistema. El sistema condensado en la interfase es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{j=1}^{n_f} \mathbf{C}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{C}_j^T & \mathbf{G} &= (\mathbf{C}_1 \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{C}_{n_f} \mathbf{R}_{n_f}) & \mathbf{K}_j^+ &= \mathbf{K}_j^{-1} \quad \text{si no es flotante} \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\boldsymbol{\alpha}_1 \dots \boldsymbol{\alpha}_n) & \mathbf{e} &= (\mathbf{f}_1^T \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{f}_{n_f}^T \mathbf{R}_{n_f}) & \mathbf{b} &= \sum_{j=1}^{n_f} \mathbf{C}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{f}_j - \mathbf{d} \end{aligned} \quad (8)$$

Pero la matriz del sistema (7) ahora es indefinida por lo que el método de gradiente

conjugado no puede aplicarse de forma directa. El sistema anterior es equivalente al problema de minimización con restricciones algebraicas

$$\min \phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{F} \lambda + \lambda^T \mathbf{b} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{G}^T \lambda = \mathbf{e}$$

Como  $\mathbf{F}$  es una matriz simétrica y definida positiva, el método de gradiente conjugado puede emplearse para obtener una solución del problema sin restricciones. Este algoritmo convergerá a la solución restringida si y sólo si se modifica de forma que la restricción se verifique en cada iteración<sup>18,19</sup>. Esto se consigue proyectando todas las direcciones de búsqueda  $\mathbf{s}_k$  en el espacio nulo de  $\mathbf{G}^T$ . De esta forma, si  $\lambda_{k-1}$  verifica la restricción, entonces  $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \beta \mathbf{P} \mathbf{s}_k$  también la verifica. La única diferencia que se introduce en el método de gradiente conjugado es que los residuos deben ser proyectados antes de utilizarlos en el cálculo de la dirección de búsqueda. La elección de  $\lambda_0$  está limitada únicamente por la restricción  $\mathbf{G}^T \lambda_0 = \mathbf{e}$  siendo una opción habitual:  $\lambda_0 = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{e}$ .

Es importante destacar que sólo se realiza una proyección en cada iteración. Esta proyección es relativamente barata cuando se utiliza un proyector como  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$ , debido a la pequeña dimensión de la matriz  $\mathbf{G}$ , que coincide con el número de movimientos de sólido rígido. Antes de empezar a iterar se construye y factoriza  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ ; cada proyección, así como el cálculo  $\lambda_0$ , suponen una sustitución progresiva y regresiva en dicha factorización. Una vez encontrado el vector  $\lambda$ , el vector  $\alpha$  que contiene los coeficientes de los modos de sólido rígido se calcula según  $\alpha = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{F} \lambda - \mathbf{d})$ .

### Ejemplo 1

Se trata de la indentación de un bloque elástico en una base también elástica con fricción infinita. La geometría y condiciones de contorno (desplazamiento prescrito  $d$ ) del problema junto con los valores elásticos (relativos) empleados se muestran en la Figura 1. Los multiplicadores de Lagrange se definen sobre la superficie de contacto de la base.

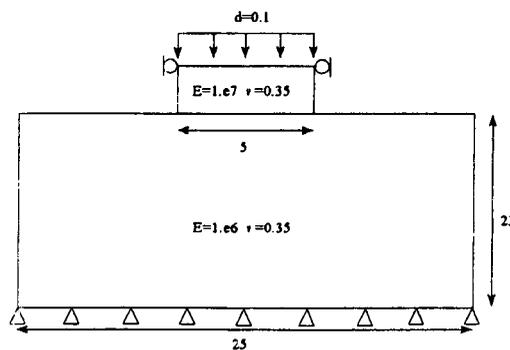


Figura 1. Indentación con bloque

El objetivo de este ejemplo es mostrar el comportamiento del método de resolución *mixto* frente al global. El problema es lineal por tratarse de materiales elásticos con deformación infinitesimal y superficie de contacto conocida. Los desplazamientos máximos obtenidos con el método *directo* y el método *mixto* para distintas tolerancias del gradiente conjugado se resumen en la Tabla I.

Método de resolución	Desplazamiento max. en Y	Desplazamiento max. en Z
ACTCOL	0,0162096798	-0,0826635224
<i>Mixto</i> CG tol = 1.e-5	0,0162096445	-0,0826634461
<i>Mixto</i> CG tol = 1.e-4	0,0162096987	-0,0826633574
<i>Mixto</i> CG tol = 1.e-3	0,0162102129	-0,0826506147

Tabla I. Indentación con bloque 2D: comparación de resultados

Como se puede observar, los resultados coinciden hasta el sexto dígito significativo para tolerancias de 0,00001 y 0,0001, lo que supone 8 y 7 iteraciones de CG, respectivamente. Para 0,001 el CG sólo realiza 5 iteraciones y el método pierde precisión. En adelante utilizaremos un valor de la tolerancia de 0,0001.

Los resultados de tiempo CPU correspondientes a una malla uniforme de  $20 \times 8$  elementos en el bloque y distintas discretizaciones uniformes de la base se recogen en la Tabla II, donde se indica el número de incógnitas adicionales ( $\lambda$ ) de contacto.

Malla	N° $\lambda$	Tiempo total		Tiempo sol. sistema	
		ACTCOL	<i>Mixto I</i>	ACTCOL	<i>Mixto I</i>
50 $\times$ 30	22	3,82	3,66	0,82	0,50
70 $\times$ 50	30	12,57	11,34	5,63	4,91
90 $\times$ 70	38	30,66	27,04	18,17	15,74

Tabla II. Indentación con bloque 2D

Se observa la reducción del tiempo empleado en la resolución del sistema, obteniéndose una mejora global que aumenta con el número de grados de libertad (4 %, 9 % y 12 %).

En tres dimensiones las ventajas computacionales obtenidas en el mismo ejemplo son sensiblemente mayores, apreciándose una mejora aún más importante con el aumento de los grados de libertad del problema. Se recogen en la Tabla III los resultados obtenidos con distintas discretizaciones, manteniendo la relación entre el número de elementos de la base y del bloque.

Malla	N° $\lambda$	Tiempo total			Tiempo sol. sistema	
		ACTCOL	<i>Mixto I</i>	Reduc.	ACTCOL	<i>Mixto II</i>
10 × 6 × 4 4 × 3 × 2	63	4	3,6	10 %	0,79	0,53
20 × 6 × 4 8 × 3 × 2	105	9,27	7,36	20,6 %	2,71	1,11
20 × 12 × 4 8 × 6 × 2	195	32,52	18,26	43,8 %	19,22	5,7

Tabla III. Indentación con bloque 3D: comparación tiempos cálculo

### Algoritmo Iterativo. Actualización del sistema de ecuaciones

En los métodos iterativos tipo Newton se tratan las no linealidades de contacto conjuntamente con las derivadas de la geometría y del comportamiento del material. En ese contexto, denominaremos método *mixto I* al proceso iterativo de Newton-Raphson en el que los sucesivos sistemas lineales planteados se resuelven mediante el método *mixto* descrito en el apartado anterior. Denominaremos método *mixto II* al proceso iterativo que distingue en la matriz de rigidez la parte del material de la del contacto, actualizando tan sólo aquella parte que lo precise.

Para problemas de contacto entre cuerpos elásticos lineales, el método de Newton-Raphson aplicado a la matriz global supone la refactorización completa de la matriz en cada iteración, cuando sólo la parte de contacto ha sufrido modificaciones. El esquema mixto permite calcular en cada iteración sólo las matrices de contacto, resolver el problema condensado y mediante sustituciones progresivas y regresivas sobre la primera y única factorización de las matrices de rigidez  $K_i$ , obtenerlos nuevos desplazamientos<sup>14</sup>. De igual manera si se tiene un cuerpo elástico lineal en contacto con uno plástico es posible en cada iteración, recalcular y factorizar sólo la parte plástica y las matrices de contacto. Esta idea es especialmente interesante para el problema de la laminación donde el comportamiento del rodillo es elástico y el comportamiento del desbaste es elastoplástico.

Un esquema similar a éste fue planteado en<sup>15</sup>, aunque sin distinguir los cuerpos en contacto, es decir, considerando como un único bloque las partes de la matriz que representan la deformación mecánica. Se introducen dos niveles de iteraciones: las iteraciones menores o de contacto que se realizan dentro del bucle de iteraciones mecánicas (iteraciones mayores). Para el problema de laminación esta idea no parece tan interesante, puesto que las no linealidades de contacto y las de la deformación plástica tienen lugar en la misma zona del desbaste, la que justamente se encuentra debajo del rodillo.

El método propuesto en este trabajo no separa las iteraciones de contacto de las mecánicas, sino que ambas se realizan en un único bucle. Cada uno de los cuerpos en contacto constituye un grupo de elementos con su matriz de rigidez y su residuo. Una variable de actualización controla cuando dicha matriz va a ser recalculada y factorizada

dentro del proceso iterativo. Calculados los residuos, se asignará un estado a la variable de actualización de cada cuerpo según el criterio establecido. El criterio considerado en este trabajo consiste en analizar los residuos de cada cuerpo y en base a ellos decidir las matrices que se van a recalcular. Cuando la norma del residuo de un cuerpo es menor que la norma del residuo total por una determinada tolerancia, se considera que para dicho cuerpo la matriz de rigidez calculada en la iteración anterior puede emplearse en la iteración siguiente (actualización de un método Newton modificado). El valor asignado a la tolerancia es importante para la eficacia computacional del método, pero no resulta crítico para la convergencia. Con valores muy bajos de la tolerancia se recalculan y refactorizan todas las matrices, mientras que con valores demasiado altos aumenta el número de iteraciones necesarias en cada incremento para alcanzar la convergencia, no obteniéndose en ambos casos las ventajas deseadas. La experiencia indica que valores de tolerancia entre 0,01 y 0,001 resultan aceptables.

Esta estrategia permite combinar de la forma más ventajosa posible un método de Newton con un Newton modificado para un problema general de contacto con plasticidad y deformación finita. El método *mixto* propuesto permite en potencia la utilización de esquemas de actualización de las factorizaciones de la matriz tangente tipo Broyden o BFGS<sup>4,15</sup>, que pueden reducir el coste total del análisis. Estos métodos no son aplicables directamente sobre la formulación convencional del problema de contacto mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, debido a que la actualización de las restricciones altera la estructura del sistema que debe ser calculado de nuevo.

### **Ejemplo 2**

Consiste en la indentación de deformación finita de un cilindro elástico ( $E = 1e 7$ ,  $\gamma = 0,35$ ) de radio 0,4 en una base elastoplástica ( $E = 1e 6$ ,  $\gamma = 0,35$ ,  $\sigma_y = 3333$ ,  $H = 1010$ ) de dimensiones  $0,8 \times 0,3$ , cuya discretización se observa en la Figura 2. Para un desplazamiento prescrito de 0,05, el análisis se realiza en 10 incrementos aplicándose en primer lugar el esquema de Newton puro bajo las dos variantes descritas anteriormente para la resolución del sistema lineal; mediante el método *directo* (ACTCOL) y mediante el método *mixto* (*mixto I*); en segundo lugar se aplica el sistema de Newton parcialmente modificado conjuntamente con el método *mixto* (*mixto II*). Los tiempos de cálculo empleados para cada uno de ellos se resumen en la Tabla IV.

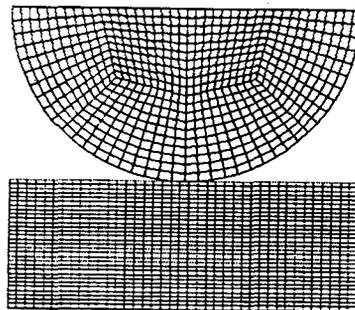


Figura 2

	Tiempo total reducción	Tiempo solución sistema	Tiempo cálculo $K$
ACTCOL	423,9	149,02	101,43
<i>Mixto I</i>	407,8 - 3,8 %	148,61	101,09
<i>Mixto II</i>	392,1 - 7,5 %	128,86	74,84

Tabla IV. Indentación con cilindro 2D

El número de iteraciones requerido en cada incremento para llegar a la convergencia es el mismo en los tres casos, aunque con el método *mixto II* la matriz de rigidez del cilindro (1239 grados de libertad frente 2438 de la base) se calcula y factoriza sólo en 21 ocasiones frente a 116 en los otros dos casos.

Siguiendo la tendencia marcada en el Ejemplo 1, este mismo ejemplo modelizado en tres dimensiones con una discretización uniforme de  $25 \times 12 \times 4$  elementos en la base y 108 elementos en el cilindro, muestra una mejora de la eficacia computacional mucho más significativa, como se recoge en la Tabla V.

	Tiempo total reducción	Tiempo solución sistema	Tiempo cálculo $K$
ACTCOL	3497,2	2414,90	476,91
<i>Mixto I</i>	2670,2 - 24 %	1513,77	477,43
<i>Mixto II</i>	2619,4 - 25 %	1498,15	451,42

Tabla V. Indentación con cilindro 3D: comparación de tiempos de CPU

La reducción de tiempos introducida por el método *mixto II* frente al *mixto I* no es tan significativa como en el caso anterior, debido a la pequeña dimensión de la parte elástica frente a la plástica (574 grados de libertad en el cilindro, frente a 4928 en la base). La eliminación de su factorización no tiene tanto peso como en el caso 2D y la ventaja más importante proviene, en este caso 3D, de la reducción del ancho de banda.

## SUBESTRUCTURACIÓN. EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIOS

Las mejoras computacionales obtenidas de la división de la matriz de rigidez global en los bloques inducidos por el contacto sugiere la extensión de esta idea de forma que la matriz de cada cuerpo se divida a su vez en submatrices. Esta técnica se conoce como subestructuración en los ámbitos ingenieriles y conduce a un sistema de ecuaciones condensado en la interfase que se resuelve mediante métodos *directos standard* para matrices llenas. Si el sistema condensado en la interfase se resuelve mediante métodos iterativos<sup>20</sup>, el método coincide con el denominado en los ámbitos matemáticos como

método de descomposición de dominios de Schur. Suponiendo un dominio dividido en dos subdominios disjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con frontera interna (interfase)  $\Gamma_3$  y aplicando el método de subestructuración, se obtiene el siguiente sistema condensado para la interfase

$$\mathbf{S}\mathbf{u}_3 = \mathbf{i}_3 \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{K}_{33} - \mathbf{K}_{31}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{32}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{i}_3 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{K}_{31}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 - \mathbf{K}_{32}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 \end{cases}$$

La matriz condensada  $\mathbf{S}$  se denomina complemento de Schur<sup>20</sup>. Esta matriz es simétrica y definida positiva, pero densa y cara de calcular. Sin embargo, mediante el método del gradiente conjugado, el sistema puede resolverse sin calcular la matrix  $\mathbf{S}$  de forma explícita. El complemento de Schur puede dividirse en suma de dos términos, cada uno con la contribución de un subdominio

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)} \begin{cases} \mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{K}_{33}^{(1)} - \mathbf{K}_{31}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{K}_{33}^{(2)} - \mathbf{K}_{32}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{23} \end{cases}$$

y el método del gradiente conjugado puede aplicarse de manera eficiente realizando tan sólo productos matriz por vector y sustituciones progresivas y regresivas. Este algoritmo, generalizado a  $n$  dominios, es desde el punto de vista de la computación paralela muy ventajoso.

Los métodos de descomposición de dominios<sup>21-27</sup> están siendo objeto de gran interés en los últimos años como consecuencia del desarrollo de la computación paralela. En este trabajo, esta técnica se aplica bajo la modalidad FETI a la resolución de problemas de sólidos no lineales en ordenadores secuenciales, aprovechando las ventajas asociadas con la reducción del ancho de banda de las matrices a factorizar y obteniéndose ventajas adicionales asociadas con la estrategia iterativa y con las características geométricas del problema.

### Método híbrido FETI

El método híbrido FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting)<sup>27</sup> consiste básicamente en dividir el dominio en subdominios disjuntos e imponer la condición de compatibilidad de los desplazamientos en las fronteras de los subdominios mediante multiplicadores de Lagrange. Se obtiene así un sistema algebraico

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{B}_1^T \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \dots & 0 & \mathbf{B}_2^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n & \mathbf{B}_n^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{f}_i$  son respectivamente la matriz de rigidez, el vector desplazamientos y el vector de fuerzas asociadas a la discretización por elementos finitos de cada subdominio  $\Omega_i$ . Las matrices  $\mathbf{B}_i$  son matrices booleanas, que al actuar sobre un vector o matriz extraen y ponen signo a la componente de la interfase de dicha matriz o

vector. El vector de multiplicadores de Lagrange representa la fuerza de interacción entre los subdominios a lo largo de su frontera común. Sustituyendo la expresión de los desplazamientos

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_j^+ (\mathbf{f}_j \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_j \boldsymbol{\alpha}$$

en la ecuación de los multiplicadores de Lagrange y añadiendo la ecuación de ortogonalidad (5) de los movimientos de sólido rígido para los dominios singulares, se obtiene el sistema condensado en la interfase

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

donde los términos  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{e}$  coinciden exactamente con las expresiones deducidas en (8) sustituyendo  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{B}$ . Este sistema puede resolverse mediante el método de gradiente conjugado proyectado.

El método FETI es también ventajoso para computación paralela evitando algunas de las dificultades del método Schur, aunque a costa de introducir variables adicionales. Es además la extensión natural del método *mixto* desarrollado en este trabajo para el tratamiento del contacto con multiplicadores de Lagrange.

### Descomposición de dominios en ordenadores secuenciales

La eficacia computacional de una partición en subdominios en ordenadores secuenciales depende en gran medida de la descomposición realizada. Con respecto a la resolución local del sistema de ecuaciones de cada subdominio, la mejor partición es la que más reduce el ancho de banda de las matrices locales. En relación con la resolución de la interfase convendrá disminuir la dimensión del problema condensado asociado así como su número de condición. Para obtener sistemas condensados mejor condicionados es deseable evitar subdominios con mala relación de aspecto y confinar las regiones con gradientes altos dentro de los subdominios. En general, es difícil definir la mejor descomposición de dominios, ya que hay que llegar a un equilibrio entre requerimientos que muchas veces son excluyentes; suele ser conveniente utilizar herramientas gráficas 3D<sup>29</sup> que permiten realizar automáticamente descomposiciones según criterios diversos, hasta dar con la partición más conveniente.

### Método FETI y contacto

El sistema que surge de la combinación de contacto con multiplicadores de Lagrange y descomposición en dominios con el método FETI tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{B}_1^T & \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \dots & 0 & \mathbf{B}_2^T & \mathbf{C}_1^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n & \mathbf{B}_n^T & \mathbf{C}_n^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_n & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{C}_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \\ \boldsymbol{\lambda}_D \\ \boldsymbol{\lambda}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_n \\ 0 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

donde  $\lambda_D$  son los multiplicadores que actúan en las fronteras de los subdominios y  $\lambda_C$  los de las interfases de contacto. Las matrices  $B_i$  imponen las restricciones cinemáticas entre los dominios y se almacenan de forma dispersa siguiendo el mismo tratamiento que las matrices  $C_j$  de contacto. El método de resolución de este sistema no presenta ninguna diferencia con el tratado sólo para contacto.

### Algoritmo iterativo con tratamiento diferenciado por dominios

El algoritmo iterativo propuesto anteriormente para problemas de contacto se puede extender de manera automática cuando los cuerpos en contacto se subdividen a su vez en subdominios conectados mediante el método FETI. La estrategia iterativa basada en el criterio de convergencia local evita el tratamiento homogéneo del problema manteniendo el orden de convergencia del método de Newton, pero recalculando y factorizando en cada iteración sólo las matrices de los dominios no convergidos. En problemas en los que las no linealidades se encuentren localizadas en una zona concreta del dominio, esta técnica permite obtener ventajas computacionales adicionales a las obtenidas por la reducción del ancho de banda. La única diferencia existente con el método desarrollado para contacto es beneficiosa, ya que las matrices de interfase de los dominios sólo se calculan al principio y no varían en el resto del análisis.

### Ejemplo 3

Se trata de una placa elástica con un orificio central sometida a tracción (desplazamiento prescrito de 0,01), cuya geometría y condiciones de contorno se presentan en la Figura 3 para la cuarta parte de la misma.

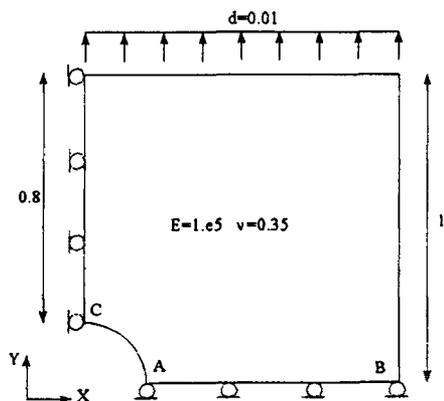


Figura 3

En la Figura 4 se muestra la discretización y las particiones utilizadas en 1, 2 y 4 dominios.

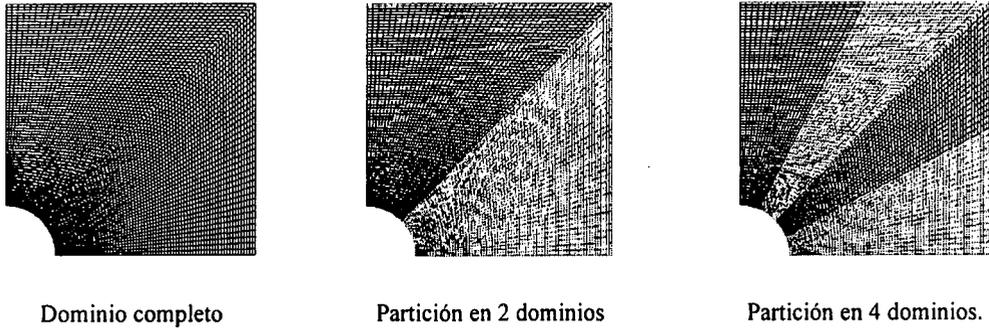


Figura 4. Placa con orificio. Discretización

Los tiempos totales, así como los empleados en la resolución del sistema y en el cálculo de las matrices de rigidez, se recogen en la Tabla VI. Se muestra además el número de iteraciones de gradiente conjugado frente al número de ecuaciones adicionales que introduce la descomposición en dominios.

	Tiempo total	Sistema	Cálculo $K$	Iter. CG	Nº ec. adicionales
1 dominio	22,21	10,93	4,08		
2 dominios	21,39	10,58	4,19	22	142
4 dominios	20,23	9,62	4,23	56	426

Tabla VI. Placa con agujero: comparación de tiempos de cálculo

La partición en dos dominios produce un subdominio flotante con un movimiento de sólido rígido. En la descomposición en cuatro subdominios aparecen tres dominios subdominios flotantes con 1,2 y 1 movimientos de sólido rígido. La precisión de la técnica de tratamiento de problemas singulares se puede observar en los resultados en desplazamiento para los nodos A, B y C que se muestran en la Tabla VII, así como en los resultados correspondientes a las tensiones efectivas que se muestran en la Figura 5.



Figura 5. Placa con orificio. Tensiones efectivas

	Nodo A: despl. en X	Nodo B: despl. en X	Nodo C: despl. en Y
1 dominio	-0,01911077	-0,05768314	0,05597383
2 dominios	-0,01911128	-0,05768291	0,05597391
4 dominios	-0,01911092	-0,05768321	0,05597396

Tabla VII. Placa con agujero: comparación de resultados

**Ejemplo 4**

Se trata de una viga elástica en voladizo solicitada mediante un desplazamiento prescrito en su extremo libre. En la Figura 6 se consideran dos geometrías distintas que se mallan uniformemente con el mismo número de elementos. Para minimizar el ancho de banda en cada dominio, los nodos se numeran siempre en la dirección de menor número de elementos.

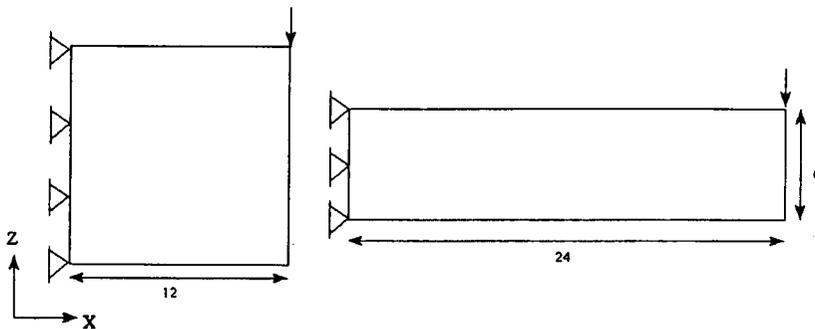


Figura 6. Vigas en voladizo

Se pretende con este ejemplo observar el comportamiento del método de descomposición de dominios para geometrías similares a la existente en la laminación de productos planos. En la Tabla VIII se muestran los resultados obtenidos en el caso de geometría cuadrada con una discretización uniforme de  $120 \times 120$  elementos y 29039 grados de libertad.

Se observa como las particiones en dominios cuadrados se resuelven con similar número de iteraciones de gradiente conjugado, independientemente del número de ecuaciones adicionales. El orden de convergencia del método de gradiente conjugado se mantiene constante y los tiempos disminuyen al reducirse los anchos de banda de las submatrices a factorizar. En este ejemplo la descomposición más ventajosa se obtiene con una partición en 36 dominios cuadrados de aproximadamente 800 grados de libertad cada uno, que produce casi 60 % de reducción frente al método *directo*.

En el segundo caso de geometría rectangular es difícil particionar en dominios cumpliendo simultáneamente los requisitos de minimizar al ancho de banda y mantener subdominios con buena relación de aspecto (cuasicuadrados). En la Tabla IX se

muestran los resultados obtenidos para una discretización de 29279 grados de libertad, que tiene el mismo número de elementos ( $240 \times 60$ ) que el caso anterior.

	Tiempo CPU-red.	Iter. CG	Nº ec. adic.	Nº mov. sólido
1 dominio	105,8			
2 dominios	64,6 - 39 %	18	242	0
3 dominios	61,1 - 42 %	36	484	0
4 dom. ( $2 \times 2$ )	81,2 - 23 %	34	486	5
6 dom. ( $3 \times 2$ )	72,4 - 31 %	47	730	8
9 dom. ( $3 \times 3$ )	67,3 - 36 %	45	976	17
16 dom. ( $4 \times 4$ )	52,9 - 50 %	47	1470	35
25 dom. ( $5 \times 5$ )	47,0 - 55 %	46	1968	59
36 dom. ( $6 \times 6$ )	43,1 - 59 %	46	2470	89
64 dom. ( $8 \times 8$ )	43,7 - 58 %	46	3486	167
100 dom. ( $10 \times 10$ )	45,5 - 57 %	45	4518	269

Tabla VIII. Viga en voladizo  $120 \times 120$ : comparación de tiempos de cálculo

	Tiempo CPU	Iter. CG	Nº ec. adic.	Nº mov. sólido
1 dominio	46,42			
2 dom. en $Z$	43,53	23	482	0
3 dom. en $Z$	57,02	71	964	0
$2X \times 2Z$	59,24	52	606	5
$2X \times 3Z$	70,69	108	1090	8
$3X \times 2Z$	59,32	51	730	11
$3X \times 3Z$	60,09	82	1216	17
$4X \times 4Z$	57,67	95	1830	35
$5X \times 5Z$	52,04	102	2448	59
$6X \times 6Z$	52,35	105	3070	89
$4X \times 2Z$	57,17	45	845	17
$8X \times 2Z$	52,92	48	1350	41
$12X \times 3Z$	45,40	50	2350	98

Tabla IX. Viga en voladizo  $240 \times 60$ : comparación de tiempos de cálculo

Se observa cómo los dominios estrechos producen sistemas condensados en la interfase peor condicionados; con la misma dimensión y con menos movimientos de sólido rígido se necesitan más iteraciones de CG para resolver las particiones en  $Z$  que para las particiones en  $X$ . Las particiones en dominios cuadrados ( $8X \times 2Z$  y  $12X \times 3Z$ ) introducen tantos grados de libertad adicionales que aunque el sistema está bien condicionado no se obtienen mejoras apreciables.

Para el mismo ejemplo en tres dimensiones se consideran discretizaciones de  $16 \times 16 \times 16$  y  $32 \times 16 \times 8$  elementos (13855 y 14671 grados de libertad, respectivamente), obteniéndose los resultados que se recogen en la Tabla X y la Tabla XI, respectivamente.

	Tiempo CPU-red.	Iter. CG	Nº ec. adic.	Nº mov. sól. róg.
1 dominio	835,7			
2 dom. ( $2 \times 1 \times 1$ )	268,7 - 67 %	25	867	0
4 dom. ( $2 \times 2 \times 1$ )	162,9 - 80 %	53	1836	0
8 dom. ( $2 \times 2 \times 2$ )	157,1 - 81 %	57	2916	20
32 dom. ( $4 \times 4 \times 4$ )	111,0 - 87 %	76	10800	280

Tabla X. Viga en voladizo  $16 \times 16 \times 16$ : comparación de tiempos de cálculo

	Tiempo CPU-red.	Iter. CG	Nº ec. adic.	Nº mov. sól. róg.
1 dominio	232,9			
2 dom. ( $2 \times 1 \times 1$ )	239,9	18	459	4
2 dom. ( $1 \times 2 \times 1$ )	150,6 - 35 %	52	891	0
2 dom. ( $1 \times 1 \times 2$ )	130,0 - 44 %	28	1683	0
4 dom. ( $2 \times 2 \times 1$ )	177,9 - 24 %	72	1404	8
4 dom. ( $2 \times 1 \times 2$ )	188,5 - 19 %	72	2244	10
4 dom. ( $1 \times 2 \times 2$ )	120,1 - 48 %	79	2772	0
8 dom. ( $2 \times 2 \times 2$ )	154,6 - 34 %	125	1404	20
16 dom. ( $2 \times 4 \times 2$ )	170,3 - 27 %	252	5700	40
16 dom. ( $4 \times 2 \times 2$ )	117,0 - 50 %	69	4644	68
32 dom. ( $4 \times 4 \times 2$ )	114,5 - 51 %	112	7200	136
64 dom. ( $4 \times 4 \times 4$ )	200,4 - 14 %	293	12528	280
64 dom. ( $8 \times 4 \times 2$ )	109,7 - 53 %	65	10200	328

Tabla XI. Viga en voladizo  $32 \times 16 \times 8$ : comparación de tiempos de cálculo

Como era de esperar, las reducciones de tiempo de cálculo son mucho mayores en el caso tridimensional aún siendo el número de grados de libertad mucho menor, ya que las reducciones en el ancho de banda son sustancialmente mayores. En la geometría cuadrada se consiguen mejoras de hasta el 60 % en 2 dimensiones y 87 % en 3 dimensiones. Para la geometría rectangular en 2 dimensiones no se consiguen mejoras apreciables, mientras que en 3 dimensiones se reduce el tiempo de cálculo hasta un 53 %.

**Ejemplo 5**

Se trata de indentación de un bloque elástico ( $E = 20000$ ,  $\gamma = 0,35$ ) en una base elastoplástica ( $E = 10000$ ,  $\gamma = 0,35$ ,  $\sigma_y = 500$ ,  $H = 1111$ ) mediante un gran desplazamiento prescrito de valor igual a la altura del bloque. El análisis se realiza en 10 incrementos de carga con hipótesis de grandes deformaciones y con la discretización que se muestra en la Figura 7.

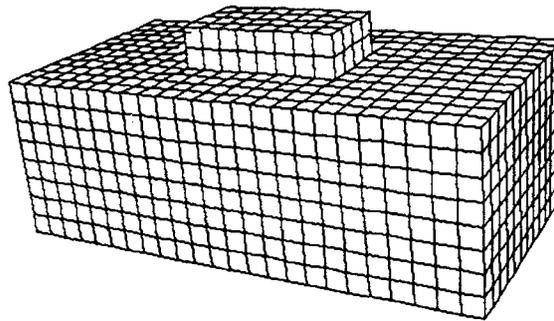


Figura 7. Indentación con bloque. Malla inicial

Se muestran en la Tabla XII los tiempos de cálculo obtenidos para la resolución de problema con distintas particiones ( $X \times Y \times Z$ ) en dominios de la base. La dirección  $X$  corresponde al largo (24 elementos), la  $Y$  al ancho (12 elementos) y la  $Z$  a la altura (8 elementos). El bloque se considera siempre un dominio excepto en el primer caso, directo, en el que no se aplica el método.

	Tiempo	Reducción
<i>Directo</i>	4088	
<i>Mixto</i>	2765	32,2 %
$1 \times 1 \times 2$	2571	37,1 %
$1 \times 2 \times 1$	2198	46,2 %
$1 \times 2 \times 2$	2266	44,6 %
$2 \times 2 \times 2$	3029	29,9 %
$1 \times 3 \times 1$	2027	50,4 %
$1 \times 3 \times 2$	2492	39,0 %

Tabla XII. Indentación bloque 3D

## APLICACIÓN AL PROCESO DE LAMINACIÓN

En la primera parte de este trabajo se han presentado la formulación, los resultados y la metodología de validación utilizada<sup>1</sup> para la simulación numérica de un caso de laminación plana de un desbaste de 300 mm de longitud ( $X$ ) y 350 mm de anchura ( $Y$ ) cuyo espesor ( $Z$ ) de 100 mm se reduce en un 13,2 % con rodillos de 300 mm de radio. Se completan a continuación aquellos resultados con los relativos a la eficiencia computacional, obtenidos con los distintos métodos desarrollados para la resolución del proceso iterativo tipo Newton de cada incremento.

### Rendimiento del método *mixto* de resolución del contacto

En la Tabla XIII se muestran los tiempos de CPU correspondientes a la laminación 2D para distintas discretizaciones del desbaste manteniendo constante la discretización del rodillo. Se observa como el método *mixto I* resulta ventajoso sólo para sistemas de ecuaciones de tamaño elevado y sólo mediante la estrategia iterativa (*mixto II*) se obtienen resultados eficientes también con discretizaciones pequeñas, que tienden a desaparecer con el aumento de los grados de libertad del desbaste, por los motivos aducidos en los ejemplos de contacto anteriores.

Ndof	Malla $X \times Z$	Directo tiempo	<i>Mixto I</i>		<i>Mixto II</i>	
			tiempo	reducción	tiempo	reducción
681	36 × 6	518,6	525,5		489,3	5,6 %
1035	48 × 8	849,8	868,6		818,8	3,6 %
1481	60 × 10	1278,6	1297,0		1256,6	1,7 %
2025	72 × 12	1923,3	1958,7		1907,2	0,8 %
3021	90 × 15	3464,7	3226,9	6,9 %	3166,7	8,6 %
5161	120 × 20	6350,9	5763,3	9,2 %	5698,1	10,3 %
7391	140 × 25	10276,4	9368,7	8,8 %	9298,3	9,5 %

Tabla XIII. Laminación 2D: rendimiento de los métodos *mixtos*

Ndof	Malla $X \times Y \times Z$	Directo tiempo	<i>Mixto I</i>		<i>Mixto II</i>	
			tiempo	reducción	tiempo	reducción
2525	16 × 8 × 4	10054	9589	4,6 %	8653	13,9 %
2984	16 × 8 × 5	13968	12994	6,9 %	11803	15,5 %
3562	16 × 10 × 5	20107	16941	15,7 %	16186	19,5 %
4561	18 × 10 × 6	33219	26987	18,8 %	26244	21,0 %
5419	20 × 11 × 6	49724	37696	24,2 %	36518	26,5 %
7096	23 × 11 × 6	76826	55701	27,5 %	54127	29,5 %
8825	24 × 12 × 8	130221	94299	27,6 %	93090	28,5 %

Tabla XIV. Laminación 3D: rendimiento de los métodos *mixtos*

En la Tabla XIV se muestran los tiempos de CPU correspondientes a la laminación 3D para distintas discretizaciones, donde al aumentar el número de grados de libertad del desbaste, también mejora la eficiencia computacional. De nuevo, para problemas

pequeños la ventaja proviene principalmente de la estrategia iterativa, mientras que para problemas grandes proviene de la resolución del sistema.

### Rendimiento del método de descomposición de dominios

En el caso 2D, el dominio a descomponer se reduce a un rectángulo. Sólo particiones a lo alto del desbaste reducen el ancho de banda de las submatrices, pero a costa de un elevado número de multiplicadores y produciendo dominios con mala relación de aspecto. Particiones a lo largo (Figura 8) dan lugar a sistemas condensados bien condicionados, pero no reducen el ancho de banda de las matrices a factorizar, por lo que no son eficientes. En la Tabla XV se muestran los resultados obtenidos para distintas discretizaciones del desbaste y distintos procedimientos de resolución.

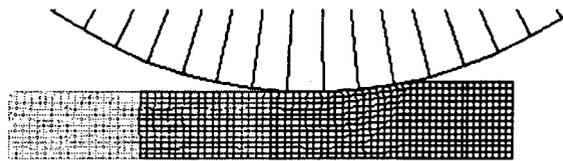


Figura 8. Laminación 2D: partición en dominios

El coste de las ecuaciones constitutivas elastoplásticas se refleja en la comparación del tiempo de cálculo de la rigidez tangente con el tiempo de resolución del sistema. Estos tiempos sólo se igualan en el último caso con el aumento del número de grados de libertad del problema.

El coste de la resolución del sistema crece con el número de dominios, debido al incremento de los grados de libertad adicionales, sin embargo disminuye el coste del cálculo de la rigidez tangente, al no recalcularse las matrices de los dominios que están alejados del rodillo. Puede apreciarse que en 2D ambas tendencias se compensan y el balance final no es especialmente beneficioso.

En simulaciones 3D, particiones a lo ancho del desbaste permiten reducir el ancho de banda de las submatrices sin producir dominios mal condicionados y sin un número de nodos interfase muy elevado. De esta forma es posible combinar mediante particiones a lo ancho y a lo largo las ventajas propias del método de descomposición de dominios puros (DD-I) con las introducidas por la estrategia iterativa (DD-II). En la Tabla XVI se muestran los resultados obtenidos para una malla de  $18 \times 10 \times 6$  elementos en el desbaste y 100 elementos en el rodillo. En el primer caso, desbaste y rodillo se resuelven conjuntamente mediante el método *directo*. En los demás casos, las diversas particiones consideran al rodillo como uno de los dominios. En la última columna se indica porcentualmente la mejora conseguida frente al método *directo*.

De manera análoga, en la Tabla XVII se muestran los resultados obtenidos con la estrategia iterativa (DD-II) sobre una discretización más fina:  $24 \times 12 \times 8$  elementos del desbaste y 100 elementos en el rodillo. Pueden apreciarse mejoras importantes de hasta el 50 % frente al método *directo standard*.

48 × 8	<i>Directo</i>	<i>Mixto II</i>	2 dominios	3 dominios	4 dominios
Tiempo total	849,8	818,8	781,2	767,1	795,7
Tiempo sol. sis.	58,1	87,7	107,5	132,3	166,2
Tiempo calc. <i>K</i>	280,4	244,6	182,1	160,4	142,1
60 × 10	<i>Directo</i>	<i>Mixto II</i>	2 dominios	3 dominios	4 dominios
Tiempo total	1278,6	1256,6	1184,3	1204,2	1202,3
Tiempo sol. sis.	119,2	160,4	203,2	254,8	293,6
Tiempo calc. <i>K</i>	411,4	380,6	268,8	238,9	212,6
72 × 12	<i>Directo</i>	<i>Mixto II</i>	2 dominios	3 dominios	4 dominios
Tiempo total	1932,3	1907,2	1775,1	1849,2	1851,7
Tiempo sol. sis.	227,6	287,1	345,8	441,6	507,6
Tiempo calc. <i>K</i>	609,7	577,1	402,93	368,9	321,6
90 × 15	<i>Directo</i>	<i>Mixto II</i>	2 dominios	3 dominios	4 dominios
Tiempo total	3464,7	3166,7	3063,7	3074,6	3152,6
Tiempo sol. sis.	537,7	601,5	704,9	863,8	913,7
Tiempo calc. <i>K</i>	1042,4	914,2	681,6	575,1	532,7
120 × 20	<i>Directo</i>	<i>Mixto II</i>	2 dominios	3 dominios	4 dominios
Tiempo total	6350,8	5698,1	5552,8	5806,1	6079,9
Tiempo sol. sis.	1590,9	1434,8	1752,8	2178,3	2532,7
Tiempo calc. <i>K</i>	1544,5	1411,3	1091,1	970,9	874,75

Tabla XV. Laminación 2D: rendimiento de la descomposición de dominios

Tiempo CPU, malla 18 × 10 × 6 eltos, n° ec. 4561			
	<i>Directo</i>	33219	
2 dominios	<i>Mixto I</i>	26987	18 %
	<i>Mixto II</i>	26244	21 %
3 dominios	2 × 1 × 1 (I)	32071	3,4 %
	2 × 1 × 1 (II)	28242	15 %
	1 × 2 × 1 (I)	24183	27 %
	1 × 2 × 1 (II)	23926	28 %
5 dominios	2 × 2 × 1 (I)	26832	19 %
	2 × 2 × 1 (II)	24328	27 %
7 dominios	3 × 2 × 1 (I)	30533	8 %
	3 × 2 × 1 (II)	27723	16 %

Tabla XVI. Laminación 3D. D. Dominios (I)

Tiempo CPU, malla $24 \times 12 \times 8$ eltos, n° ec. 8825			
	<i>Directo</i>	130221	
2 dominios	<i>Mixto II</i>	93090	28,5 %
3 dominios	$2 \times 1 \times 1$ (II)	102694	21,2 %
	$1 \times 2 \times 1$ (II)	76637	41,0 %
4 dominios	$3 \times 1 \times 1$ (II)	123427	5,2 %
	$1 \times 3 \times 1$ (II)	69590	46,6 %
5 dominios	$2 \times 2 \times 1$ (II)	83784	35,7 %
	$1 \times 4 \times 1$ (II)	62982	51,6 %
7 dominios	$3 \times 2 \times 1$ (II)	97615	25,0 %
	$2 \times 3 \times 1$ (II)	63820	51,0 %
9 dominios	$2 \times 4 \times 1$ (II)	61663	52,6 %
10 dominios	$3 \times 3 \times 1$ (II)	68531	47,4 %
13 dominios	$3 \times 4 \times 1$ (II)	66408	49,0 %

Tabla XVII. Laminación 3D. D. Dominios (II)

### CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado la resolución eficiente en ordenadores secuenciales del sistema de ecuaciones de un problema de contacto con multiplicadores de Lagrange y la combinación eficiente con un método de descomposición de dominios semejante, también basado en multiplicadores de Lagrange (FETI).

Se han obtenido resultados satisfactorios que justifican la metodología desarrollada para resolver problemas sólidos no lineales. El tratamiento diferenciado de las distintas zonas del dominio puede reducir sensiblemente los anchos de banda de las matrices locales y conducir a un sistema condensado en la interfase que se resuelve eficazmente mediante el método del gradiente conjugado.

En la simulación de procesos de laminación se han obtenido mejoras computacionales de un 50 % en problemas en 3 dimensiones y gran número de grados de libertad. En laminaciones de productos con forma donde la modelización de la geometría del rodillo precisa discretizaciones más finas, caben esperar mejoras más importantes.

Los métodos desarrollados permiten potencialmente la utilización de métodos BFGS y preconditionadores del gradiente conjugado, que pueden suponer sendas ventajas a explorar. Además, la descomposición en dominios se amolda especialmente a las nuevas posibilidades que ofrece la computación paralela, lo que puede suponer mejoras adicionales significativas.

## AGRADECIMIENTOS

El segundo autor agradece al Departamento de Educación Universidades e Investigación del Gobierno Vasco por la beca del Programa de Formación de Investigadores concedida para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

1. M.A. Gutiérrez, J.J. Anza, "Simulación numérica del conformado metálico. Eficiencia numérica en procesos de laminación. Parte I", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. y Dis. en Ing.*, Vol. **13**, 2, pp. 211-239, (1997).
2. J.C. Simo, "Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity", draft (1994) for Handbook of Numerical Analysis, Vol. III, to be edited by P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland,
3. J.P. Ponthot, "Traitement unifié des milieux continus solides en grandes transformations par la methode des elements finis", Tesis doctoral, Universidad de Lieja, (1994-1995).
4. H. Matties y G. Strang, "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations". *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **14**, pp. 1613-1626, (1979).
5. J.C. Simo y R.L. Taylor, "Consistent Tangent Operator for Rate-Independent Elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **48**, pp. 101-118, (1985).
6. A.F. Arif y N. Zabaras, "On the Performance of Two Tangent Operators for Finite Element Analysis of Large Deformation Inelastic Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **35**, pp. 369-389, (1992).
7. H. Parisch, "A Consistent Tangent Stiffness Operator for Three-dimensional Nonlinear Contact Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **28**, pp. 1803-1812, (1989).
8. J.J. Dongarra, I.S. Duff y H. Van der Vorst, "Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers", *SIAM*, Philadelphia, (1991).
9. R. Barret, M. Berry, T. Chan, J. Demmel, J. Donato, J.J. Dongarra, V. Eijkour, R. Pozo, C. Romine y H. Van der Vorst, "Templates for the Solutions of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods", *SIAM*, (1993).
10. G.H. Golub y C.F. Van Loan, "Matrix Computations", 2nd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, (1989).
11. R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant y J. Periaux, (Eds), *Proceeding of the First International Symposium on Domain Decomposition Method for Partial Differential Equations*, *SIAM*, (1988).
12. T.F. Chan, R. Glowinski, J. Periaux y O. Widlung (Eds), *Proceeding of the 2nd International Symposium on Domain Decomposition Method for Partial Differential Equations*, *SIAM*, (1989).
13. T.F. Chan, R. Glowinski, J. Periaux y O. Widlung (Eds), *Proceeding of the 2nd International Symposium on Domain Decomposition Method for Partial Differential Equations*, *SIAM*, (1990).
14. F.J. Gallego y J.J. Anza, "A Mixed Finite Element Model for the Elastic Contact Problem", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **28**, pp. 1249-1264, (1989).
15. Nour-Omid y P. Wriggers, "A Two Levels Iteration Method for the Solution of Contact Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **54**, pp. 131-144, (1986).
16. G.H. Golub y D. O'Leary, "Some History of the Conjugate Gradient and Lanczos Methods", *SIAMS*, Vol. **31**, (1989).

17. O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "*The Finite Element Method*", 4th edition, Vol. I, Mc.Graw Hill, (1989).
18. R. Fletcher, "*Practical Methods of Optimization*", John Wiley and Sons, New York, (1981).
19. P.F. Gill y W. Murray, "*Numerical Methods for Constrained Optimization*", Academic Press, London, (1974).
20. P.E. Bjordstad y O. Wildlung, "Iterative Methods for Solving Elliptic Problems on Regions Particionated into Substructures", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. **32**, N° 6, (1986).
21. F.X. Roux, "Domain Decomposition Methods for Static Problems", *Rech. Aérosp.*, N°, (1990-1).
22. Y.H. De Roeck, "Résolution sur ordinateurs multi-processeurs de problèmes d'élasticité par décomposition de domaines", Tesis Doctoral, Université Paris IX Dauphine UER Mathématiques de la Décision, (1991).
23. Y.H. De Roeck, "Nonlinear Elasticity Solved by a Domain Decomposition Method in a Hypercube", "*Appl. Num. Math.*, Vol. **12**, (1993).
24. P. Le Tallec, "Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics", *Comp. Mech. Advances*, Vol. **1**, N° 2, (1994).
25. C. Farhat y F.X. Roux, "Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics", *Comp. Mech. Advances*, Vol. **2**, pp. 1-124., (1994).
26. P.L. Lions, "On the Schwarz Alternating Method I", *Proceedings of the First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, R. Glowinski et al., *SIAM*, pp. 1-42, Philadelphia, (1994).
27. C. Farhat y F.X. Roux, "A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **32**, pp. 1205-1227, (1991).
28. C. Farhat, J. Mandel y F.X. Roux, "Optimal Convergence Properties of the FETI Domain Decomposition Method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **115**, pp. 365-385 (1994).
29. TOP/DOMDEC, Totally Object-Oriented Program for Automatic DOMain DEComposition".