

Un estudio comparativo de distintas funciones de prueba en la detección de puntos límite y de bifurcación

William Taylor Matias Silva

Departamento de Engenharia Civil - Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília - UnB
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brasil
Tel.: 55-61-348 23 10, Fax: 55-61-273 46 44
e-mail: taylor@unb.br

Resumen

Se presenta un estudio comparativo de distintas funciones de prueba para la detección de puntos límite y de puntos de bifurcación. Se eligen como parámetros de dichas funciones el *determinante*, el *menor pivote* y el *menor autovalor* de la matriz de rigidez tangente, obtenida a través del método de los elementos finitos en el análisis no lineal de distintas tipologías estructurales. Se presenta un algoritmo sencillo para la búsqueda de ramas de equilibrio secundarias en la proximidad de puntos singulares. Dicho algoritmo se define en función de los autovectores pertenecientes al espacio nulo de la matriz de rigidez tangente. Estos autovectores son utilizados para calcular el número y la dirección de ramas secundarias existentes en el punto singular. La dirección de dichas ramas se calcula mediante la suma de los autovectores escalados y el campo de desplazamientos correspondientes a la configuración deformada en el punto singular. Se presenta el comportamiento numérico de estos métodos en el análisis de inestabilidad de algunas tipologías estructurales tales como, vigas, pórticos y arcos.

A COMPARATIVE STUDY OF THE TEST FUNCTIONS FOR THE DETECTION OF LIMIT AND BIFURCATION POINTS

Summary

In this paper we present a comparative study of the test functions for the detection of limit and bifurcation points and discuss a simple method for the calculation of postcritical branches. Test functions for this purpose are given by inspection of the determinant, the least eigenvalue and the least pivot of the current stiffness parameter. Near stability points, the associated eigenvalue problem has to be solved in order to calculate the number of existing branches. The associated eigenvectors are used for a perturbation of the solution at bifurcation points. This perturbation is performed by adding the scale eigenvector to the deformed configuration in an appropriate way. Several examples of beams, arches and plane frames show the performance of the method.

INTRODUCCIÓN

La detección y localización de puntos límite y de puntos de bifurcación, denominados en el presente contexto *puntos críticos* o *puntos singulares*, ha recibido una atención especial en el área de mecánica computacional. De hecho, la pérdida de estabilidad del equilibrio y el consecuente cambio de geometría o bifurcación de la trayectoria de equilibrio son fenómenos usuales de algunos sistemas físicos tratados en mecánica no lineal del sólido. Los problemas clásicos de inestabilidad se presentan tanto en los fenómenos de pandeo de vigas, placas y láminas como en la bifurcación difusa en los modelos constitutivos inelásticos, que ocurre por ejemplo en el estiramiento de una barra circular con material elastoplástico sometida a un estado homogéneo de tensión.

Los métodos numéricos para la detección de puntos críticos pueden ser *directos* o *indirectos*¹⁷. En los métodos indirectos, el parámetro para detectar el punto crítico es calculado a medida que se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales de equilibrio. Se pueden elegir como parámetros el *determinante*, el *menor autovalor* o el *menor pivote* de la matriz de rigidez tangente. El punto crítico se obtiene cuando estos parámetros se anulan, es decir cuando la matriz de rigidez tangente es singular.

En los métodos directos, la condición de existencia de punto crítico se expresa por un conjunto de ecuaciones, que se añade al sistema de ecuaciones de equilibrio. Se forma así un sistema de ecuaciones *augmentado*, de cuya resolución se obtiene el punto crítico y sus autovectores asociados.

Obtenido el punto crítico, es necesario analizar el comportamiento postcrítico, activando para ello un algoritmo de búsqueda de ramas de equilibrio secundarias. En la referencia² se presenta un resumen de los métodos directos e indirectos más usuales en el marco del método de los elementos finitos, así como el de algoritmos de búsqueda de ramas secundarias de equilibrio cuando se trata de puntos de bifurcación.

En este trabajo se presentan algunas funciones de prueba para la detección de puntos singulares y un algoritmo muy sencillo para la búsqueda de ramas secundarias de equilibrio. Se estudia la evolución de los parámetros de la matriz de rigidez tangente (el determinante, el menor autovalor y el menor pivote) a lo largo de la trayectoria de equilibrio con el fin de observar sus comportamientos en la proximidad de puntos singulares.

En los puntos singulares se resuelve un problema de autovalores y autovectores asociados a la matriz de rigidez tangente para determinar el número de ramas secundarias posibles. Los autovectores son utilizados para perturbar la solución. Dicha perturbación se calcula al añadir el autovector, asociado al autovalor nulo, al campo de desplazamientos de la configuración deformada de una manera adecuada.

DESCRIPCIÓN DE LA CINEMÁTICA

En este apartado se describe de manera sucinta la obtención de las ecuaciones de equilibrio en problemas de mecánica no lineal del sólido por medio del método de elementos finitos, utilizando la formulación *Lagrangeana Total*.

Ecuaciones básicas

Se considera la descripción de las ecuaciones del movimiento para sólidos 3D de la mecánica de los medios continuos. Además, se supone el sistema conservativo con deformaciones en régimen elástico, lo cual es suficiente para el análisis de inestabilidad propuesta en este trabajo. El principio de mínimo del potencial total respecto a la configuración indeformada se escribe del modo siguiente

$$\Pi = \int_B \psi(\mathbf{E}) dv - \int_B \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dv - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} da \implies \min \quad (1)$$

Donde ψ representa la densidad de energía de deformación, $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ es el tensor de deformación de Green-Lagrange, $\rho \mathbf{b}$ son las fuerzas de volumen y $\bar{\mathbf{t}}$ describe las fuerzas de superficie que actúan en ∂B_σ . De la derivada direccional de Π respecto al campo de desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}$ se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$D\Pi \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} dv - \int_B \rho \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad (2)$$

con

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \text{GRAD} \boldsymbol{\eta} + \text{GRAD}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}) \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{GRAD} \mathbf{u}$$

que es la base para la discretización en elementos finitos. En función del problema analizado se elige la función ψ correspondiente. Para el caso de deformaciones infinitesimales se puede adoptar ψ correspondiente al material de St. Venant

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_E^2 - 2\mu II_E \quad (3a)$$

$$I_E = \text{tr}(\mathbf{E}) \quad II_E = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{E}^2) - \text{tr}(\mathbf{E})^2] \quad (3b)$$

de la cual se obtiene el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) + 2\mu \mathbf{E}$. En situaciones donde ocurren deformaciones finitas se puede considerar otras formas de ψ ¹¹.

Discretización por elementos finitos

Se discretiza el sólido en n_e elementos del modo siguiente

$$B^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$$

Se interpolan el campo de desplazamientos \mathbf{u} y su variación virtual $\boldsymbol{\eta}$ en el elemento Ω_e de la siguiente manera

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \mathbf{v}_e \quad \boldsymbol{\eta}^h = \mathbf{N} \delta \mathbf{v}_e \quad (4)$$

donde \mathbf{N} contiene las funciones de forma, \mathbf{v}_e y $\delta\mathbf{v}_e$ representan los desplazamientos nodales y sus variaciones virtuales, respectivamente. Por otro lado, la interpolación del campo de deformaciones y de sus variaciones virtuales se expresan como

$$\mathbf{E}^h = (\mathbf{B}^l + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl})\mathbf{v}_e \quad (5a)$$

$$\delta\mathbf{E}^h = (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl})\delta\mathbf{v}_e \quad (5b)$$

donde las matrices \mathbf{B}^l y \mathbf{B}^{nl} contienen las derivadas de las funciones de forma.

A través de las ecuaciones (4) y (5) la forma débil(2) se expresa como

$$DII \cdot \delta\mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta\mathbf{v}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d(\partial\Omega) \right) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Aplicándose el lema fundamental del análisis variacional en la ecuación (6), se obtiene el sistema de ecuaciones algebraico $\mathbf{R}(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega \quad (7a)$$

$$\text{y } \bar{\mathbf{P}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d(\partial\Omega) \right) \quad (7b)$$

representan los vectores de fuerzas internas y externas, respectivamente. Suponiéndose que las fuerzas externas son proporcionales, se introduce un escalar tal que

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (8)$$

donde λ es el factor de carga.

MÉTODOS DE CONTINUACIÓN DE LA RESPUESTA

El sistema de ecuaciones (8) es no lineal en \mathbf{v} . El grado de no linealidad depende de la teoría que se utiliza para describir el problema en particular. En el análisis de no linealidad geométrica del sólido \mathbf{R} es una función cúbica de \mathbf{v} . Por otro lado, por ejemplo en el análisis no lineal de láminas, placas y vigas, la dependencia de \mathbf{R} respecto a \mathbf{v} se describe a través de polinómios de grado superior¹⁹.

Los métodos que se basan en los procedimientos incrementales-iterativos con control de la carga fallan cuando la matriz de rigidez tangente se torna singular. Por otro lado, los métodos de continuación de la respuesta son capaces de superar dicho problema^{14,15}. Puesto que los métodos de longitud de arco son esenciales en la obtención de la respuesta de los sistemas estructurales en la fase postcrítica, se describe a continuación de manera sucinta la formulación general de dichos métodos.

Formulación general

En la Figura 1a se muestran algunos casos en los que los procedimientos incrementales-iterativos no interceptan la curva carga-desplazamiento, a través del control de la carga o de una componente del vector de desplazamiento. Por ejemplo, esto puede ocurrir para un dado factor de carga $\lambda = c$ o para un desplazamiento prescrito $v = v_a$. Para superar dicho problema se adopta una ecuación de restricción que se añade al sistema de ecuaciones de equilibrio (8) cuya representación geométrica se muestra en la Figura 1b. De esta manera se escribe un sistema *aumentado* de ecuaciones del modo siguiente

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \tag{9a}$$

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = 0 \tag{9b}$$

Mediante la linealización de (9) en una configuración de equilibrio conocida $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_v & \mathbf{G}_\lambda \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{Bmatrix} \tag{10}$$

cuyas derivadas direccionales se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_v \cdot \Delta \mathbf{v} &= \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] |_{\epsilon=0} \\ \mathbf{G}_\lambda \cdot \Delta \lambda &= \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] |_{\epsilon=0} \\ \mathbf{f}_v^T \cdot \Delta \mathbf{v} &= \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] |_{\epsilon=0} \\ f_\lambda \cdot \Delta \lambda &= \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] |_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{11}$$

En la literatura ingenieril \mathbf{G}_v se conoce como la matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T , mientras \mathbf{G}_λ describe un sistema de cargas que se define como $\mathbf{G}_\lambda = -\mathbf{P}$.

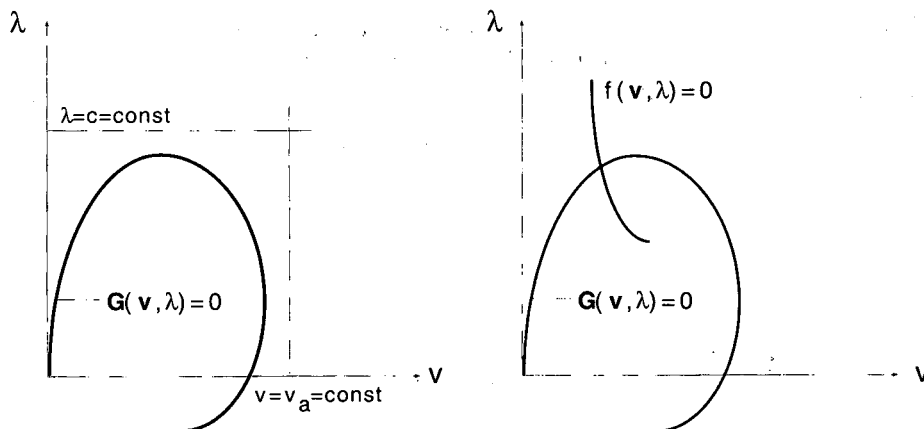


Figura 1. Curvas carga-desplazamiento

En la i -ésima iteración se resuelve el sistema de ecuaciones no simétrico (10) particionándolo de tal modo que se obtiene dos ecuaciones para $\Delta \mathbf{v}_i$ y $\Delta \lambda_i$, respectivamente¹⁶

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi} \quad (12)$$

$$\Delta \lambda_i = -\frac{f_i + \mathbf{f}_{v_i}^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{f_{\lambda_i} + \mathbf{f}_{v_i}^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}} \quad (13)$$

con

$$\Delta \mathbf{v}_{Pi} = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{P} \quad \Delta \mathbf{v}_{Gi} = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{G}_i$$

Se obtiene convergencia cuadrática si se realiza la linealización de la ecuación de restricción (9b) de manera consistente¹⁶.

En general esta formulación tiene validez sólo en la fase de corrección. En la literatura técnica se describen diferentes ecuaciones de restricción. Por ejemplo, se puede mencionar ecuaciones de coacción cuyo proceso de iteración se da en *hiperplanos normales*¹³, en *hiperplanos normales actualizados*¹², en *hiperplanos tangentes*⁹ o en *superficies esféricas*³.

Obtención del predictor mediante parametrización

En este apartado se describe un método alternativo para el cálculo del incremento de carga $\Delta \lambda$ en el paso predictor. Con ese fin se parametriza el campo de desplazamiento y el factor de carga tal que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ y $\lambda = \lambda(s)$, respectivamente. El parámetro s expresa la longitud de arco. De esta manera se reescribe el sistema *augmentado* (9) de ecuaciones del modo siguiente

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda, s) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{v}(s), \lambda(s)) \\ f(\mathbf{v}(s), \lambda(s), s) \end{array} \right\} \quad (14)$$

Predictor lineal

De la linealización de (14) respecto al parámetro s en una configuración de equilibrio conocida $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ se obtiene

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{G}_v & \mathbf{G}_\lambda \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ -f_s \end{array} \right\} \quad (15)$$

con $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial s$, $\dot{\lambda} = \partial \lambda / \partial s$ y $f_s = \partial f / \partial s$. La longitud del paso predictor es gobernado por la ecuación de restricción f . En este trabajo se adopta la ecuación de restricción descrita en¹³ que en forma matricial se expresa como

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \dot{\mathbf{v}}^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) + \dot{\lambda} (\lambda - \bar{\lambda}) - \Delta s$$

$$f = \mathbf{t}^T \mathbf{x} - \Delta s \quad (16)$$

con

$$\mathbf{t} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\} \quad \mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \\ \lambda - \bar{\lambda} \end{array} \right\} \quad \Delta s = s - \bar{s}$$

En la Figura 2 se muestra la interpretación geométrica de la ecuación (16). Las derivadas de dicha ecuación se expresan como

$$\mathbf{f}_v = \dot{\mathbf{v}}^T \approx \frac{\Delta \mathbf{v}^T}{\Delta s} \quad f_\lambda = \dot{\lambda} \approx \frac{\Delta \lambda}{\Delta s} \quad f_s = -1 \quad (17)$$

Sustituyendo los valores dados en (17) en la ecuación (15), se obtienen las predicciones del factor de carga y de los desplazamientos conforme se muestra en el Cuadro 1.

1. Resuélvase el sistema	$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_P = \mathbf{P}$
2. Evalúese el incremento del factor de carga	$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \Delta \mathbf{v}_P^T \Delta \mathbf{v}_P}}$
3. Evalúese el incremento de desplazamiento	$\Delta \mathbf{v}_0 = \Delta \lambda_0 \Delta \mathbf{v}_P$
4. Calcúlense las predicciones	$\lambda_0 = \bar{\lambda} + \Delta \lambda_0$ $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}} + \Delta \lambda_0 \Delta \mathbf{v}_P$

Cuadro 1. Predicción del factor de carga y de los desplazamientos

En el paso predictor es necesario determinar en que sentido avanza la solución. En cada punto de la trayectoria de equilibrio el vector tangente $\Delta \mathbf{v}_0$ determina dos sentidos distintos. Se calcula el signo de $\Delta \lambda_0$ imponiendo la siguiente condición⁶

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_0 > 0 \implies \Delta \lambda_0 \Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_P > 0 \quad (18)$$

donde $\Delta \bar{\mathbf{v}}$ es el incremento de desplazamientos del paso $n - 1$ al paso n . Por tanto el signo de $\Delta \lambda_0$ queda determinado a través del signo del término $\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_P$.

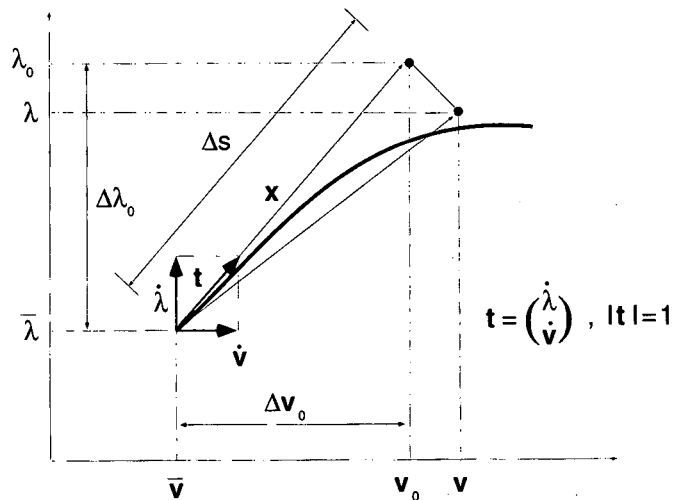


Figura 2. Interpretación geométrica de la ecuación de restricción en el paso predictor

Paso corrector

En el paso corrector se adopta la ecuación de restricción que describe el proceso de iteración en *hiperplanos normales* cuya expresión viene dada por

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \Delta \mathbf{v}_0^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) + \Delta \lambda_0 (\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \quad (19)$$

donde $\Delta \mathbf{v}_0$ y $\Delta \lambda_0$ son las predicciones de los incrementos de desplazamientos y del factor de carga, respectivamente. Las derivadas de esta ecuación se calculan como

$$\mathbf{f}_v^T = \Delta \mathbf{v}_0^T \quad f_\lambda = \Delta \lambda_0 \quad (20)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (12) y (13), se obtienen las correcciones del factor de carga y de los desplazamientos correspondientes a la i -ésima iteración. Se detallan estos cálculos en el Cuadro 2.

1. Calcúlese	$\mathbf{K}_{Ti}, \mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i), \mathbf{P}$
2. Resuélvanse los sistemas	$\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Pi} = \mathbf{P}$ $\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Gi} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i)$
3. Evalúese el incremento del factor de carga	$\Delta \lambda_i = -\frac{\Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{\Delta \lambda_0 + \Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}}$
4. Evalúese el incremento de desplazamiento	$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi}$
5. Actualícense las variables	$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta \lambda_i$ $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i$
6. Verifíquese la convergencia	Si $\ \mathbf{G}(\mathbf{v}_{i+1}, \lambda_{i+1})\ $ $\leq \text{TOL} \Rightarrow \text{Fin}$ Si no, $i \leftarrow i + 1$ Retórnese a 1

Cuadro 2. Algoritmo iterativo para la corrección del factor de carga y de los desplazamientos

Normalización de las unidades

Cuando se utilizan elementos finitos de láminas, plaças y vigas, en las distintas ecuaciones de coacción que se utilizan en los métodos de longitud de arco aparecen mezcladas cantidades con diferentes significados físicos como por ejemplo desplazamientos, rotaciones y cargas. Por ello se hace necesario normalizar dichas cantidades. La referencia¹⁸ propone la siguiente expresión

$$f(\mathbf{v}_s, \lambda_s) = \sqrt{\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{V}_s \Delta \mathbf{v} + \beta^2 \Delta \lambda^2} - s = 0 \quad (21)$$

donde β es un factor de escala, \mathbf{V}_s representa una matriz diagonal cuyos componentes V_i son factores de escala. La expresión de dicha matriz viene dada por

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (22)$$

Se puede obtener una familia de métodos de longitud de arco¹⁶ al asignar valores arbitrarios a los factores de escala V_i y β . En este trabajo se adopta el control solamente de las componentes de desplazamientos translacionales del vector de desplazamientos, es decir $V_{dis} = 1$, $V_{rot} = \beta = 0$.

CARACTERIZACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Puntos críticos o *no regulares* son puntos en los cuales la matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T se torna singular. Estos puntos están íntimamente relacionados con la pérdida de la estabilidad estructural. En estos puntos el vector de incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{v}_0$ definido en el ítem 3 del Cuadro 1 no existe o no está únicamente determinado. Para caracterizar los puntos críticos se adoptarán algunos resultados del álgebra lineal.

Sea \mathbf{z} un autovector del espacio nulo de \mathbf{K}_T , esto es $\mathbf{K}_T \mathbf{z} = \mathbf{0}$, o una vez que \mathbf{K}_T es simétrica

$$\mathbf{z}^T \mathbf{K}_T = \mathbf{0} \quad (23)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación incremental de equilibrio $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = \Delta \lambda \mathbf{P}$ por \mathbf{z}^T y teniendo en cuenta (23), se obtiene que

$$\Delta \lambda \mathbf{z}^T \mathbf{P} = 0 \quad (24)$$

Existen dos posibilidades para que se cumpla la ecuación (24). La primera, si $\mathbf{z}^T \mathbf{P} \neq 0 \implies \Delta \lambda = 0$ caracteriza un punto *límite*. La segunda, si $\mathbf{z}^T \mathbf{P} = 0 \implies \Delta \lambda \neq 0$, se trata de un punto de *bifurcación*.

En la Figura 3 se muestra la interpretación geométrica de estos puntos singulares a través de la curva definida en el plano (v_k, λ) para el caso unidimensional. Cuando la relación carga-desplazamiento incrementa monótonicamente (curva C_1) la matriz de rigidez tangente no presenta singularidades a lo largo de dicha curva. Por tanto C_1 representa la respuesta de una estructura en equilibrio estable. Por otro lado, si existe más de uno estado de equilibrio para un dado nivel de carga, por ejemplo representado por los puntos $((\lambda_1, v_1), (\lambda_1, v_2), (\lambda_1, v_3))$ en la curva C_2 , hay que considerar la inestabilidad del equilibrio. Se observa que en los puntos límite L_1 y L_2 la tangente a la curva C_2 tiene inclinación nula, es decir que en estos puntos no existe solución de la ecuación incremental de equilibrio, mientras que en el punto de bifurcación B existen otras tangentes, una correspondiente a la curva C_2 y la otra a la rama secundaria de equilibrio C_3 , lo que significa que existen infinitas soluciones de la ecuación incremental de equilibrio.

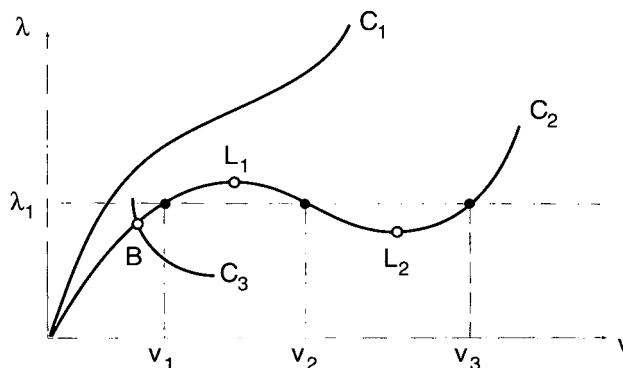


Figura 3. Caracterización de puntos críticos en la curva carga-desplazamiento

DETECCIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

El tratamiento numérico de puntos *críticos* o *singulares* es completamente distinto al de puntos regulares. Para realizar un análisis numérico de puntos singulares con éxito es necesario enfocar esta tarea en dos frentes: en la primera fase se trata de la *detección* y en la segunda de la *travesía* sobre puntos singulares. Los algoritmos utilizados para pasar puntos singulares dependen del tipo de dichos puntos. Para puntos de bifurcación la segunda fase del análisis corresponde a la elección de la rama secundaria y para puntos límite se trata simplemente de pasarlos.

Hay dos métodos clásicos para detectar puntos singulares. Se puede *encontrar* el punto singular a través de la solución de un sistema de ecuaciones algebraico aumentado donde una de las raíces es el punto singular. El otro método consiste en *detectar* el punto singular a medida que se avanza sobre el camino de solución. El primer método, denominado *método directo*, consiste en la formulación de un sistema de ecuaciones que tiene como solución el punto singular. Este sistema de ecuaciones debe contener el sistema de ecuaciones de equilibrio. Así, esta formulación deduce un sistema aumentado de ecuaciones que incorpora un conjunto de restricciones que caracteriza el punto singular. En el segundo método, denominado *método indirecto*, la detección de puntos singulares está íntimamente relacionada con el procedimiento de continuación de la respuesta, es decir que depende de la trayectoria de solución. Una discusión detallada sobre la aplicación práctica de los métodos directos e indirectos se encuentra en la referencia¹⁷. Se detalla a continuación el proceso de detección de puntos críticos por métodos indirectos que se ha implementado en este trabajo.

Determinación de puntos singulares por métodos indirectos

La idea fundamental de este método es reconocer la existencia de un punto crítico mientras se traza la rama de equilibrio con el método de continuación de la respuesta. La clave del éxito de estos métodos se basa en la elección de una buena función de prueba τ . La discusión sobre cómo calcular la función de prueba se verá posteriormente. Por ahora, se supone una función de prueba capaz de detectar la existencia de un punto crítico. Estos métodos se benefician de datos obtenidos del procedimiento de continuación de la respuesta. Un punto crítico se caracteriza por ser la raíz de la función de prueba. Puesto que encontrar numéricamente la raíz exacta de una función es poco probable, se puede comprobar la existencia de un punto singular a través de la siguiente condición

$$\tau(\mathbf{v}^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}) \tau(\mathbf{v}^{(n)}, \lambda^{(n)}) < 0 \quad (25)$$

La interpretación geométrica del criterio (25) para un grado de libertad se encuentra en la Figura 4. Se supone que el cambio de signo de la función de prueba detecta la existencia de un punto crítico. Además se supone que esta función es continua en λ y que tiene sólo una raíz en el intervalo de interés. Esta hipótesis requiere el uso de un tamaño de paso incremental adecuado no conocido *a priori*. Sin embargo, la determinación de un paso incremental apropiado puede resolverse a través de una combinación de experiencia y de una estrategia de control adaptativa que permitan controlar la convergencia de la solución.

Una vez el algoritmo detecta la raíz que se encuentra en el intervalo correspondiente a dos soluciones de la rama de equilibrio, se obtiene como primera aproximación a dicha raíz el valor obtenido interpolando linealmente como

$$\lambda_c \simeq \lambda^{(n)} + \frac{\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}}{\tau^{(n)} - \tau^{(n+1)}} \tau^{(n)} \quad (26)$$

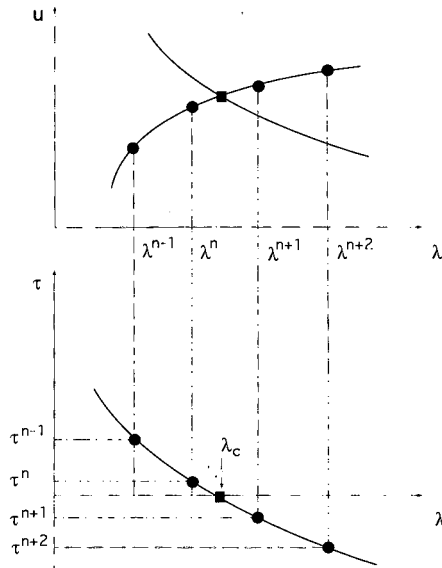


Figura 4. Valores de la función de prueba τ conteniendo la raíz

En la Figura 5 se encuentra la interpretación geométrica de (26). Se puede adoptar un método adaptativo para mejorar la aproximación inicial en (26). Para ello se debe conocer la evolución del gradiente $d\tau/d\lambda$ de la función de prueba a lo largo del camino de equilibrio. Puesto que, si dicho gradiente presenta cambios bruscos o fuertes discontinuidades en las proximidades de puntos singulares, resulta difícil obtener la raíz a través de una interpolación polinomial tomando más puntos de la función de prueba. Por ello en este trabajo se supone la interpolación lineal dada en (26). Por otro lado, se adoptan longitudes de arco pequeñas con el fin de disminuir el intervalo $[\lambda^n, \lambda^{n+1}]$, obteniéndose así una mejor aproximación para la raíz λ_c conforme se muestra en la Figura 5.

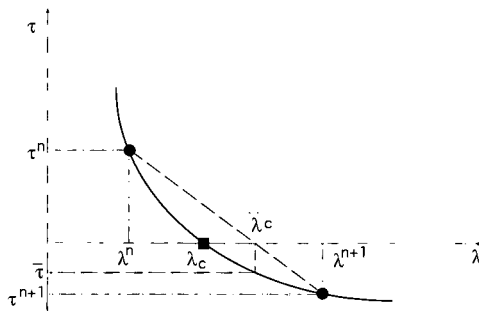


Figura 5. Aproximación lineal al cero de τ

Funciones de prueba τ

El propósito del presente apartado es investigar las posibles alternativas para la función de prueba. Una función de prueba es una función que permite el seguimiento del procedimiento de continuación de la respuesta para verificar la existencia de puntos singulares en la trayectoria de equilibrio. Por definición, un punto singular es la raíz de dicha función. Como se comentó anteriormente, los puntos singulares se caracterizan por la singularidad de la matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T . Por tanto la función de prueba controla esencialmente la matriz \mathbf{K}_T para obtener una estimación de su proximidad a puntos críticos.

La mejor estimación de la singularidad de \mathbf{K}_T se hace a través del menor autovalor de dicha matriz. Una vez que \mathbf{K}_T es real y simétrica, sus valores propios son reales. Además, si \mathbf{K}_T varía continuamente, sus valores propios también lo hacen. La singularidad se detecta simplemente averiguando la existencia de autovalores nulos. De esta manera se define el siguiente problema estándar de valores propios

$$[\mathbf{K}_T - \omega_j \mathbf{I}] \phi_j = \mathbf{0} \quad (27a)$$

donde la función de prueba se escribe como

$$\tau = \min_{1 \leq j \leq N} |\omega_j| \quad (27b)$$

Se normaliza dicha expresión del modo siguiente

$$\tau = \frac{\min_{1 \leq j \leq N} |\omega_{j_n}|}{\min_{1 \leq j \leq N} |\omega_{j_0}|} \quad (27c)$$

donde $(\min_{1 \leq j \leq N} |\omega_{j_n}|)$ y $(\min_{1 \leq j \leq N} |\omega_{j_0}|)$ corresponden al menor autovalor en valor absoluto de la matriz de rigidez tangente del paso n y de la matriz de rigidez lineal, respectivamente.

El menor autovalor de \mathbf{K}_T es una elección atractiva para la función de prueba. Sin embargo, el análisis de valores propios en cada paso incremental es muy costoso.

Otra posible función de prueba es el determinante de \mathbf{K}_T . La singularidad se caracteriza por $\det[\mathbf{K}_T] = 0$. El rasgo más atractivo de esta elección es que el determinante de \mathbf{K}_T es un subproducto del método de solución de ecuaciones. En los métodos directos de solución de un sistema lineal de ecuaciones se utiliza usualmente la siguiente descomposición de la matriz de rigidez

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \\ \text{donde } \mathbf{L} \text{ es una matriz triangular inferior} \\ \text{con } L_{ii} = 1 \text{ y } \mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1} \end{cases} \quad (28a)$$

y \mathbf{D} es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \text{diag} [D_{ii}] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{NN} \end{bmatrix} \quad (28b)$$

De esta manera la función de prueba se escribe como

$$\tau = \det[\mathbf{D}] = \prod_{i=1}^N D_{ii} \quad (29)$$

Hay algunas desventajas en (29). La magnitud del determinante puede ser computacionalmente inconveniente, especialmente para problemas con gran número de grados de libertad. Por ejemplo la multiplicación de todos los componentes D_{ii} por un factor ζ conduce a un factor ζ^N en el determinante de \mathbf{K}_T . De esta manera resulta difícil decir si un valor particular de la función de prueba τ es "grande" o "pequeño". Otra desventaja es que si el autovalor nulo de \mathbf{K}_T posee multiplicidad par, no hay cambio de signo en el determinante, y por tanto la ecuación (25) no detecta la existencia del punto crítico.

Para superar estas dificultades, varios investigadores han propuesto modificaciones en (29). Por ejemplo en la referencia¹⁰ se ha propuesto una expresión normalizada en la cual se evalúa el logaritmo natural del determinante de la matriz de rigidez tangente. Dicha expresión se escribe como

$$\tau = \pm \frac{\ln (|\det[\mathbf{K}_{T_n}]|)}{\ln (|\det[\mathbf{K}_{T_0}]|)} \quad (30)$$

donde el signo de (30) se toma como + cuando el número de valores pivotes positivos de \mathbf{D} es el mismo en el paso anterior $n - 1$ y en el paso n . Se define con el signo - cuando el número de pivotes positivos cambia entre dos pasos consecutivos. Nótese que la función logarítmica escala las componentes de \mathbf{K}_T , de tal modo que la magnitud del determinante es computacionalmente aceptable. El denominador en (30) delimita el valor de τ entre cero y uno.

Sustituyendo (22a) en (30) se llega a

$$\tau = \pm \frac{\ln (|\det[\mathbf{D}_n]|)}{\ln (|\det[\mathbf{D}_0]|)} = \pm \frac{\ln |D_{11}^n| + \cdots + \ln |D_{NN}^n|}{\ln |D_{11}^0| + \cdots + \ln |D_{NN}^0|} \quad (31)$$

teniendo en cuenta la definición del determinante de la matriz diagonal y las propiedades de la función logarítmica. Nótese que la expresión (31) es fácilmente programable. En este trabajo se propone una expresión alternativa a la ecuación (31) tomando como base una expresión similar propuesta en²¹. Se normaliza el determinante del modo siguiente

$$\tau = \pm \frac{(|\det[\bar{\mathbf{K}}_{T_n}]|)}{(|\det[\bar{\mathbf{K}}_{T_0}]|)} \quad \text{con} \quad |\det[\bar{\mathbf{K}}_{T_n}]| = \prod_{i=1}^N \frac{|D_{ii_n}|}{\|\mathbf{D}_0\|_\infty} \quad (32)$$

donde el signo de (32) se toma del mismo modo que en (30).

Otra alternativa para la función de prueba se basa en el conocimiento de que se puede controlar el menor autovalor de \mathbf{K}_T a través del control del menor pivot⁸. Por tanto se puede definir la siguiente expresión para la función de prueba

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq N} |D_{ii}| \quad (33a)$$

Se normaliza esta expresión de la siguiente manera

$$\tau = \frac{\min_{1 \leq i \leq N} |D_{ii_n}|}{\min_{1 \leq i \leq N} |D_{ii_0}|} \quad (33b)$$

Si \mathbf{K}_T es definida positiva, implica que todos los pivotes de \mathbf{D} son mayores que cero, consecuentemente $\tau > 0$. Si \mathbf{K}_T es singular, existirá entonces por lo menos un pivote nulo en \mathbf{D} , y por tanto $\tau = 0$. Si \mathbf{K}_T es definida negativa, existirá por lo menos un pivote negativo en \mathbf{D} , lo que implica que $\tau < 0$. De esta manera el menor pivote en valor absoluto, $|D_{ii}|$ puede ser una función de prueba. Además, extraer información sobre pivotes de los métodos de resolución directos es inmediato. La mayoría de estos métodos de solución proporcionan esta información como un subproducto del proceso de reducción de la matriz. De las funciones de prueba aquí presentadas ésta es la más sencilla. Esta función es utilizada por ejemplo en las referencias^{4,8}.

En este trabajo se utilizan las ecuaciones (27c), (31), (32) y (33b) para detectar puntos críticos una vez que las simulaciones numéricas se han realizado en problemas con pocos grados de libertad. Sin embargo, estas funciones de prueba no difieren si la singularidad de \mathbf{K}_T se trata de un punto límite o de un punto de bifurcación. Por tanto se necesita definir un

criterio para determinar el tipo de punto singular. Dicho criterio¹ se define como *parámetro de rigidez* cuya expresión se escribe como

$$k = \frac{\Delta \mathbf{v}_P^T \mathbf{P}}{\Delta \mathbf{v}_P^T \Delta \mathbf{v}_P} \quad (34a)$$

La expresión normalizada de (34a) se escribe como

$$Sp = \frac{k_n}{k_0} \quad (34b)$$

Se alcanza el punto límite cuando Sp tiende a cero, mientras que en el punto de bifurcación Sp supone un valor arbitrario distinto de cero. Se utiliza el parámetro de rigidez Sp y las funciones de prueba τ para detectar y clasificar puntos singulares del modo siguiente

$$\begin{aligned} \text{punto límite :} & \quad \tau = 0 & \quad Sp = 0 \\ \text{punto de bifurcación :} & \quad \tau \neq 0 & \quad Sp \neq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Una vez que se ha determinado la existencia de un punto singular entre las soluciones correspondientes a los pasos n y $n+1$, $\bar{\lambda}_c \in [n, n+1]$, el próximo paso es elegir una dirección de avance de la respuesta en una rama secundaria de equilibrio.

OBTENCIÓN DE RAMAS DE EQUILIBRIO SECUNDARIAS

La obtención de ramas secundarias en problemas que presentan bifurcación del equilibrio requiere consideraciones adicionales. En las proximidades de los puntos singulares es necesario resolver el problema de valores propios (27a) con el fin de calcular el número de ramas secundarias que puedan existir en dichos puntos. Se determina el número de ramas secundarias a través del número de valores propios nulos ω_j de (27a). Los autovectores ϕ_j correspondientes a $\omega_j = 0$ indican las direcciones de avance de la solución en el cálculo de las distintas ramas secundarias si se trata de un problema de bifurcación múltiple. En el caso de bifurcación simple sólo existe un autovector ϕ_j asociado a $\omega_j = 0$. Así se utilizan estos autovectores para perturbar la solución en las proximidades del punto de bifurcación. Se define dicha perturbación como la suma de un autovector escalado y a la configuración deformada del modo siguiente

$$\mathbf{v}_j = \bar{\mathbf{v}} + \xi_j \frac{\phi_j}{\|\phi_j\|} \quad (36)$$

donde \mathbf{v}_j denota la configuración perturbada que se utiliza como vector de partida para el cálculo de la dirección de la rama secundaria. $\bar{\mathbf{v}}$ es el vector de desplazamientos de la última solución convergida y ϕ_j es j -ésimo autovector asociado al autovalor nulo de (27a). ξ_j representa un factor de escala cuyo valor juega un papel importante en la obtención de la rama secundaria. Puesto que se puede considerar ϕ_j como un estado de deformaciones iniciales en $\bar{\mathbf{v}}$, se considera como estima de la magnitud de ξ_j la siguiente expresión

$$\xi_j = \pm \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|}{\tau_j} \quad (37)$$

donde τ_j es un factor que tiene en cuenta las imperfecciones. En los problemas más usuales en ingeniería se en la referencia²¹ sugiere que se suponga $\tau_j = 100$. Una discusión más detallada sobre que valores tomar para los parámetros ξ_j y τ_j se encuentra en dicha referencia. En los puntos de bifurcación simple existen tres direcciones a elegir. Una dirección está relacionada

con la trayectoria primaria de equilibrio y las otras dos con la rama secundaria. Así, para $\xi_j = 0$ la solución permanece en la trayectoria primaria. Para $\xi_j \neq 0$ el signo de ξ_j controla cual de las partes de la rama secundaria se calculará. El método descrito anteriormente puede ser fácilmente introducido en un código numérico del método de los elementos finitos. En las referencias^{14,15,21} se presentan técnicas más elaboradas para el cálculo de ramas secundarias.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se presenta el análisis de inestabilidad del equilibrio de varias tipologías estructurales a través del seguimiento a lo largo de la trayectoria de equilibrio, de los parámetros de \mathbf{K}_T definidos en las ecuaciones (27c), (31), (32) y (33b), además del parámetro de rigidez definido en (34b). Se calcula la raíz de estas funciones de prueba mediante la interpolación lineal dada en (26). Se elige el elemento de viga de Timoshenko C^0 para discretizar vigas, arcos y pórticos. La formulación de dicho elemento se encuentra detallada en las referencias^{5,7}.

Análisis de inestabilidad de arcos circulares de gran altura

En este ejemplo se considera un arco circular de gran altura sometido a la acción de una fuerza vertical actuando en la clave. Sus características geométricas y propiedades mecánicas se muestran en la Figura 6. Se suponen distintas condiciones de borde debido a las cuales el arco presenta diferentes comportamientos postcríticos, incluso pudiéndose en las fases precríticas presentar bifurcación del equilibrio.

Se discretiza el arco con 20 elementos de viga de Timoshenko C^0 .

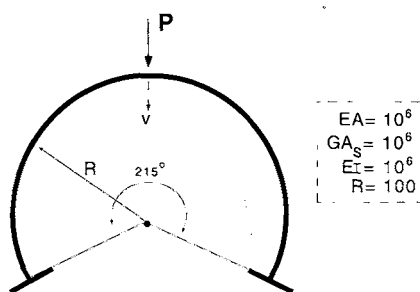


Figure 6. Arco circular de gran altura

Arco circular biempotrado

Para obtener la trayectoria primaria de equilibrio conforme se muestra en la Figura 7a, se ha utilizado el método de continuación de la respuesta con las siguientes características: la componente vertical del desplazamiento en la clave del arco con una magnitud de -5 y una tolerancia para la convergencia de 10^{-5} con un número total de 42 incrementos de carga. Para este tipo de condiciones de borde el arco presenta sólo puntos límite (A y B) conforme se muestra en la Figura 7a. El comportamiento postcrítico se caracteriza por un rebote hacia adelante.

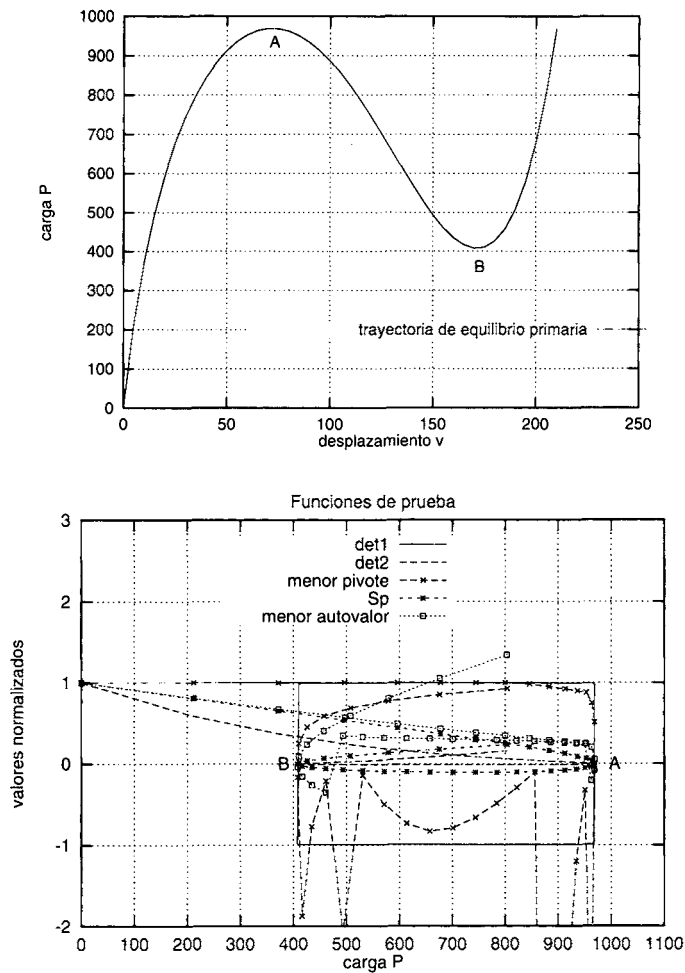


Figure 7. Arco circular biempotrado: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

En la Figura 7b se muestra la evolución de las *funciones de prueba* a lo largo de la trayectoria de equilibrio. Se observa que estas funciones se anulan en las proximidades de los puntos singulares (A y B). La función *det1* presenta saltos en dichos puntos y sigue continua en los puntos regulares. La función *menor pivote* presenta discontinuidades entre los puntos A y B. Las demás funciones son continuas. Cabe destacar que la obtención de las raíces de las funciones *det1* y *menor pivote* utilizando más de dos puntos alrededor de las singularidades resulta una tarea numérica de gran dificultad debido a sus discontinuidades en dichas singularidades. En la Tabla I se calculan los valores de las cargas críticas a través de la interpolación lineal dada en (26) de las distintas funciones de prueba. Se puede observar que dichas funciones obtienen valores muy próximos para la carga crítica. Se contrastan estos valores con los obtenidos en la referencia²³ donde se puede observar la buena aproximación entre los mismos. Asimismo es importante citar que en los ejemplos que se presentan a continuación se observan comportamientos similares de las funciones de prueba descritos en este ejemplo.

Función de prueba	Punto límite A	Punto límite B
Determinante 1	968,310	408,863
Determinante 2	968,375	408,229
Menor autovalor	968,381	408,313
Menor pivote	968,062	408,603
Parámetro de rigidez	968,382	408,312
Wriggers y Simo [1990]	972,900	407,200

Tabla I. Cargas críticas del arco circular biempotrado

Arco circular biarticulado

Se obtuvo la curva carga-desplazamiento conforme se muestra en la Figura 8a utilizando el método de continuación de la respuesta con las siguientes características: la componente vertical del desplazamiento en la clave del arco con una longitud de -5 y una tolerancia para la convergencia de 10^{-5} con un número total de 48 pasos de carga. Se observa que para estas condiciones de borde el arco presenta inestabilidad del equilibrio de dos formas distintas: pandeo antisimétrico con bifurcación de equilibrio a un nivel de carga $P_A = 334.8$ y pandeo simétrico para una carga de $P_B = 974$.

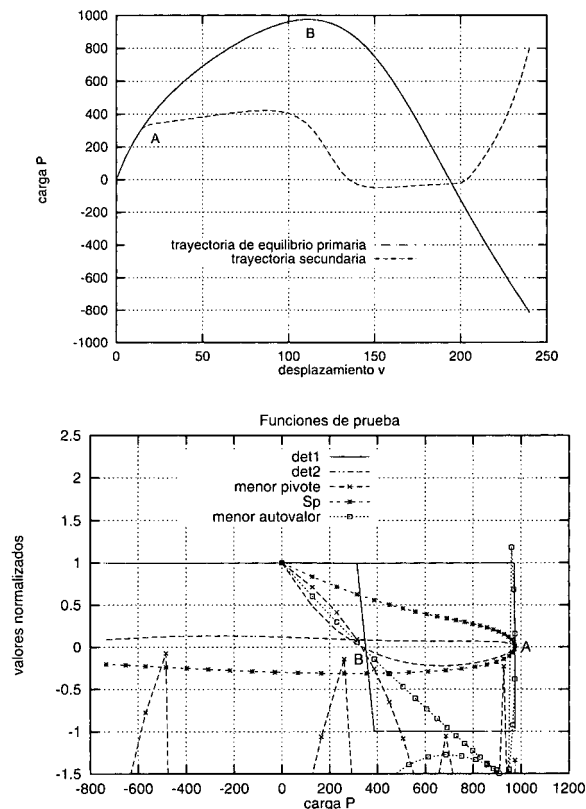


Figure 8. Arco circular biarticulado: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

Se ha obtenido la trayectoria de equilibrio secundaria (bifurcada) activando las ecuaciones (36) y (37), suponiéndose $\tau = 100$, cuando la función (32) alcanzó un valor menor que $TOL \leq 10^{-1}$. De esta manera se añadió al estado deformacional $\dot{\mathbf{v}}$ (correspondiente a un factor de carga $\bar{\lambda} = 3,04$) el autovector ϕ_j asociado a $\omega_j = 0$ en (27a).

Se muestran en la Figura 8b las funciones de pruebas. Se nota que las funciones *det1*, *menor pivote* y *menor autovalor* presentan discontinuidades. La función *menor pivote* no detecta el punto límite (B). En el punto de bifurcación A el parámetro de rigidez toma valor diferente de cero. En la Tabla II se obtienen los valores de las cargas críticas a través de dichas funciones. Se comparan estos resultados con los obtenidos en la referencia²³ para la carga de pandeo. Se puede observar la buena aproximación entre los mismos.

Función de prueba	Punto de bifurcación A	Punto límite B
Determinante 1	350,185	974,101
Determinante 2	337,039	974,343
Menor autovalor	334,817	974,359
Menor pivote	332,901	---
Parámetro de rigidez	---	974,359
Wriggers y Simo [1990]	334,900	---

Tabla II. Cargas críticas del arco circular biarticulado

Arco circular empotrado y articulado

Para estas condiciones de borde el arco presenta sólo puntos límite (A y B) conforme se muestra en la curva carga-desplazamiento en la Figura 9a.

La pérdida de rigidez (punto A) se caracteriza por una deformada antisimétrica después de sufrir la estructura grandes desplazamientos y grandes rotaciones. Se observa en la trayectoria de equilibrio primaria la fuerte no linealidad de la respuesta del arco en la fase postcrítica. Para resolver este problema se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características: ecuación de restricción en *planos normales* con una longitud de arco de 29,1; $TOL = 10^{-5}$ y con 40 incrementos de carga.

En la Figura 9b se muestran las funciones de pruebas. Se nota que las funciones *det1* y *menor pivote* presentan discontinuidades. En la Tabla III se obtienen los valores de las cargas críticas a través de dichas funciones. Se comparan estos resultados con lo obtenidos en la referencia²² para la carga crítica correspondiente al punto A. Se puede observar la buena aproximación entre los mismos.

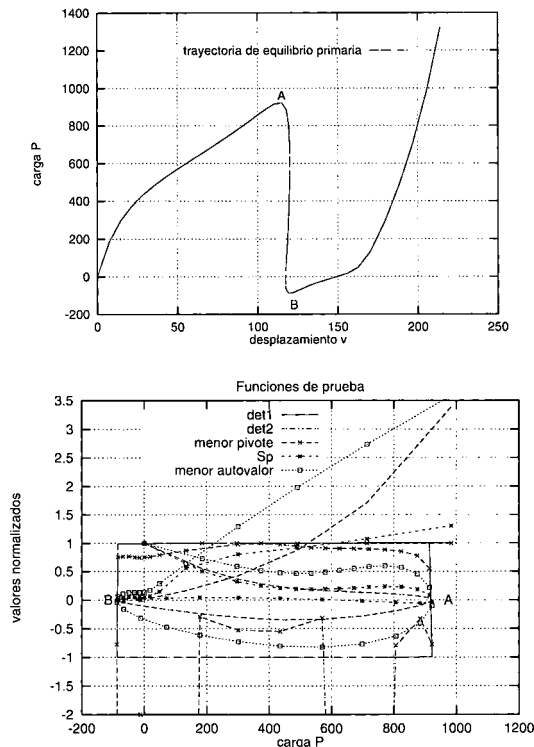


Figure 9. Arco circular empotrado y articulado: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

Función de prueba	Punto límite A	Punto límite B
Determinante 1	917,990	-86,056
Determinante 2	919,052	-86,551
Menor autovalor	919,349	-86,599
Menor pivote	917,339	-86,034
Parámetro de rigidez	919,894	-86,851
Wood y Zienkiewicz [1977]	924,000	---

Tabla III. Cargas críticas del arco circular empotrado y articulado

Columna de Euler

En este ejemplo se discute la inestabilidad del equilibrio de la columna de Euler. Las características geométricas y las propiedades mecánicas se muestran la Figura 10. Se discretiza dicha estructura con 20 elementos de viga de Timoshenko C^0 . Para este ejemplo existe un infinito número de cargas críticas y ramas secundarias de equilibrio dados por la siguiente expresión

$$P_{crit_n} = n^2 \frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{38}$$

donde n denota el modo de pandeo asociado con P_{crit_n} . Se han calculado las cuatros primeras cargas críticas y el modo de pandeo asociado a la primera carga crítica. Para ello se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características: ecuación de restricción en *planos ortogonales* con una longitud de arco de 0,5; $TOL = 10^{-5}$ y con 90 pasos de carga. En la Figura 10a se muestran las trayectorias de equilibrio primaria y secundaria (asociada a la primera carga crítica). Una vez que el modo de pandeo está asociado con los desplazamientos laterales, se deben asignar valores pequeños a τ_j en las ecuaciones (36) y (37), por ejemplo $\tau = 0,1$. Se han activado dichas ecuaciones para un factor de carga $\lambda = 2,4$.

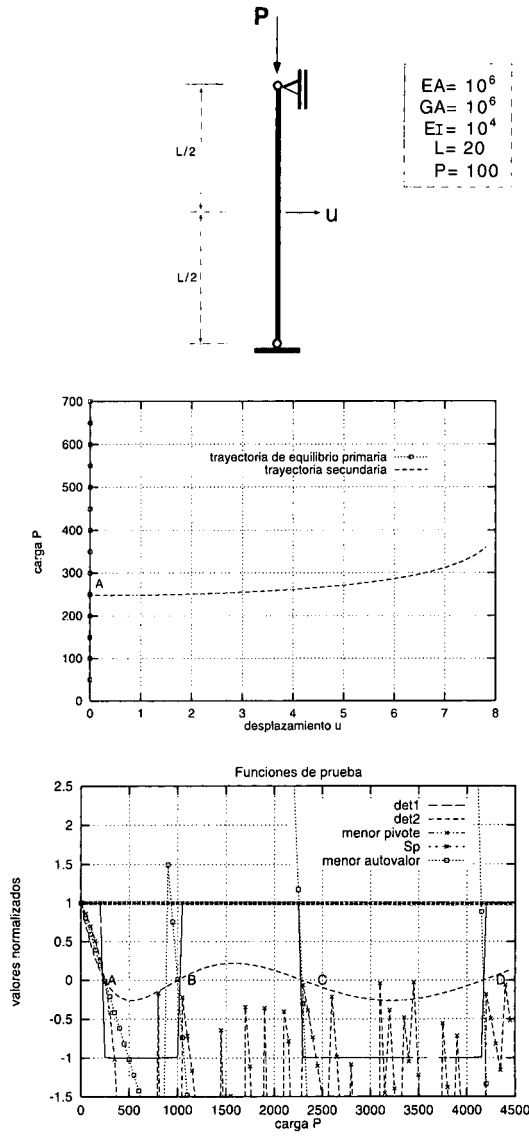


Figure 10. Columna de Euler: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

En la Figura 10b se muestra la evolución de las *funciones de prueba* a lo largo de la trayectoria de equilibrio primaria. Se puede observar que las funciones *det1*, *menor pivote* y *menor autovalor* presentan discontinuidades siendo que la función *menor pivote* no fue capaz de detectar los puntos B, C y D. Por otro lado, el *parámetro de rigidez* toma valores

distintos de cero en todos los puntos de bifurcación. De acuerdo con las definiciones dadas en (35) se puede clasificar los puntos singulares A , B , C e D como puntos de bifurcación. En la Tabla IV se calculan los valores de las cargas críticas a través de la interpolación lineal dada en (26) de las distintas funciones de prueba. Se puede observar que dichas funciones obtienen valores muy próximos para la carga crítica. Se contrastan estos valores con los obtenidos en (38) donde se puede observar la buena aproximación entre los mismos.

Función de prueba	P. bifur. A	P. bifur. B	P. bifur. C	P. bifur. D
Determinante 1	225,049	1024,903	2274,993	4174,933
Determinante 2	247,860	1000,422	2289,642	4169,827
Menor autovalor	247,574	1000,412	2289,648	4169,902
Menor pivote	247,238	—	—	—
Parámetro de rigidez	—	—	—	—
Solución analítica	246,740	986,960	2220,661	3947.842

Tabla IV. Cargas críticas de la columna de Euler

Viga William's toggle

Este problema consiste de dos vigas, planas e inclinadas, unidas rígidamente y empotradas en ambas extremidades. La carga P es aplicada en la clave de la estructura. La geometría y las propiedades físicas se muestran en la Figura 11. Se ha discretizado esta estructura con 5 elementos de viga de Timoshenko C^0 por cada miembro.

Para obtener la trayectoria primaria de equilibrio se ha adoptado el método de control de la respuesta con las siguientes características: control de la componente vertical del desplazamiento de la clave con longitud de $-0,025$; $TOL = 10^{-5}$ y 29 pasos de carga. La curva carga-desplazamiento se muestra en la Figura 11a. Se puede observar la pérdida de rigidez de la estructura en el punto A y el consecuente *rebote hacia adelante*.

En la Figura 11b se muestra la evolución de las *funciones de prueba* a lo largo de la trayectoria de equilibrio primaria. Se puede observar que las funciones *det1* y *menor pivote* presentan discontinuidades en las proximidades de los puntos singulares A y B.

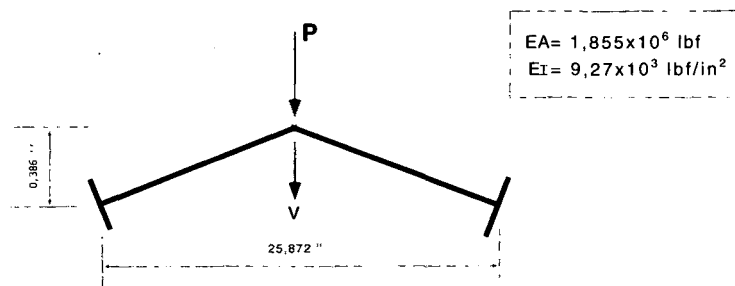


Figure 11. Continuación

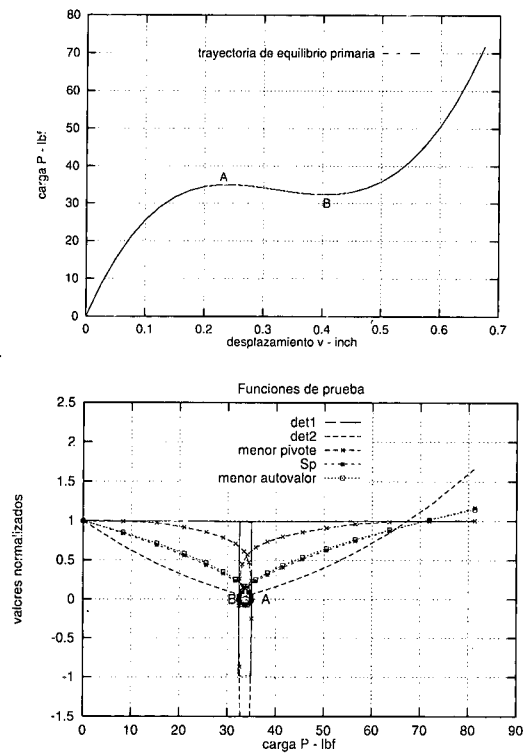


Figure 11. Viga William's toggle: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

En la Tabla V se calculan los valores de las cargas críticas a través de la interpolación lineal dada en (26) de las distintas funciones de prueba. Se puede observar que dichas funciones obtienen valores muy próximos para la carga crítica.

Función de prueba	Punto límite A (lbf)	Punto límite B (lbf)
Determinante 1	34,957	32,391
Determinante 2	34,963	32,348
Menor autovalor	34,962	32,349
Menor pivote	34,957	32,359
Parámetro de rigidez	34,962	32,349

Tabla V. Cargas críticas de la viga William's toggle

Pórtico de Lee

Este ejemplo consiste de la unión de una viga y una columna formando entre sí un ángulo recto. Sus extremidades están apoyadas a través de vínculos de segundo género. Las características geométricas y propiedades físicas se muestran en la Figura 12. La inestabilidad del equilibrio para este caso ocurre después que la estructura sufre grandes desplazamientos conforme se muestra en la Figura 12a. La estructura pierde su capacidad portante en el punto A. La respuesta en la fase postcrítica se caracteriza por un *rebote hacia atrás* conforme se observa en la Figura 12a. Para obtener la respuesta de la estructura se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características: ecuación de restricción cilíndrica con una longitud de arco de 12,5; TOL = 10^{-5} y 52 incrementos de carga.

En la Figura 12b se muestra la evolución de las *funciones de prueba* a lo largo de la trayectoria de equilibrio primaria. Se puede observar que las funciones *det1* y *menor pivote* presentan discontinuidades en las proximidades de los puntos singulares A y B.

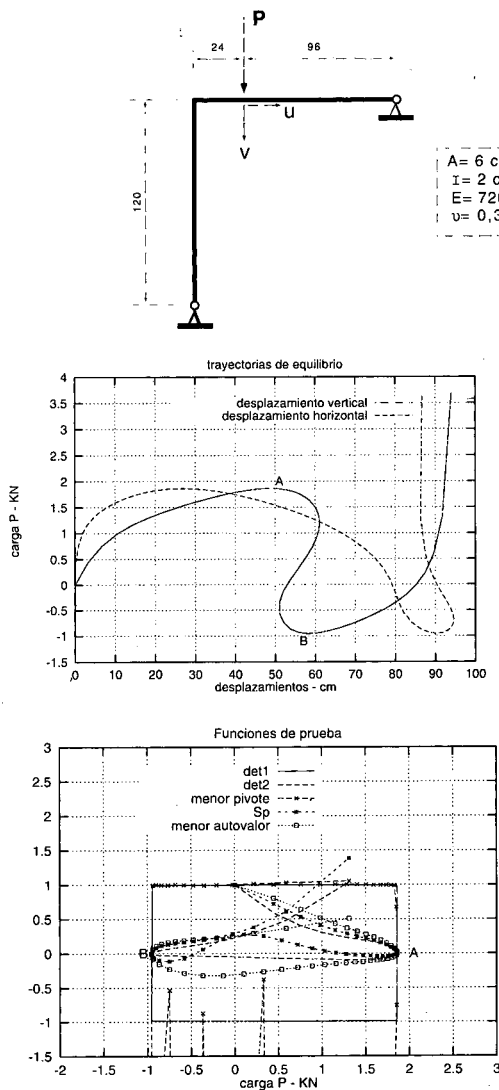


Figure 12. Pórtico de Lee: a) Trayectoria de equilibrio; b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

En la Tabla VI se calculan los valores de las cargas críticas a través de la interpolación lineal dada en (26) de las distintas funciones de prueba. Se puede observar que dichas funciones obtienen valores muy próximos para la carga crítica. Se constatan estos valores con los obtenidos en la referencia¹⁶ para la carga crítica correspondiente al punto A. Se puede observar la buena aproximación entre los mismos.

Función de prueba	Punto límite A (KN)	Punto límite B (KN)
Determinante 1	1,8587	-0,9477
Determinante 2	1,8621	-0,9536
Menor autovalor	1,8621	-0,9534
Menor pivote	1,8622	-0,9537
Parámetro de rigidez	1,8621	-0,9535
Schweizerhof y Wriggers [1986]	1,8510	--

Tabla VI. Cargas críticas del pórtico de Lee

CONCLUSIONES

En este trabajo se han propuesto distintas *funciones de prueba* para detectar y clasificar las singularidades en la trayectoria primaria de equilibrio de diversas tipologías estructurales tales como vigas, pórticos y arcos. Cabe destacar que la característica más importante en la aplicación numérica de las *funciones de prueba* es la sencillez en la implementación de dichas funciones en un código del método de los elementos finitos. Por otro lado, aunque se ha utilizado la interpolación lineal para el cálculo de las cargas críticas, se han obtenido buenos resultados utilizando estas funciones. Naturalmente, si se desean obtener resultados aún más refinados utilizando la interpolación lineal es necesario adoptar longitudes de arco más pequeñas. De esta manera no hace falta adoptar una interpolación no lineal tomando más puntos en la trayectoria de equilibrio. Una vez que el interés en el área de la ingeniería estructural es el conocimiento de la capacidad portante de la estructura aún en la fase precrítica, es decir el cálculo de la primera carga crítica, la función de prueba más sencilla y sin coste computacional para efectuar dicho cálculo, es la función *menor pivote*. Con relación al cálculo de ramas secundarias de equilibrio el algoritmo adoptado en este trabajo han obtenido resultados con éxito. La gran ventaja de este algoritmo es su sencillez frente a los más potentes existentes en el contexto del análisis de inestabilidad del equilibrio.

REFERENCIAS

- 1 P.G Bergan, G. Horrigmore, B. Krakeland y T.H. Soreide, "Solution techniques for non-linear finite element problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 1677-1696, (1978).
- 2 K.K Choong y Y. Hangai, "Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures", *Bulletin of IASS*, Vol. **34**, 112, pp. 133-149, (1993).

- 3 M.A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through", *Computers & Structures*, Vol. **13**, pp. 55-62, (1981).
- 4 L.A. Crivelli, A total-lagrangian beam element for analysis of nonlinear space structures, Ph.D. Thesis, College of Engineering, University of Colorado, Boulder, (1991).
- 5 L.A. Crivelli y C. Felippa, "A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **36**, pp. 3647-3673, (1993).
- 6 M. Fafard y B. Massicotte, "Geometrical interpretation of the arc-length method", *Computers & Structures*, Vol. **46**, nº 4, pp. 603-615, (1993).
- 7 C. Felippa, L.A. Crivelli y B. Haugen, "A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements", *Archives of Comp. Meth. in Engng.*, Vol. **1**, nº 1, pp. 1-48, (1994).
- 8 C.A. Felippa y G. Skeie, "Detecting and traversing bifurcation points in nonlinear structural analysis", *Int. J. of Space Structures*, Vol. **6**, 2, pp. 77-98, (1991).
- 9 I. Fried, "Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **47**, pp. 283-297, (1984).
- 10 R. Kouhia y M. Mikkola, "Strategies for structural stability analysis", *Advances in finite element technology*, Edited by: Nils - Erik Wiberg, CIMNE, Barcelona, Spain, (1995).
- 11 R.W. Ogden, "*Non-linear elastic deformations*", Ellis Horwood, Chichester, (1984).
- 12 E. Ramm, "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points", *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* W. Wunderlich, E. Stein y K.J. Bathe ((Eds.), pp. 63-89, Springer-Verlag, (1981).
- 13 E. Ricks, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *J. Appl. Mech.*, Vol. **39**, pp. 1060-1066, (1972).
- 14 E. Ricks, "Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **47**, pp. 219-259, (1984a).
- 15 E. Ricks, "Bifurcation and stability. A numerical approach", *Innovative methods for nonlinear problems*, W.K. Liu, T. Belytschko y K.C. Park (Eds.), Pineridge Press, pp. 103-133, (1984b).
- 16 K.H. Schweizerhof y P. Wriggers, "Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis", *Com. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **59**, pp. 261-279, (1986).
- 17 R. Seydel, "*Practical bifurcation and stability analysis: From Equilibrium to Chaos*", 2ª edición, Springer-Verlag, (1994).
- 18 J.C. Simo, P. Wriggers, K.H. Schweizerhof y R.L. Taylor, "Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **23**, pp. 779-800, (1986).
- 19 E. Stein, A. Berg y W. Wagner, "Different levels of nonlinear shell theory in finite element stability analysis", *Buckling of Shells*, E. Ramm (Ed.), Springer-Verlag, (1982).
- 20 W. Wagner, "A path-following algorithm with quadratic predictor", *Computers & Structures*, Vol. **39**, nº 3/4, pp. 339-348, (1991).
- 21 W. Wagner y P. Wriggers, "A simple method for the calculation of postcritical branches", *Engng. Comput.*, Vol. **5**, pp. 103-109, (1988).
- 22 R.D. Wood y O.C. Zienkiewicz, "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", *Computers & Structures*, Vol. **7**, pp. 725-735, (1977).
- 23 P. Wriggers y J.C. Simo, "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **30**, pp. 155-176, (1990).