

Identificación modal mediante ajuste local de la respuesta

L. M. Villa

Identificación modal mediante ajuste local de la respuesta

L. M. Villa

Publicación CIMNE N°-271, Julio 2005

A mis padres

José Antonio Villa Ríó

María de las Mercedes García Riera

Luis Manuel Villa García

e-mail: villa@uniovi.es

web: www.epsig.uniovi.es

Natural de Gijón (Principado de Asturias), Técnico Auxiliar - F.P. I en Construcciones Metálicas, Técnico Especialista - F.P. II en Calderería en Chapa Estructural, ambas por la Fundación RevillaGigedo de Gijón, Ingeniero Técnico Industrial en Estructuras e Instalaciones Industriales por la E.U.I.T.I. de Gijón e Ingeniero Industrial en Construcción por la E.T.S.I.I. de Gijón. Ha sido distinguido con los siguientes galardones en el ámbito de la Innovación Tecnológica, y la Divulgación Científica y Técnica; referentes -todos ellos- a la construcción y más concretamente a la dinámica estructural:

- Premio ***“A Coruña”***, Consejo General de Colegios Oficiales de Ingenieros T. Industriales.
- ***“Premio Extraordinario de Innovación Tecnológica”*** -accésit- Fundación Técnica Industrial.
- Premio ***“Principado de Asturias”***, Colegio Oficial de Ingenieros T. Industriales del Principado de Asturias.
- Premio Asociación de Ingenieros de ***Gipuzkoa***.

Durante algunos años desarrolla su actividad profesional en empresas dedicadas a la fabricación de transformados metálicos, bienes de equipo, calderería pesada y montajes. Actualmente es profesor de la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón y participa en diversos proyectos de investigación y contratos con empresas, relativos al análisis dinámico de estructuras. Su línea de investigación se centra en la Aplicación de Técnicas de Optimización a la Determinación de Parámetros Modales por el Método de Identificación. Ha publicado numerosos artículos científicos y técnicos, y es autor del libro ***“Diseño y Análisis Sismorresistente de Estructuras de Edificación”***.

P r e s e n t a c i ó n

La identificación modal, es un proceso de estimación de parámetros modales a partir de mediciones de vibración, obtenidas en diferentes puntos de una estructura. La importancia de dichos parámetros reside, en que describen las propiedades dinámicas de la estructura bajo estudio. Como las mismas están directamente relacionadas con la masa y rigidez del sistema, los resultados obtenidos experimentalmente suministran información acerca de estas dos propiedades físicas de la estructura.

En el análisis modal tradicional, los parámetros modales son obtenidos por ajuste del modelo sobre funciones de respuesta en frecuencia, las cuales relacionan fuerzas de excitación y vibración de la respuesta. En el *Ajuste Local de la Respuesta*, la identificación modal se realiza -a partir de mediciones exclusivamente de la respuesta- para cada modo por separado, en un rango de frecuencias de interés, considerando que en las proximidades de una frecuencia natural sólo un número muy limitado de modos contribuye significativamente al resultado (normalmente uno o dos).

El objetivo principal de este trabajo, es contribuir al avance del conocimiento y de la estimación y validación de los parámetros modales, que permiten caracterizar sistemas y estructuras en su comportamiento bajo sollicitaciones dinámicas, mediante la incorporación de técnicas de optimización.

Las exigencias de seguridad en las construcciones, se han incrementado en las últimas décadas, por lo que es necesario realizar un detallado estudio dinámico de las

mismas. La *Identificación Modal Mediante Ajuste Local de la Respuesta*, constituye una alternativa -como se verá- muy ventajosa, para el cálculo de las características modales de las construcciones, según la Norma de Construcción Sismorresistente NCSE-2002, en la actualidad vigente en España.

En toda la obra el enfoque es predominantemente práctico, pero sin descuidar el rigor conceptual.

Una vez concluida la introducción al trabajo, la exposición de la metodología analizada y el empleo de la misma, se ilustra a través de un ejemplo de aplicación, para posteriormente finalizar con las conclusiones generales del mismo.

La audiencia a la que se dirige la presente obra es amplia, y está constituida por todo tipo de técnicos involucrados en el diseño y análisis de estructuras. Puede utilizarse como libro de referencia o consulta, por técnicos que sigan esta línea de investigación emergente, y como libro de texto en asignaturas o cursos de postgrado (master y doctorado).

La presencia del tiempo como variable característica en el fenómeno dinámico y el elevado número de grados de libertad, que son necesarios considerar para definir adecuadamente el movimiento del sistema mecánico o estructural, supone un gran volumen y complejidad de resultados experimentales. Dado el alto número de parámetros a considerar, las técnicas de optimización aportan considerables ventajas en tiempo y en precisión (fiabilidad).

Las *características fundamentales* de la *Identificación Modal Mediante Ajuste Local de la Respuesta* son:

- Permite -incluso midiendo únicamente la respuesta- la determinación de los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa en la situación general de amortiguamiento estructural; es decir la obtención de la matriz modal $[\Phi]$, solucionando de esta forma el problema inverso, desde las mediciones
-

experimentales del modelo de respuesta, hasta el modelo modal. Frente a otros procedimientos, que solo alcanzan a la determinación de valores proporcionales de la respuesta, entre cada uno de los g.d.l. considerados, que componen cada uno de los modos de vibración (matriz $[\Psi]$).

- Es apto para amortiguamiento histerético o estructural.
- Permite realizar análisis dinámicos de grandes estructuras con equipos muy limitados, en los que el número de canales de captación sea mucho menor que el número de grados de libertad con los que se desea definir el movimiento de la estructura.

El *resto* de las *características principales*, son las siguientes:

- Trabaja en el dominio de la frecuencia.
- Método indirecto (a partir de la respuesta, se determina el modelo modal).
- Se aplica a sistemas MGD.L.
- Método *multi output* (MO), se puede aplicar en los casos de:
 - “*natural input*” - *multi output* (NIMO), para el caso en el que las acciones presentes sean las naturales del “ambiente” (peatones, tráfico, viento, etc.).
 - *global* o *single input* - *multi output* (SIMO).
 - *polyreference* o *multi input* - *multi output* (MIMO).

Es decir, la excitación puede ser nula, única (en un grado de libertad), o múltiple (en varios grado de libertad), respectivamente.

- Estimación de parámetros: local (frecuencias naturales y matriz modal $\omega_r, [\Phi]$).
- Modos de vibración complejos. Ahora bien, esto depende de los datos de partida; si los mismos se corresponden con un caso de amortiguamiento proporcional, los modos de vibración serían, evidentemente, reales (idénticos a la situación sin amortiguamiento).

Cualquier información adicional acerca de la presente obra, puede solicitarse escribiendo directamente al autor, a la dirección de correo electrónico villa@uniovi.es

Finalmente, no puedo dejar de agradecer a mi familia, las horas que les he robado dedicándolas a escribir estas páginas que, pese a todas sus imperfecciones, están escritas con la ilusión y la esperanza de que sean útiles.

Luis Manuel Villa García

Gijón, Principado de Asturias. Mayo de 2005.

Indice

Lista de símbolos

Capítulo 1. Introducción

- 1.1. Introducción general
- 1.2. Objetivos
- 1.3. Estructura del trabajo
- 1.4. Fundamentos de análisis modal
 - 1.4.1. Frecuencias naturales y modos propios
 - 1.4.2. Análisis de la respuesta de sistemas MDOF frente a excitaciones forzadas
 - 1.4.3. Representación y propiedades de las FRF de los sistemas MDOF
 - 1.4.3.1. Representación gráfica de las FRF de los sistemas MDOF
 - 1.4.4. Modelos dinámicos
- 1.5. Ejemplo ilustrativo
 - 1.5.1. Generación de datos numéricos
 - 1.5.2. Modelo estructural
 - 1.5.2.1. Tipología de la excitación
 - 1.5.3. Características del lenguaje de optimización
- 1.6. Estado del arte
 - 1.6.1. Características principales de los métodos de estimación de parámetros modales
 - 1.6.2. Métodos en el dominio de la frecuencia con amortiguamiento estructural

Capítulo 2. Ajuste local de la respuesta

- 2.1. Introducción
 - 2.2. Obtención de parámetros modales
 - 2.2.1. Ejemplo 2.1
-

Capítulo 3. Conclusiones generales

Anexo 1. Modelo espacial del ejemplo 2.1

Anexo 2. Fichero de entrada GAMS para el ejemplo 2.1

Anexo 3. Solución del modelo espacial del ejemplo 2.1 (problema directo)

Referencias bibliográficas

En este apéndice se incluye la notación principal usada en el presente trabajo. Se ha intentado que la misma sea lo más consistente posible a lo largo del mismo. En primer lugar, se da la lista de notación en la que se utilizan letras griegas mayúsculas, seguida de las griegas minúsculas, para continuar con las latinas mayúsculas y finalizar con las latinas minúsculas.

Griegas mayúsculas

$\{\Psi_r\}$	modo de vibración (autovector) correspondiente al modo r.
$\{\Phi_r\}$	modo de vibración (autovector) correspondiente al modo r normalizado con respecto a la masa.
$[\Psi]$	matriz modal.
$[\Phi]$	matriz modal normalizada con respecto a la masa.
Φ_{jr}	componente de la matriz modal (normalizada respecto de la matriz de masa) para la fila j y columna (modo) r.
$\Phi_{R jr}$	componente de la matriz modal (normalizada respecto de la matriz de masa) para la fila j y columna (modo) r (parte real).
$\Phi_{I jr}$	componente de la matriz modal (normalizada respecto de la matriz de masa) para la fila j y columna (modo) r (parte compleja).
$\Psi_{R jr}$	componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte real).
$\Psi_{I jr}$	componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte compleja).

Griegas minúsculas

${}_r\phi_{jk}$	argumento del residuo o cte. modal.
ω_r	frecuencia natural sin amortiguar correspondiente al modo r.
η_r	factor de pérdida por amortiguamiento correspondiente al modo r.

λ_r^2	autovalor para el caso de amortiguamiento histerético.
ε, ν	constantes reales.
$[\alpha(\omega)]$	matriz NxN de receptancia del sistema.
α_{jk}	componente de la matriz NxN de receptancia del sistema, para la fila j y la columna k.
$\gamma_{R\ i\ cd}$	coeficiente de participación modal (parte real) para el modo r, a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
$\gamma_{I\ i\ cd}$	coeficiente de participación modal (parte compleja) para el modo r, a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
$\varepsilon_{R\ ij\ cd}$	error asociado con el dato i (parte real), para el desplazamiento en el g.d.l. j, perteneciente al conjunto de datos cd.
$\varepsilon_{I\ ij\ cd}$	error asociado con el dato i (parte compleja), para el desplazamiento en el g.d.l. j, perteneciente al conjunto de datos cd.
$\varepsilon_{Id_R\ rs}$	error en el ajuste (parte real), de cada componente de la matriz identidad [I].
$\varepsilon_{Id_I\ rs}$	error en el ajuste (parte compleja), de cada componente de la matriz identidad [I].

Latinas mayúsculas

${}_r A_{jk}$	módulo del residuo o cte. modal.
$\overline{{}_r A_{jk}}$	residuo o cte. modal.
[C]	matriz de amortiguamiento viscoso.
C_{rR}	complemento residual (parte real).
C_{rI}	complemento residual (parte compleja).
[D]	matriz de amortiguamiento histerético.
{F}	vector de Nx1 amplitudes de fuerza.
$F_{R\ k}$	fuerza de excitación en el g.d.l. j (parte real).

F_{I_k}	fuerza de excitación en el g.d.l. j (parte compleja).
FRF	función de respuesta en frecuencia.
$[I]$	matriz identidad.
$I_{R_{rs}}$	componente de la matriz identidad (parte real).
$I_{I_{rs}}$	componente de la matriz identidad (parte compleja).
$[K]$	matriz de rigidez.
$[M]$	matriz de masa.
MDOF	sistema de múltiples grados de libertad.
SDOF	sistema de un grado de libertad.
N	número de coordenadas incluidas en un modelo y/o número de modos considerados.
$\{\bar{X}\}$	vector de Nx1 amplitudes de respuesta.
$X_{R_{ji\ cd}}$	estimación de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte real), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
$X_{I_{ji\ cd}}$	estimación de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte compleja), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.

Latinas minúsculas

$aux_{R_{kr}}$	variable auxiliar (parte real), para el cálculo de $[M] \{\Phi_r\}$.
$aux_{I_{kr}}$	variable auxiliar (parte compleja), para el cálculo de $[M] \{\Phi_r\}$.
$dato_{R_{ij\ cd}}$	magnitud de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte real), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
$dato_{I_{ij\ cd}}$	magnitud de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte compleja), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
$\{f(t)\}$	vector de Nx1, de fuerzas aplicadas en función del tiempo.
$[k_r]$	matriz de rigidez modal (diagonal).
$[m_r]$	matriz de masa modal (diagonal).

$m_{R kj}$	componente de la matriz de masa concentrada (parte real).
n	número de muestras o de puntos.
$\{q_{(t)}\}$	vector de $N \times 1$, de transformación de coordenadas del movimiento en función del tiempo.
$\{x_{(t)}\}$	vector de $N \times 1$, coordenadas del movimiento en función del tiempo.
q, r, s	índices de número de modo.
j, k	índices de números de filas y columnas.
z	función objetivo.

CAPITULO 1

Introducción

1.1. Introducción general

El ajuste local de la respuesta es un método para la identificación modal de grandes estructuras de ingeniería civil, como puentes, edificios, plataformas petrolíferas y presas. El algoritmo permite estimar frecuencias naturales y los correspondientes modos de vibración asociados, desde mediciones -exclusivamente- de la respuesta.

Entre sus *aplicaciones* destacan:

- La fundamental, que consiste en la identificación modal a partir de mediciones -exclusivamente- de la respuesta, como se ha mencionado.
- Identificación modal de estructuras sujetas a excitación ambiente y condiciones reales de operación.
- Identificación modal sin ningún tipo de excitación artificial.
- Validación de estimaciones modales.
- Constituye una alternativa -como se verá- muy ventajosa, para el cálculo de las características modales de las construcciones, según la normativa española NCSE-2002.

La norma de construcción sismorresistente NCSE-2002 (parte general y edificación) en lo que se refiere al cálculo dinámico, a través del análisis mediante espectros de respuesta, prescribe (apartado 3.6.2.3.2), que el cálculo de las características modales de la construcción se realice -preferentemente y por orden de preferencia- a partir de:

- Ensayos sobre construcciones de características iguales o semejantes a las que se considera.
 - Ensayos sobre modelos de la construcción considerada.
 - Procedimientos teóricos de la Mecánica Estructural.
 - Fórmulas aproximadas o empíricas (como las que aparecen en los epígrafes 3.7.2.2 y 3.7.3.2 de la citada normativa)
-

La identificación modal, es un proceso de estimación de parámetros modales a partir de mediciones de vibración, obtenidas en diferentes puntos de una estructura. La importancia de dichos parámetros reside, en que describen las propiedades dinámicas de la estructura bajo estudio. Como las mismas están directamente relacionadas con la masa y rigidez del sistema, los resultados obtenidos experimentalmente suministran información acerca de estas dos propiedades físicas de la estructura.

En el análisis modal tradicional, los parámetros modales son obtenidos por ajuste del modelo sobre funciones de respuesta en frecuencia, las cuales relacionan fuerzas de excitación y vibración de la respuesta. En el ajuste local de la respuesta, la identificación modal se realiza para cada modo por separado, en un rango de frecuencias de interés, considerando que en las proximidades de una frecuencia natural sólo un número muy limitado de modos contribuye significativamente al resultado (normalmente uno o dos).

Los ensayos modales en los que se mide únicamente la respuesta son utilizados en estructuras de ingeniería civil y grandes sistemas mecánicos -incluso en operación- en las que no es fácil excitarlas artificialmente; y son a menudo cargadas por solicitaciones naturales (ambientales), que no pueden fácilmente ser controladas o medidas; ejemplos de las mismas, lo constituyen las cargas de viento sobre edificios, olas de mar actuando sobre estructuras offshore, y cargas de tráfico sobre puentes. En tales casos, es una ventaja medir solamente la respuesta natural (o ambiental) y estimar los parámetros modales realizando una identificación modal a través del ajuste local de la respuesta; en lugar de cargar la estructura artificialmente y considerar la carga natural como una fuente de ruido no deseado, que mas tarde es usada en el proceso de cálculo.

Las principales *ventajas* de esta técnica son:

- El ensayo consume menos tiempo y es mucho más económico, ya que el equipo para excitar la estructura no es necesario.
 - El ensayo no interrumpe la operación de la estructura.
 - La respuesta medida es representativa de las condiciones reales de operación de la estructura.
-

-
- Con equipos muy limitados (n° de canales mucho menor que el n° de g.d.l. en que se desea medir) permite abordar el estudio dinámico de una gran estructura manteniendo un sensor fijo (de referencia) en todas las mediciones.
 - Apto para amortiguamiento estructural o histerético.
 - A su vez, el rango de medida puede ser también muy limitado, en las proximidades de una frecuencia o modo de vibración de interés.
 - Determinación de los modos de vibración complejos normalizados respecto de la matriz de masa.
 - Da una primera estimación de cada modo de interés muy rápida (tiempo de cálculo en ordenador), a partir de medidas únicamente de la respuesta en unos pocos grados de libertad.

Con anterioridad al ensayo se debe seleccionar un sensor de referencia (posición fija) en cada dirección en que se desee medir, y mover los restantes a través de la estructura (con lo que se crean varios conjuntos de datos) hasta que las respuestas de vibración se midan en todos los grados de libertad de interés. El utilizar múltiples conjuntos de datos permite al usuario obtener una buena resolución espacial de los modos de vibración con un limitado número de sensores

La presencia del tiempo como variable característica en el fenómeno dinámico y el elevado número de grados de libertad, que son necesarios considerar para definir adecuadamente el movimiento del sistema mecánico o estructural, supone un gran volumen y complejidad de resultados experimentales que, en general, se recogen como funciones de respuesta en frecuencia (FRF) a partir de las cuales se estiman los parámetros modales, es decir, los polos, frecuencias amortiguadas, coeficientes de amortiguamiento, modos de vibración y factores de participación modal. Existe una variedad de métodos, según que propongan una estimación en base a uno o a múltiples grados de libertad, o que se lleven a cabo en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Dado el alto número de parámetros a considerar, las técnicas de optimización aportan considerables ventajas en tiempo y en precisión (fiabilidad).

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo, es contribuir al avance del conocimiento y la mejora de métodos para la estimación y validación de los parámetros modales, que permiten caracterizar sistemas y estructuras en su comportamiento bajo solicitaciones dinámicas, mediante la incorporación de técnicas de optimización.

1.3. Estructura del trabajo

La aplicación de *técnicas de optimización*, para la *determinación de parámetros modales* por el *método de identificación*, que se exponen en el presente trabajo, se ciñen exclusivamente a:

- sistemas con amortiguamiento histerético o estructural,
- niveles de amortiguamiento bajos (generalmente menores de un 10 % que son los que se presentan en las grandes estructuras), y
- dominio de la frecuencia.

Una vez concluida la introducción al trabajo, la exposición de la metodología analizada y el empleo de la misma, se ilustra a través de un ejemplo de aplicación, para posteriormente finalizar con las conclusiones generales del mismo.

Como se tendrá ocasión de comprobar, un aspecto de gran interés reside en que el ajuste local de la respuesta permite -incluso midiendo únicamente la respuesta- la determinación de los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa, en la situación general de amortiguamiento estructural, frente a otros procedimientos, que se limitan a la determinación de valores proporcionales de la respuesta.

1.4. Fundamentos de análisis modal

Las estructuras reales son sistemas elásticos no homogéneos y continuos que poseen un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, su análisis siempre conlleva una aproximación que consiste en describir su comportamiento a través del uso de un número finito de grados de libertad, tantos como sean necesarios para asegurar suficiente exactitud. Una adecuada elección de las coordenadas del movimiento, corresponde sin embargo a una decisión inicial que el analista debe tomar, lo cual es de fundamental importancia ya que el éxito del análisis posterior depende de ello.

Usualmente, las estructuras continuas no homogéneas, son descritas como sistemas de masas concentradas de múltiples grados de libertad (MGDL). Es conveniente recordar que los grados de libertad de un sistema, son el número de coordenadas independientes necesarias para describir completamente el movimiento del mismo. Por ejemplo si se considera el modelo de la figura 1.1 que representa un sistema con amortiguamiento viscoso, descrito por su masa, rigidez y propiedades de amortiguamiento, un total de N coordenadas $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) son requeridas para describir la posición de las N masas respecto de su posición de equilibrio estático, y el sistema se dice que posee N grados de libertad.

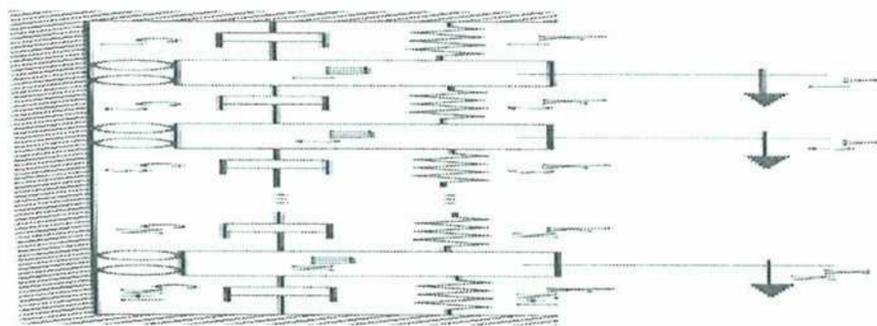


Fig. 1.1 Ejemplo de un modelo con n grados de libertad

Suponiendo que un conjunto de fuerzas externas $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) actúan sobre las masas m_i y estableciendo el equilibrio de fuerzas actuando sobre ellas, el movimiento del sistema se rige por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f_1 \\
m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= f_2 \\
\vdots & \\
m_N \ddot{x}_N - c_N \dot{x}_{N-1} + (c_N + c_{N+1}) \dot{x}_N - k_N x_{N-1} + (k_N + k_{N+1})x_N &= f_N
\end{aligned}
\tag{1.1}$$

Las ecuaciones (1.1) representan un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden, cada una de las cuales requiere dos condiciones iniciales para resolver la respuesta completa en las N coordenadas del movimiento. Es obvio que ninguna ecuación puede ser resuelta por si sola, debido a que están acopladas, es decir, que la respuesta en un único grado de libertad depende de el movimiento en las otras coordenadas. Esta dependencia se expresa por el hecho de que cada ecuación incluye términos relacionados con más de una coordenada. Para resolver el sistema de ecuaciones anterior es conveniente escribirlo en forma matricial:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_N + c_{N+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{Bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_N + k_{N+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

que puede ser condensado en una forma más compacta como:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}
\tag{1.3}$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de orden N de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, que describen las propiedades espaciales de el sistema, $\{x\}$, $\{\dot{x}\}$ y $\{\ddot{x}\}$ son vectores de orden N de aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente, y $\{f\}$ es un vector de orden N que representa las fuerzas aplicadas en función del tiempo.

1.4.1. Frecuencias naturales y modos propios

Cuando un sistema de 1 g.d.l. no amortiguado es sometido a una perturbación inicial permitiéndosele a continuación moverse libremente, el mismo oscila alrededor de su posición de equilibrio estático, lo que puede ser definido como su modo propio de vibración.

Dinámicamente, el sistema ha sido completamente caracterizado a través de una única propiedad, descrita por su propia frecuencia natural de vibración. A continuación se examina lo que sucede en un sistema MDOF.

a) Sistema MDOF no amortiguado

Se comienza por suponer que el sistema es no amortiguado y se considera la solución de vibración libre de (1.3) con lo cual las N ecuaciones simultaneas de (1.4) son homogéneas:

$$[M]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (1.4)$$

Asimismo, se puede apreciar que si $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ representa una solución $\{x\}$ del sistema, entonces $\gamma x_1(t), \gamma x_2(t), \dots, \gamma x_N(t)$ también representa una solución, donde γ es una constante arbitraria distinta de cero. Esto significa que la solución de (1.4) puede ser obtenida sólo en términos de movimiento relativo.

Las soluciones de (1.4) obedecen a la misma ley de variación en el tiempo, y son de la forma:

$$\{x_{(t)}\} = \{\bar{X}\}e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

donde $\{\bar{X}\}$ es un vector de orden N, de amplitudes independientes del tiempo (nótese que incluso se permite a las amplitudes tener componente compleja). Sustituyendo en (1.4), se obtiene

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{\bar{X}\} = \{0\} \quad (1.6)$$

Lo que se presenta en 1.6 es la forma general de un problema de autovalores y autovectores. Ahora, es claro que si una solución $\{\bar{X}\}$ existe, entonces $\gamma \{\bar{X}\}$ -donde γ es una constante arbitraria distinta de cero- es también solución. Pre-multiplicando ambos lados de (1.6) por la inversa de $[[K] - \omega^2 [M]]$, se obtiene

$$[[K] - \omega^2 [M]]^{-1} [[K] - \omega^2 [M]] \{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2 [M]]^{-1} \{0\} \quad (1.7)$$

Si $[[K] - \omega^2 [M]]^{-1}$ existe, $\{\bar{X}\} = \{0\}$, lo que corresponde a la llamada solución trivial de (1.6), que no es de interés porque implica que no hay movimiento en ninguno de los N grados de libertad. Como consecuencia, para la solución no trivial, la inversa de $[[K] - \omega^2 [M]]$ no debe existir, lo que implica:

$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (1.8)$$

(donde 'det' simboliza determinante). Esta es una ecuación algebraica, conocida como la ecuación característica del sistema, que proporciona N posibles soluciones reales positivas $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ también conocidas como los autovalores de (1.6). Los valores $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ son las frecuencias naturales no amortiguadas del sistema.

Sustituyendo cada valor de la frecuencia natural en (1.6) y resolviendo cada uno de los conjuntos resultantes de ecuaciones para $\{\bar{X}\}$, se obtienen N posibles soluciones en forma de vector $\{\Psi_r\}$ ($r = 1, 2, \dots, N$) conocidos como los modos de vibración normales del sistema bajo análisis, cada uno de los cuales representa un autovector del problema.

Cada $\{\Psi_r\}$ contiene N elementos que son magnitudes reales (positivas o negativas) y son únicamente conocidos en términos relativos; es decir, se conoce la dirección de cada vector, pero no su magnitud absoluta.

En términos físicos, se puede decir que nuestro sistema puede de hecho vibrar libremente con movimiento sincronizado, para N valores particulares de la frecuencia ω_r , cada uno de los cuales implica una particular configuración o forma de movimiento libre, descrito por $\{\Psi_r\}$. Para cada frecuencia natural del sistema ω_r existe un modo de vibración $\{\Psi_r\}$ asociado. El subíndice r indica el número de modo, y varía desde 1 a N.

La solución completa en vibración libre se suele representar a través de dos matrices de orden NxN

$$[\omega_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

y

$$[\Psi] = [\{\Psi_1\}\{\Psi_2\}\dots\{\Psi_N\}] \quad (1.10)$$

que contienen una completa descripción de las características dinámicas del sistema. Así pues (1.9) y (1.10) constituyen lo que se conoce como Modelo Modal, y describen el sistema a través de sus propiedades modales (frecuencias naturales y modos de vibración), en oposición al Modelo Espacial en el que el sistema queda descrito a través de sus propiedades espaciales ($[M]$, $[C]$ y $[K]$). $[\Psi]$ es comúnmente conocida como la matriz modal.

Los modos de vibración poseen propiedades muy importantes, llamadas propiedades de ortogonalidad. Tomando (1.6) y dos modos particulares r y s , se puede escribir

$$[[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.11)$$

y

$$[[\mathbf{K}] - \omega_s^2 [\mathbf{M}]] \{\Psi_s\} = \{0\} \quad (1.12)$$

pre-multiplicando (1.11) por $\{\Psi_s\}^T$ se obtiene que

$$\{\Psi_s\}^T [[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.13)$$

Por otra parte, si se toma la traspuesta de (1.12) y se post-multiplica por $\{\Psi_r\}$ resulta

$$\{\Psi_s\}^T [[\mathbf{K}]^T - \omega_s^2 [\mathbf{M}]^T] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.14)$$

lo que equivale a

$$\{\Psi_s\}^T [[\mathbf{K}] - \omega_s^2 [\mathbf{M}]] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.15)$$

debido al hecho de que $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ son simétricas. Combinando (1.13) y (1.15) se deduce

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\Psi_s\}^T [\mathbf{M}] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.16)$$

que para $\omega_r \neq \omega_s$ puede solamente ser satisfecho si

$$\{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_r\} = \{0\}; \quad (r \neq s) \quad (1.17)$$

siguiendo un proceso paralelo con (1.17) y (1.15) se obtiene que

$$\{\Psi_s\}^T [K] \{\Psi_r\} = \{0\}; \quad (r \neq s) \quad (1.18)$$

Finalmente, si se hace $r = s$ y se considera cualquiera de las dos expresiones (1.15) o (1.13) se obtiene

$$\{\Psi_r\}^T [K] \{\Psi_r\} = \omega_r^2 \{\Psi_r\}^T [M] \{\Psi_r\} \quad (1.19)$$

o bien

$$\omega_r^2 = \frac{\{\Psi_r\}^T [K] \{\Psi_r\}}{\{\Psi_r\}^T [M] \{\Psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (1.20)$$

donde k_r y m_r son comúnmente conocidos como la rigidez modal y la masa modal respectivamente, del modo r .

Considerando todas las posibles combinaciones de r y s , se pueden agrupar las propiedades del modelo modal como sigue:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [M] [\Psi] &= [m_r] \\ [\Psi]^T [K] [\Psi] &= [k_r] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Debido a sus propiedades de ortogonalidad, los modos de vibración (autovectores), son linealmente independientes (ningún autovector puede ser obtenido por una combinación lineal de los restantes) por lo que forman una base en el espacio N -dimensional. Como consecuencia, cualquier otro vector en el mismo espacio puede ser expresado como una combinación lineal de los N linealmente independientes modos de

vibración (autovectores). Esta propiedad constituye lo que usualmente se conoce como Teorema de Expansión y es útil cuando se pretende analizar la respuesta de sistemas de MDOF frente a condiciones de fuerza arbitrarias.

Como se ha demostrado, en contraste con las frecuencias naturales, que representan magnitudes fijas y únicas, los modos de vibración se conocen con un factor de escala indeterminado. Debido a ello, k_r y m_r no pueden adoptar valores separadamente sino que estos deben satisfacer la ecuación (1.20). La representación de los resultados de los modos de vibración está siempre sujeta a procedimientos de normalización o escalado previos. Esta normalización consiste a menudo en hacer el mayor elemento de cada autovector igual a la unidad. Sin embargo en análisis modal es bastante común escalar los modos de vibración de la siguiente forma

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I] \quad (1.22)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad (la cual por definición, es diagonal) y $[\Phi]$ es la matriz modal normalizada respecto de la masa, obtenida respecto de los modos de vibración mediante la conversión $\{\Phi_r\} = \gamma_r \{\Psi_r\}$, por lo que de la expresión (1.22) se deduce que

$$\{\Phi_r\}^T [M]\{\Phi_r\} = \{\gamma_r \Psi_r\}^T [M]\{\gamma_r \Psi_r\} = \gamma_r^2 \{\Psi_r\}^T [M]\{\Psi_r\} = 1 \quad (1.23)$$

para cada modo r . Y por tanto que

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\{\Psi_r\}^T [M]\{\Psi_r\}}} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \quad (1.24)$$

En consecuencia, las propiedades de ortogonalidad de la matriz modal pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M][\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K][\Phi] &= [\omega_r^2] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Estas propiedades particulares de la matriz modal pueden aplicarse ventajosamente en la solución de la ecuación (1.4) correspondiente a la vibración libre. Para ello se define la siguiente transformación de coordenadas

$$\{x_{(t)}\} = [\Phi]\{q_{(t)}\} \quad (1.26)$$

y sustituyendo en (1.4)

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}_{(t)}\} + [K][\Phi]\{q_{(t)}\} = \{0\} \quad (1.27)$$

pre multiplicando (1.27) por $[\Phi]^T$

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}_{(t)}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q_{(t)}\} = \{0\} \quad (1.28)$$

y tomando en consideración (1.25), la representación matricial del conjunto de ecuaciones llega a convertirse en

$$\{\ddot{q}_{(t)}\} + [\omega_r^2]\{q_{(t)}\} = \{0\} \quad (1.29)$$

que representa un conjunto de N ecuaciones desacopladas del movimiento, de un grado de libertad cada una de ellas (SDOF). Nótese que si se emplea una matriz modal escalada arbitrariamente $[\Psi]$ se llegaría a

$$[m_r]\{\ddot{q}_{(t)}\} + [k_r]\{q_{(t)}\} = \{0\} \quad (1.30)$$

Como se puede observar, una simple transformación de coordenadas, permite transformar el sistema MDOF en N sistemas independientes de 1 g.d.l. De este modo cada ecuación del movimiento depende solamente de una coordenada $q_i(t)$ que puede ser resuelta separadamente dado que las condiciones iniciales en el nuevo sistema de coordenadas $q_i(t)$ se obtienen mediante la aplicación de la transformación de coordenadas vista, a las condiciones iniciales presentes en el conjunto original de coordenadas $x_i(t)$.

Después de resolver (1.29) o (1.30) en función de $q_i(t)$, la solución final en vibración libre como expresión de $x_i(t)$ se obtiene fácilmente a través de la transformación de coordenadas (1.26).

b) Sistema MDOF amortiguado

Considerando de nuevo el sistema MDOF (figura 1.1) y suponiendo que el mecanismo disipativo es histérico, en lugar de (1.3) se llega a la ecuación

$$[M]\{\dot{x}(t)\} + i[D]\{x(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.31)$$

donde $[D]$ es una matriz de dimensión $N \times N$ de amortiguamiento histerético.

Se parte de la hipótesis de que el amortiguamiento es proporcional, en cuyo caso se debe de cumplir que:

$$[D] = \varepsilon [K] + \nu [M] \quad (1.32)$$

ε y ν son constantes. Suponiendo que existe una solución, de la forma

$$\{x_{(t)}\} = \{\bar{X}\}e^{i\lambda t} \quad (1.33)$$

en la que $\{\bar{X}\}$ es un vector que representa N independientes amplitudes de respuesta, y sustituyendo en la forma homogénea de (1.31), se llega a que

$$[[[K]-\lambda^2[M]]+i[\varepsilon[K]+\nu[M]]]\{\bar{X}\}=\{0\} \quad (1.34)$$

que representa un problema característico de solución compleja, en términos de N autovalores complejos $\{\lambda_r^2\}$ y N autovectores reales $\{\Psi_r\}$ que coinciden con los del caso no-amortiguado, por lo que siguen teniendo la misma interpretación física. Para el caso bajo análisis es también obvio que sus propiedades de ortogonalidad permiten desacoplar las ecuaciones del movimiento. Por consiguiente, se puede relacionar λ_r^2 con las frecuencias naturales del sistema mediante la expresión

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r) \quad (1.35)$$

donde ω_r^2 y η_r son la frecuencia natural y el factor de pérdida por amortiguamiento, respectivamente, para el modo r, ya definidos como

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (1.36)$$

y

$$\eta_r = \varepsilon + \frac{\nu}{\omega_r^2} \quad (1.37)$$

La masa y rigidez modales, m_r y k_r respectivamente, han sido ya definidos con anterioridad en (1.20).

Si se supone un amortiguamiento no proporcional, el correspondiente problema característico da como resultado N autovalores complejos λ_r^2 y N autovectores también

complejos $\{\Psi_r\}$. Debido a que las propiedades de ortogonalidad se siguen manteniendo, λ_r^2 viene dado por la siguiente relación

$$\lambda_r^2 = \frac{\{\Psi_r\}^T [[\mathbf{K}] + i[\mathbf{D}]] \{\Psi_r\}}{\{\Psi_r\}^T [\mathbf{M}] \{\Psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (1.38)$$

k_r y m_r son ahora cantidades complejas, a pesar de lo cual, y como se ha mencionado previamente, las propiedades de ortogonalidad indicadas de (1.25) siguen siendo válidas.

Nuevamente, el cuadrado de la frecuencia natural, va a venir dado por la parte real de λ_r^2 .

1.4.2. Análisis de la respuesta de sistemas MDOF frente a excitaciones forzadas

Volviendo la atención hacia la respuesta forzada de sistemas MDOF, se va a omitir la parte transitoria de la respuesta completa y considerar solamente la componente permanente, para el caso de excitación armónica. Existe un camino directo para deducir las ecuaciones correspondientes. A partir de (1.3), tomando como vector de fuerzas de excitación $\{f_{(t)}\} = \{F\}e^{i\lambda t}$ y como vector de respuesta $\{x_{(t)}\} = \{\bar{X}\}e^{i\lambda t}$, se obtiene

$$\left[[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] + i\omega [\mathbf{C}] \right] \{\bar{X}\}e^{i\lambda t} = \{F\}e^{i\lambda t} \quad (1.39)$$

de donde resulta

$$\{\bar{X}\} = \left[[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] + i\omega [\mathbf{C}] \right]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)] \{F\} \quad (1.40)$$

El mismo razonamiento basado en el modelo histerético, conduciría a

$$\{\bar{X}\} = \left[[K] - \omega^2 [M] + i [D] \right]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)] \{F\} \quad (1.41)$$

donde $[\alpha(\omega)]$ es la matriz cuadrada de orden N de la receptancia del sistema, que contiene toda la información sobre las características dinámicas del mismo. Cada elemento α_{jk} corresponde a una función de respuesta en frecuencia (FRF) individual, que describe la relación entre la respuesta en una coordenada particular j y una única fuerza de excitación aplicada en la coordenada k . La matriz de receptancia constituye otra forma de modelar el sistema y es conocido como el Modelo de Respuesta, como alternativo al Modelo Espacial y al Modelo Modal, ya mencionados.

A pesar de su aparente simplicidad, las ecuaciones (1.40) y (1.41) tienden a ser muy ineficientes para aplicaciones numéricas y su utilidad, a efectos de identificación, es muy limitada. Afortunadamente, es posible deducir expresiones más útiles para $[\alpha(\omega)]$, basadas en las propiedades modales, que tienen la ventaja adicional de suministrar una introducción en la forma de las propiedades de las FRF.

Anteriormente, se ha visto que hay un conjunto de N autovalores complejos λ_r^2 y N autovectores asociados $\{\Psi_r\}$, que satisfacen la ecuación homogénea

$$\left[[K] + i [D] - \lambda_r^2 [M] \right] \{\Psi_r\} = \{0\} \quad (1.42)$$

y que los N autovectores forman un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio N , que poseen propiedades de ortogonalidad. Así pues, cualquier vector en el espacio N , como $\{\bar{X}\}$, puede ser expresado como una combinación lineal de autovectores

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} \quad (1.43)$$

Sustituyendo (1.43) en (1.41) y pre-multiplicando por $\{\Psi_s\}^T$ resulta

$$\{\Psi_s\}^T \left[[K] + i [D] \right] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} - \omega^2 \{\Psi_s\}^T [M] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} = \{\Psi_s\}^T \{F\} \quad (1.44)$$

Tomando ahora en consideración las propiedades de los autovectores, (1.44) se convierte en

$$\gamma_r \{\Psi_r\}^T \left[[K] + i [D] \right] \{\Psi_r\} - \omega^2 \gamma_r \{\Psi_r\}^T [M] \{\Psi_r\} = \{\Psi_r\}^T \{F\} \quad (1.45)$$

o

$$\gamma_r k_r - \omega^2 \gamma_r m_r = \{\Psi_r\}^T \{F\} \quad (1.46)$$

donde k_r y m_r han sido ya definidos en (1.20). En consecuencia

$$\gamma_r = \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\}}{k_r - \omega^2 m_r} \quad (1.47)$$

La sustitución de (1.47) en (1.43) conduce a la definición de la respuesta permanente para amortiguamiento histerético, en términos de modos complejos

$$\{x_{(t)}\} = \{\bar{X}\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r} e^{i\omega t} \quad (1.48)$$

Volviendo a (1.35) y (1.38), se tiene

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)} \quad (1.49)$$

Si interesa extraer un único elemento de la matriz de receptancia, por ejemplo, la respuesta en la coordenada j debido a una única fuerza de excitación aplicada en la coordenada k , lo que significa que el vector $\{F\}$ tiene solamente un elemento distinto de cero, se puede escribir

$$\{\bar{X}_j\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2)} \quad (1.50)$$

o

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2)} \quad (1.51)$$

donde Ψ_{jr} y Ψ_{kr} son los elementos j y k , respectivamente del modo de vibración $\{\Psi_r\}$. De esta manera, se ha deducido a una expresión general para los elementos de la matriz de receptancia, en función de las propiedades modales. En términos físicos, (1.51) puede interpretarse como que la respuesta total, es el resultado de la suma de contribuciones de las respuestas de N sistemas SDOF.

En el caso general de amortiguamiento no proporcional, el numerador de (1.51) es complejo, mientras que en los casos sin amortiguamiento o con amortiguamiento proporcional es una cantidad real. Tomando en consideración los modos de vibración (autovectores) normalizados con respecto a la masa

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{jr} \Phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \quad (1.52)$$

o

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r \bar{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \quad (1.53)$$

donde

$${}_r \bar{A}_{jk} = {}_r A_{jk} e^{i {}_r \phi_{jk}} \quad (1.54)$$

es una cantidad compleja conocida como constante modal o residuo, para la cual se verifica

$${}_r A_{jk} = \left| \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r} \right| = |\Phi_{jr} \Phi_{kr}| \quad (1.55)$$

y

$${}_r \phi_{jk} = \arg\left(\frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r}\right) = \arg(\Phi_{jr} \Phi_{kr}) \quad (1.56)$$

que son unas magnitudes constantes para unos r , j y k dados. Dos importantes conclusiones pueden ser extraídas de las deducciones anteriores. La primera, es claro que la matriz de receptancia del sistema es simétrica

$$\alpha_{jk} = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{\bar{X}_k}{F_j} \quad (1.57)$$

(principio de reciprocidad) y segunda, que las ctes. modales están interrelacionadas, obedeciendo a la relación que descrita por la pareja de ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} {}_r \bar{A}_{jk} &= \Phi_{jr} \Phi_{kr} \\ {}_r \bar{A}_{jj} &= \Phi_{jr}^2 \quad \text{ó} \quad {}_r \bar{A}_{kk} = \Phi_{kr}^2, \end{aligned} \quad (1.58)$$

conocidas como las ecuaciones de consistencia modal.

1.4.3. Representación y propiedades de las FRF de los sistemas MDOF

Considérese como ejemplo el sistema de la figura 1.2, consistente en una barra inextensible en cuyos extremos se definen sendos g.d.l. para el desplazamiento vertical y el giro, que se consideran de interés para el análisis. Se supone que, en este ejemplo, el

comportamiento dinámico del sistema queda descrito con suficiente exactitud por cuatro g.d.l., que definen la flexión en la viga.

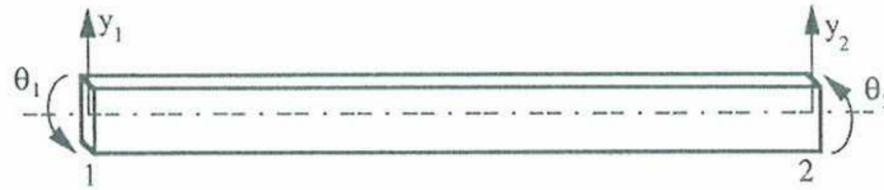


Fig. 1.2 Ejemplo de un modelo de 4 g.d.l.

El comportamiento dinámico de la barra queda descrito mediante la ecuación:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{y_1} \\ f_{\theta_1} \\ f_{y_2} \\ f_{\theta_2} \end{Bmatrix} = [\alpha] \{f\} \quad (1.59)$$

donde $\{q\}$ es un vector de coordenadas generalizadas de respuesta y $\{f\}$ es un vector de fuerzas generalizadas de excitación. Es importante observar que la matriz de receptancia $[\alpha]$ es simétrica y que esta constituida por diferentes elementos que deben de ser definidos en la forma habitual aplicable a coeficientes de influencia. Por ejemplo, en el punto 1 del ejemplo citado, se pueden obtener los tres siguientes elementos de receptancia como el desplazamiento debido a una fuerza unitaria:

$$\alpha_{11} = \alpha_{y_1 y_1} = \frac{y_1}{f_{y_1}}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{y_1 \theta_1} = \frac{y_1}{f_{\theta_1}}; \quad \alpha_{22} = \alpha_{\theta_1 \theta_1} = \frac{\theta_1}{f_{\theta_1}} \quad (1.60)$$

Todas las receptancias anteriores se denominan receptancias puntuales, ya que están tomadas en el mismo punto de la estructura. Sin embargo, α_{11} y α_{22} son receptancias puntuales directas, debido al hecho de que ambas -respuesta y fuerza de excitación- son consideradas a lo largo de la misma coordenada, mientras que α_{12} es denominada receptancia puntual cruzada. Las mismas consideraciones se pueden aplicar

para el otro punto de la barra del ejemplo. Finalmente, hay receptancias que relacionan coordenadas en diferentes puntos de la estructura, como por ejemplo:

$$\alpha_{13} = \alpha_{y_1 y_2} = \frac{y_1}{f_{y_2}}; \quad \alpha_{14} = \alpha_{y_1 \theta_2} = \frac{y_1}{f_{\theta_2}} \quad (1.61)$$

las cuales son llamadas receptancias de transferencia de las receptancias puntuales anteriormente mencionadas. Estas definiciones se aplican también a cualquier otra forma de FRF.

1.4.3.1. Representación gráfica de las FRF de los sistemas MDOF

Se ha visto que un sistema con N grados de libertad es descrito por un modelo modal con N frecuencias naturales y N modos de vibración, así como que la respuesta de un modelo MDOF consiste en un conjunto de diferentes funciones FRF que pueden ser escritas como una serie de términos, cada uno de los cuales representa la contribución de cada modo de vibración a la respuesta total, tal como se indicó en la ecuación (1.53).

Haciendo uso de la representación de Bode de una receptancia FRF para un ejemplo de un sistema no amortiguado con 4 grados de libertad, la figura 1.3 representa la magnitud (a) y fase (b), respectivamente -usando una escala lineal-, de una receptancia puntual directa.

Observando la gráfica de la magnitud, es obvio que aparecen cuatro amplitudes de pico, que corresponden a cuatro frecuencias naturales del sistema. Pues bien, en analogía con los sistemas SDOF, es de esperar que en cada frecuencia de resonancia aparezca una desviación de fase de 180°. Sin embargo, observando la gráfica correspondiente al ángulo de fase, es claro que hay más de cuatro desviaciones de fase. Éstas no ocurren sólo en cada resonancia, sino también en frecuencias intermedias, en las cuales la magnitud no representa -aparentemente- un comportamiento significativo. Esto es

consecuencia de utilizar una escala lineal para dibujar la magnitud de la receptancia, que oculta los niveles de magnitud bajos. Si se reemplaza la escala vertical lineal, por una logarítmica, se obtiene la figura 1.4.

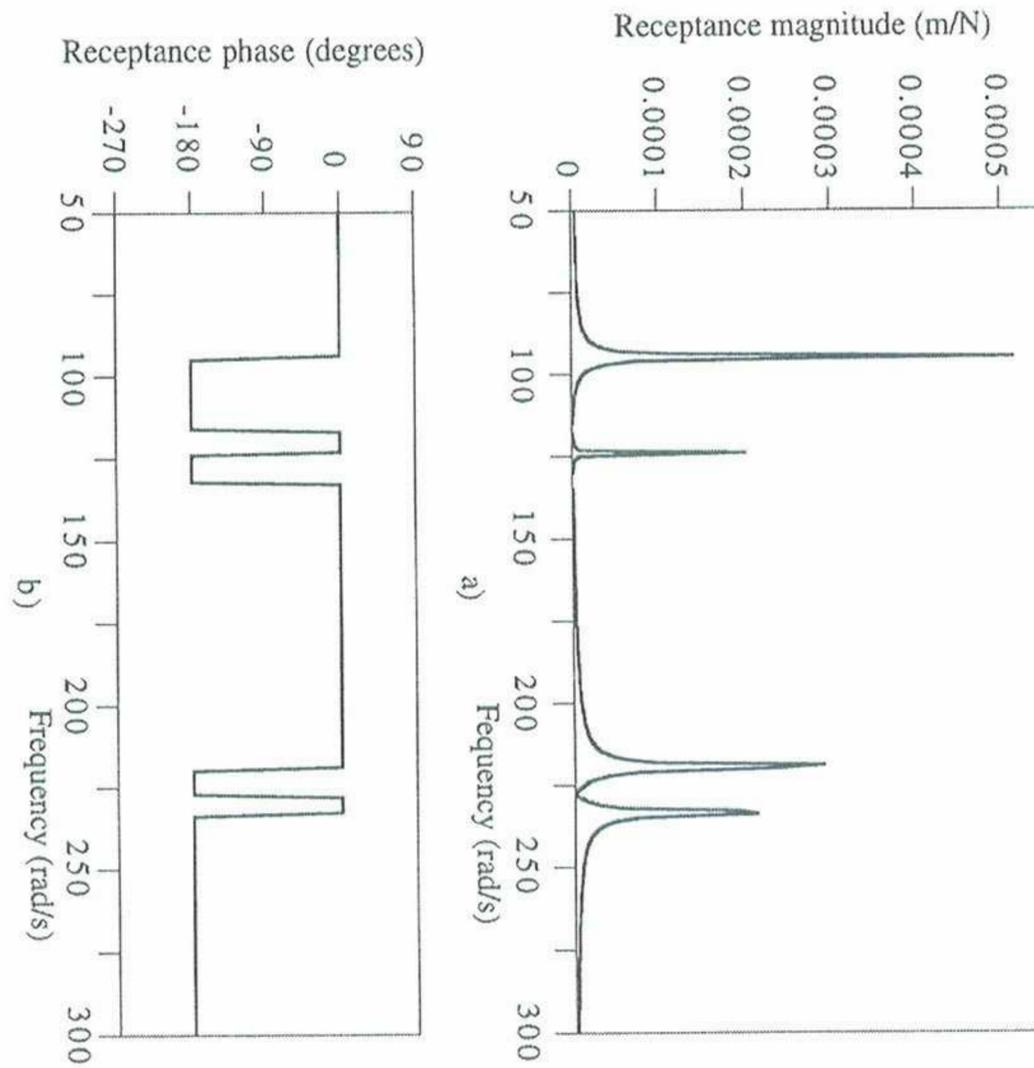


Fig. 1.3 Representación gráfica de un receptancia puntual directa correspondiente a un sistema MDOF de cuatro g.d.l.

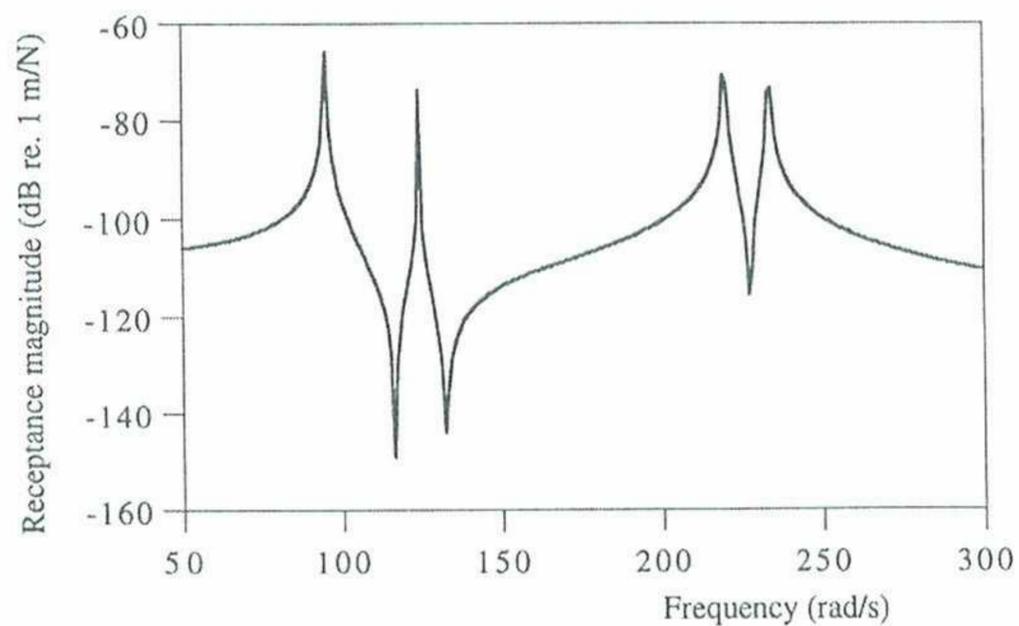


Fig. 1.4 Magnitud en escala logarítmica, de la receptancia representada en la figura 1.3.

Ahora también se pueden apreciar en detalle los bajos niveles de respuesta, que muestra la FRF en estas regiones, observándose que aparecen algunos picos ‘invertidos’, cada uno de los cuales ocurren entre picos de resonancia. Estos picos ‘invertidos’ se denominan antirresonancias y presentan como característica destacable, un cambio de fase similar al de las resonancias. Esta particular característica de la receptancias puntuales directas (adviértase que esto se aplica a otras formas de FRF) es muy útil para evaluar las FRF medidas experimentalmente.

En un sistema no-amortiguado, la antirresonancia corresponde a la ausencia de movimiento en todas las coordenadas en las que la respuesta está siendo considerada.

En el caso de una FRF de transferencia entre dos resonancias no siempre tiene que aparecer necesariamente una antirresonancia, tal como se ilustra en la figura 1.5.

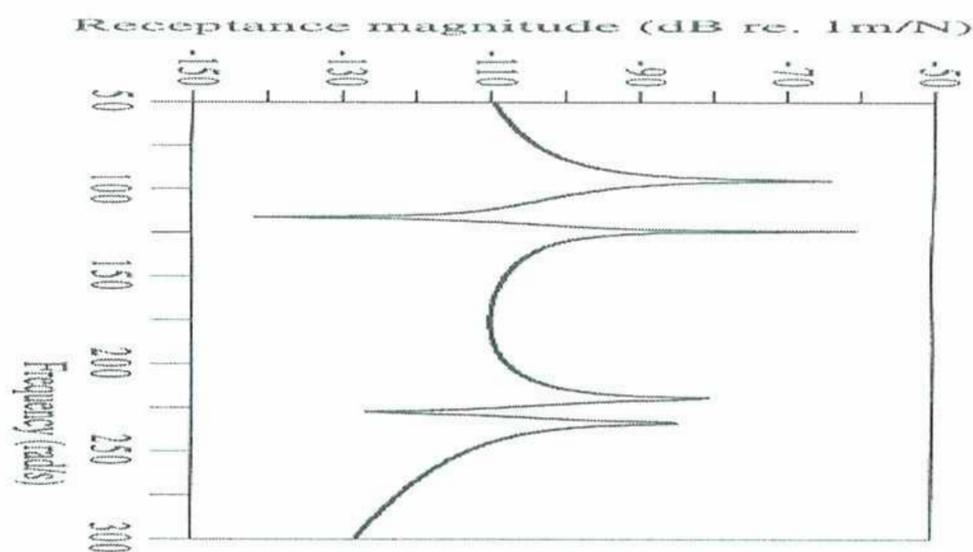


Fig. 1.5 Ejemplo de receptancia de transferencia.

Si se analizan ahora los sistemas amortiguados, se observa que los gráficos de las FRF son muy similares a las que se han descrito para los sistemas sin amortiguación aunque hay diferencias en las resonancias y antiresonancias -cuyos picos son más romos- y en las desviaciones de los ángulos de fase, que no se ajustan a 0° - 180° . Esto se muestra en la figura 1.6 que representa la receptancia para un sistema amortiguado de 4 g.d.l. Obsérvese como valores muy altos del amortiguamiento ocultan la existencia de

una antirresonancia, haciendo que la FRF directa se parezca más a una FRF de transferencia.

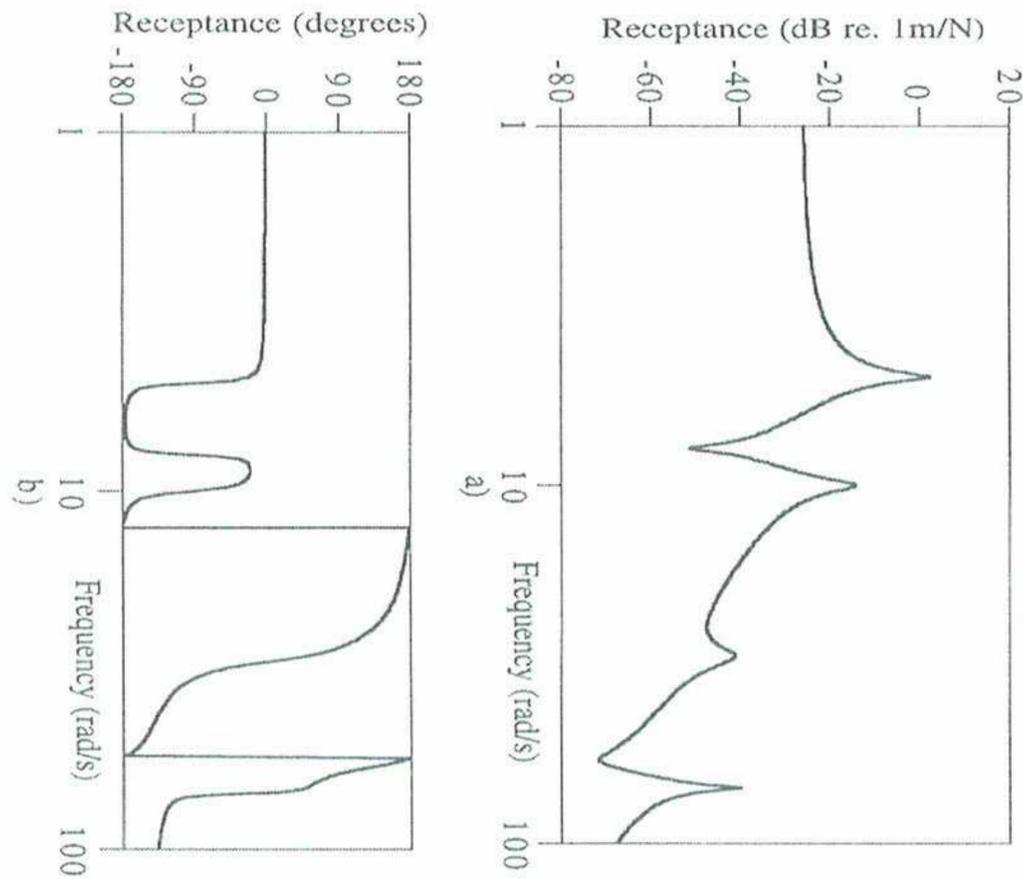


Fig. 1.6 Sistema amortiguado de 4 g.d.l. (amortiguamiento estructural).

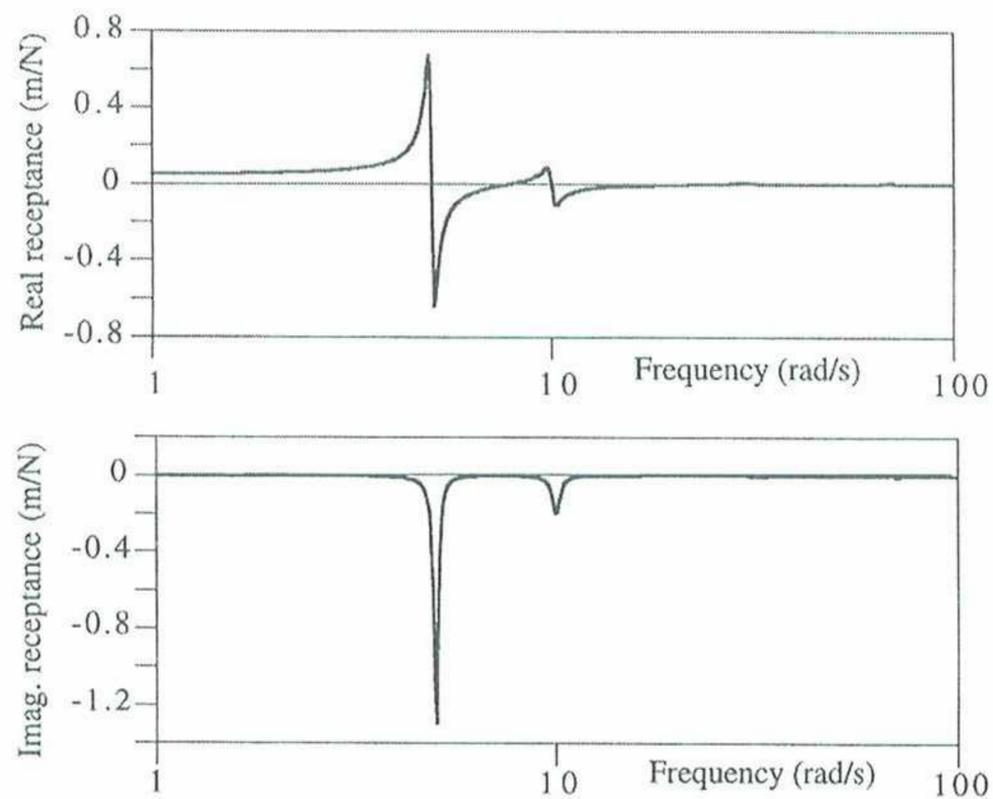


Fig. 1.7 Parte real e imaginaria de la receptancia, en función de la frecuencia, para el sistema amortiguado de 4 g.d.l. considerado en la figura 1.6.

Si en lugar de la magnitud y fase de la FRF se representa su parte real y compleja -para el mismo ejemplo correspondiente a la figura anterior- es evidente (figura 1.7), que el uso de una escala lineal conduce a que los modos de frecuencia más altos tiendan a no quedar adecuadamente representados en las gráficas, dado que -en general- la amplitud de la receptancia disminuye con la frecuencia.

Una posible solución consiste en reemplazar las gráficas de la receptancia por los correspondientes de acelerancia, tal como se muestra en la figura 1.8. De esta forma, todos los modos son visibles; la componente real y compleja no presentan el inconveniente mencionado esperado, a pesar de que el sistema de 4 g.d.l. considerado evidencia un acusado amortiguamiento no-proporcional para los dos últimos modos.

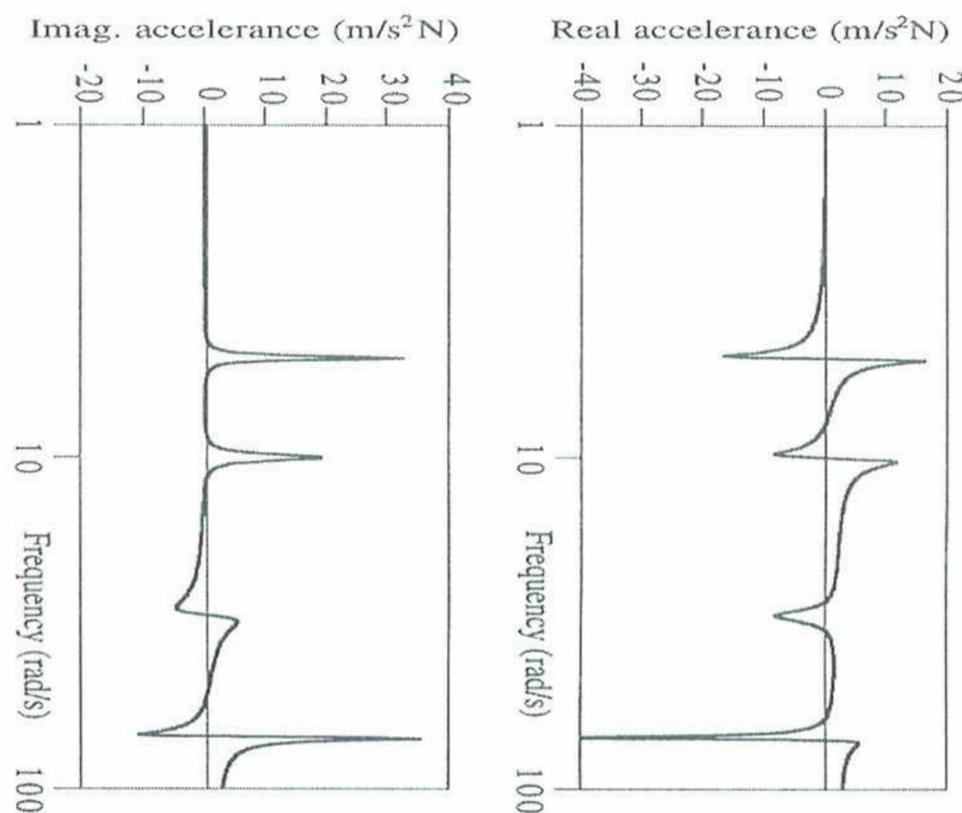


Fig. 1.8 Parte real y compleja de la acelerancia, representada en función de la frecuencia, para el sistema amortiguado de 4 g.d.l. considerado en la figura 1.7.

1.4.4. Modelos dinámicos

Como se ha comprobado en los apartados precedentes, las propiedades dinámicas de un sistema con N grados de libertad pueden ser descritas mediante tres tipos diferentes de modelos: el modelo espacial, el modelo modal y el modelo de respuesta.

En el primer caso, las características dinámicas del sistema se definen a través de la distribución espacial de su masa, rigidez y propiedades de amortiguamiento, mediante las matrices correspondientes. Con este planteamiento la resolución del modelo espacial conduce a un problema de autovalores y autovectores, cuya solución permite obtener las propiedades modales del sistema (N frecuencias naturales, N factores de amortiguamiento y N modos de vibración) contenidas en las matrices $[\lambda_r^2]$ y $[\Phi]$.

Si se elige el modelo modal y se aplican las propiedades ortogonales de la matriz modal en el supuesto de amortiguamiento estructural, se obtiene

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [[K] + i[D]] [\Phi] &= [\lambda_r^2] = [\omega_r^2 (1 + i\eta_r)] \end{aligned} \quad (1.62)$$

y operando resulta

$$\begin{aligned} [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1} &= [M] \\ [\Phi]^{-T} [\omega_r^2 (1 + i\eta_r)] [\Phi]^{-1} &= [K] + i[D] \end{aligned} \quad (1.63)$$

por lo que en principio, es posible obtener un modelo espacial a partir del conocimiento del modelo modal. Esta es una importante conclusión si se considera que, experimentalmente, el modelo modal se deduce inicialmente de FRFs medidas experimentalmente. Por otro lado, el modelo modal da lugar al modelo de respuesta del sistema. Recordando el punto de partida

$$\left[[K] - \omega^2 [M] + i [D] \right] \{\bar{X}\} = \{\bar{F}\} \quad (1.64)$$

junto con

$$[\alpha(\omega)]^{-1} \{\bar{X}\} = \{\bar{F}\} \quad (1.65)$$

y haciendo uso de las relaciones inversas (1.63), se obtiene fácilmente

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] [\omega_r^2 (1 + i\eta_r) - \omega^2]^{-1} [\Phi]^T \tag{1.66}$$

Es decir, comenzando con el modelo espacial se llega al modelo de respuesta, después de pasar a través del modelo modal intermedio. Esta secuencia es la que se sigue normalmente cuando el punto de partida es un análisis teórico.

Sin embargo, si un sistema es demasiado complejo y por consiguiente no puede ser modelado analíticamente, es preciso acudir al análisis experimental donde el punto de partida es la medida de las FRFs, a través de las que, el sistema queda inicialmente descrito mediante un modelo de respuesta $[\alpha(\omega)]$.

Hay diferentes técnicas que permiten deducir las características modales de un sistema dado desde el modelo de respuesta obtenido experimentalmente. El procedimiento es conocido como “identificación modal”. Desde el modelo modal ya deducido, se puede aplicar (1.63) y obtener un modelo espacial. La figura 1.9 resume las relaciones mencionadas entre los distintos modelos para el caso no-amortiguado.

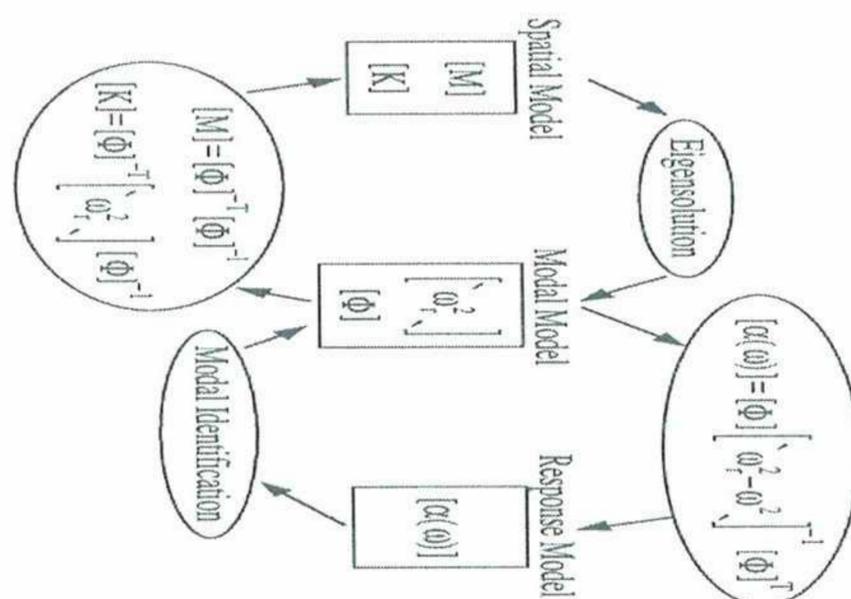


Fig. 1.9 Relaciones entre los diferentes modelos dinámicos (caso no amortiguado).

1.5. Ejemplo ilustrativo

En el próximo capítulo, se complementa la exposición de la metodología analizada con un ejemplo de aplicación, al objeto de:

- indicar cómo se realiza la traducción del lenguaje matemático utilizado, al correspondiente a un software de optimización comercial (GAMS).
- que el lector verifique por si mismo, que se alcanza la solución del problema inverso, es decir que partiendo del modelo de respuesta se puede llegar al modelo espacial del sistema, a través de la determinación previa del modelo modal.

1.5.1. Generación de datos numéricos

Los datos numéricos de partida se obtienen analíticamente para cada uno de los métodos de estimación considerados, a partir de la resolución del problema directo; esto es, a partir de un modelo espacial dado ($[M]$, $[K]$ y $[D]$), el problema directo se resuelve al objeto de obtener el modelo modal (ω_r , η_r , $[\Phi]$) con lo que:

- Se calculan las receptancias $\alpha_{jk}(\omega)$ para las funciones de respuesta en frecuencia (que se pueden utilizar en la determinación de parámetros modales a partir de las FRF), a través de las expresiones (1.52), para amortiguamiento proporcional, y de la (1.53) a la (1.56), para amortiguamiento no proporcional,
- la respuesta (desplazamiento), en cada grado de libertad, en el dominio de la frecuencia (que se utilizarán en la determinación de parámetros modales a través del ajuste local de la respuesta), se determina utilizando la expresión $\{X\} = [\alpha(\omega)] \{F\}$ -ya vista en la introducción- en la que necesariamente se ha de introducir el vector de cargas $\{F\}$ en el dominio de la frecuencia.

En el ejemplo ilustrativo mostrado en el capítulo 2 -en el que se utiliza esta última metodología- dicho vector de cargas se corresponde con el método *polyreference* o *multi input - multi output* (MIMO) que corresponde a la tipología de excitación más complicada; en todos y cada uno de los grados de libertad considerados, se introduce una excitación que responde a una función coseno (en fase con los demás) de amplitud constante y frecuencia variable (en todo el intervalo de frecuencias de interés evidentemente); para tratar de simular analíticamente el efecto de unos excitadores de masa.

1.5.2. Modelo estructural

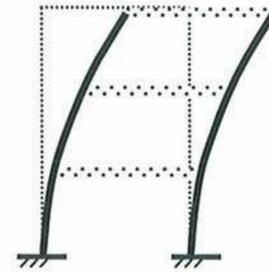
En el ejemplo mostrado, se utiliza un modelo de estructura correspondiente a un edificio simple, en el que se imponen las condiciones de dinteles rígidos, pilares inextensibles y masas concentradas a la altura de los dinteles (figura 1.10); con un nivel de amortiguamiento -para los modos de vibración del mismo- muy bajo (generalmente menor del 10 %). De esta forma se pretende que los datos “limpios” -generados analíticamente para ilustrar la resolución del problema inverso a través de cada uno de ellos- represente, lo más cercanamente posible, la respuesta de una gran estructura real.

1.5.2.1. Tipología de la excitación

Dado que la excitación puede ser nula, única o múltiple, se agrupan las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, según la tipología que se utilice para su descripción. Cuando se habla de excitación nula, no se refiere a que no existan fuerzas actuando sobre la estructura, sino que el registro de datos de la medición experimental corresponde a las acciones naturales del “ambiente” originadas -por ejemplo- por los efectos del tráfico, viento, peatones, etc. sobre la construcción; mientras que la excitación única se puede conseguir con un martillo de impacto o un vibrador; y finalmente, la múltiple, utilizando

varios vibradores simultáneamente en varios grados de libertad. Ahora bien, en los dos últimos casos ya existiría entonces un conocimiento de la excitación aplicada.

Modelo de EDIFICIO SIMPLE



<u>Se imponen las siguientes condiciones:</u>	<u>Las cuales establecen que:</u>
<p>Toda la masa de la estructura está concentrada al nivel de los pisos.</p>	<p>Se pasa de un modelo de ∞ g.d.l. a otro, que tendrá tantos g.d.l. como n^2 de masas concentradas al nivel de los pisos.</p>
<p>El piso de cada planta es infinitamente rígido con respecto a los pilares.</p>	<p>Las uniones entre las vigas y las columnas no permiten rotación.</p>
<p>La deformación de la estructura es independiente de los esfuerzos axiales presentes en los pilares.</p>	<p>Los pisos de cada planta (infinitamente rígidos), permanecen horizontales durante el movimiento de la estructura.</p>

Fig. 1.10 Características principales de un modelo de edificio simple.

Seguidamente, se citan las ventajas e inconvenientes más destacadas, en el caso de utilizar cada uno de los tres tipos de excitación mencionados.

Excitación nula: “natural input” - multi output (NIMO).

- **Ventajas:**

- En el análisis modal tradicional, los parámetros modales se obtienen por ajuste de las funciones de respuesta en frecuencia, relacionando las fuerzas de excitación con la vibración de la respuesta. Sin embargo en el método “natural input” - multi output (NIMO), la identificación modal se realiza basándose exclusivamente en la respuesta de la vibración.

-
- No es necesario medir la excitación, lo que sin lugar a dudas, repercute en una mayor economía de los ensayos.
 - Se excitan simultáneamente varios modos de vibración que pueden ser detectados desde una única medición.
 - **Inconvenientes:**
 - En general, los sensores utilizados deben poseer una sensibilidad mayor que los requeridos para los ensayos de vibraciones forzadas.
 - Se estima que las características resultantes de mediciones experimentales, corresponderán a bajas amplitudes de vibración; estas pueden resultar diferentes de las medidas durante altos niveles de sacudidas, especialmente en estructuras de hormigón armado, en las que la fisuración de la estructura puede afectar a la rigidez global de la misma.

Excitación única o múltiple: *global o single input - multi output* (SIMO) y *polyreference o multi input - multi output* (MIMO), respectivamente.

- **Ventajas:**
 - La principal ventaja de los ensayos con vibraciones forzadas, es que el nivel de la excitación y la vibración inducida, pueden ser controladas de una forma rigurosa.
 - **Inconvenientes:**
 - En general, toda vibración forzada puede dañar a la estructura.
 - Con el fin de excitar dinámicamente y de forma controlada a las construcciones se usan vibradores. Un vibrador debe producir fuerzas de suficiente magnitud, para excitar eficazmente una estructura en un rango de frecuencias de interés. En grandes estructuras civiles, tales como puentes de grandes luces y edificios de gran altura, las frecuencias de interés son comúnmente menores de 1 Hz; mientras es posible generar fuerzas considerables a altas frecuencias, con vibradores relativamente pequeños, no ocurre lo mismo para frecuencias bajas, en cuya generación sería necesario utilizar masas inerciales considerables. Aún siendo teóricamente posible la construcción, transporte y montaje de estos
-

equipos, resultarían excesivamente caros, razón por la cual su empleo queda restringido en ensayos de sistemas mecánicos.

- Los martillos de impacto son usados en pequeñas estructuras y sistemas mecánicos; cuando se utilizan en grandes estructuras, surgen ciertos problemas:
 - Para excitar suficientemente los modos bajos de una estructura la masa del martillo de impacto debe de ser muy grande.
 - La instrumentación de un martillo de impacto de estas características con transductores de fuerza resultaría complicado y costoso.
 - El impacto producido podría causar considerables daños locales a la estructura bajo estudio.

1.5.3. Características del lenguaje de optimización

El ejemplo de aplicación que se añade al presente trabajo, ha sido ejecutado mediante el lenguaje de programación GAMS (General Algebraic Modeling System), que permite el modelado, resolución y análisis de diversos problemas de optimización.

Entre las características básicas del mismo cabe destacar que:

- Permite pasar de resolver problemas de pequeñas dimensiones (unas pocas variables y restricciones) a problemas mayores (miles de variables y restricciones) sin variar significativamente el código. En consecuencia es posible escribir de manera compacta restricciones similares -a través del manejo eficiente de sus índices- mediante una sola restricción.
 - Una vez que se tiene una formulación consistente del problema, expresada en la notación de GAMS, el mismo software elige algún optimizador de los que dispone, para alcanzar su solución. De esta manera, el proceso de resolución del problema está separado del proceso de modelado; el usuario puede cambiar el
-

modelo para mejorarlo o completarlo en un entorno agradable de manejar, ya que no se tiene que preocupar del funcionamiento del algoritmo interno que necesita para resolverlo.

- El aprendizaje del código GAMS resulta fácil para usuarios con conocimientos previos de optimización, debido a que, la forma en que GAMS presenta el problema, coincide prácticamente con la descripción matemática del mismo.

1.6. Estado del arte

A continuación se indican de forma sucinta, las características más destacadas de los diferentes métodos de estimación de parámetros modales, para enumerar seguidamente algunos de los -pocos- métodos que trabajan en el dominio de la frecuencia, y que a su vez consideran amortiguamiento estructural o histerético. Se hará un especial énfasis en el método de Ewins-Gleeson, ya que aparte de regirse por las dos últimas características citadas, se aplica a sistemas de varios grados de libertad para analizar varios modos simultáneamente. Lo mismo ocurre con la metodología que se expone en el próximo capítulo.

1.6.1. Características principales de los métodos de estimación de parámetros modales

En las últimas décadas, se han desarrollado numerosas técnicas con la finalidad de obtener identificaciones fiables de las características dinámicas de estructuras y sistemas mecánicos. Una primera división que se puede realizar entre las mismas, hace referencia al dominio en el que trabajan: tiempo o frecuencia, que a su vez, se pueden separar en métodos indirectos (o modales) y métodos directos. Una división posterior -que parece lógico efectuar- consiste en clasificarlos según el número de modos que consideran en el análisis, pudiendo distinguirse entre sistemas de un único grado de libertad (UGDL) y sistemas de varios grados de libertad (MGDL).

A pesar de que el número de métodos existentes en la actualidad es muy extenso, se pueden valorar en ellos una serie de características comunes; algunas de las más destacadas se enumeran a continuación, comentando asimismo sus principales ventajas e inconvenientes:

a) Métodos de uno o múltiples grados de libertad

En un ancho de banda dado, se puede suponer que existe un modo predominante. Los métodos basados en UGDL son muy rápidos, y en aplicaciones informáticas requieren poca memoria y tiempo, pero son solo aplicables si los modos del sistema están suficientemente separados, lo que no suele ser el caso. A continuación se requiere aproximar los datos medidos con un modelo que incluya varios modos. Los parámetros de estos modos se estiman simultáneamente mediante el uso de los métodos MGDL.

b) Estimación de parámetros global o local

Los procedimientos de estimación local tienen la desventaja de que la estimación final para un parámetro particular ha sido seleccionada del conjunto total de resultados, por ejemplo mediante el cálculo del valor medio. Este proceso requiere la selección e interpretación por parte de un operador, pero ofrece alguna información acerca de la exactitud del sistema, suministrando una variación estadística.

Por otra parte, los métodos de estimación global resultan afectados por los errores típicos en la medida, como el efecto de la masa de los acelerómetros. Para los procedimientos de estimación global la consistencia del conjunto de datos disponibles es de considerable importancia.

c) Excitación única o múltiple

Las técnicas de excitación múltiple, se han revelado útiles para la separación de polos próximos o dobles. Dado que los coeficientes de un modo de vibración, son independientes de la localización de la excitación, la estimación de parámetros modales a partir de múltiples fuentes de excitación, da como resultado una estimación global para estos parámetros.

d) Métodos directos o indirectos (modales)

La designación “indirecto” (modal), significa que la identificación de las funciones de respuesta en frecuencia está basada en el modelo modal, sobre los parámetros modales (frecuencias naturales, factores de pérdida por amortiguamiento, constantes modales y sus fases); mientras que la designación “directo”, se refiere a que la identificación está directamente fundamentada en el modelo espacial, en particular sobre la ecuación matricial general de equilibrio dinámico.

e) Modos de vibración reales o complejos

La tipología de los resultados para los autovalores y autovectores, es distinta según cada una de las diferentes situaciones de amortiguamiento que se consideren:

- Caso no amortiguado: autovalores y autovectores reales.
- Caso de amortiguamiento proporcional: autovalores complejos y autovectores reales (en el caso de que los resultados de un cálculo muestren autovectores con parte real e imaginaria, existirá también un factor de proporcionalidad complejo, que permite re-escalar los autovectores a valores reales); los autovectores son los mismos que en el caso no amortiguado.
- Caso de amortiguamiento no proporcional: autovalores y autovectores complejos.

Generalmente, en el caso de estructuras ligeramente amortiguadas, la consideración de amortiguamiento proporcional o no proporcional, se traduce en diferencias pequeñas. Estructuras o sistemas mecánicos fuertemente amortiguados, tienden a mostrar un amortiguamiento no-proporcional, especialmente si los elementos de amortiguamiento aparecen concentrados (como ocurre por ejemplo con la estructura completa de un coche). Algunos procedimientos de estimación de parámetros, ofrecen la posibilidad de estimar modos de vibración con valores reales o complejos, dependiendo de la intención del ensayo. Por ejemplo, si los modos de vibración obtenidos experimentalmente, van a ser comparados con otros calculados mediante un modelo de elementos finitos, deberán utilizarse valores reales.

f) Implementación en el dominio del tiempo o de la frecuencia

Teóricamente, no hay razones que justifiquen que la implementación en el dominio del tiempo sea superior a la correspondiente en el dominio de la frecuencia, o viceversa. Sin embargo, se aprecian algunas diferencias fundamentales en lo que se refiere a aplicaciones prácticas:

- Consideraciones numéricas: los métodos de estimación en el dominio del tiempo son generalmente más adecuados para trabajar con datos con ruido. Permiten evitar la mayoría de los errores de procesamiento de la señal (leakage, aliasing, etc.), si se aplican directamente sobre las señales de tiempo sin tratar (en bruto). Por el contrario, en condiciones de medida con ruido, el promediado es más fácil y más eficiente en el dominio de la frecuencia.
 - Rango de frecuencias: debido al efecto de la potencia de las frecuencias en los métodos que operan en el dominio de la frecuencia, los análisis en una banda ancha se realizan preferentemente en el dominio del tiempo. Sin embargo, en los casos en los que el efecto de los modos fuera de la banda es importante, los métodos en el dominio de la frecuencia son ventajosos, especialmente en lo referente a la estimación de modos de vibración, ya que ellos pueden aproximar estos efectos mientras que los métodos en el dominio del tiempo, no pueden compensarlos.
 - Amortiguamiento: los sistemas fuertemente amortiguados muestran picos de resonancia anchos en las funciones de respuesta en frecuencia (es decir los picos se extienden sobre varias líneas espectrales), pero presentan una corta duración de la respuesta del impulso (solamente unas pocas muestras significativas en el tiempo), figura 1.11. Así pues -en general- los métodos en el dominio de la frecuencia, permiten una mejor estimación de los polos del sistema. La situación inversa dual -en general- es cierta para sistemas ligeramente amortiguados, figura 1.12.
 - Naturaleza de los datos recolectados: para trabajar en el dominio de la frecuencia, los datos previamente recolectados en el dominio del tiempo, deben ser convertidos al dominio de la misma, -por ejemplo- a través de la transformada rápida de Fourier; existen una serie de errores que se pueden
-

cometer al truncar la señal, pero los problemas relacionados con ellos, se eliminan empleando métodos que operen en el dominio del tiempo.

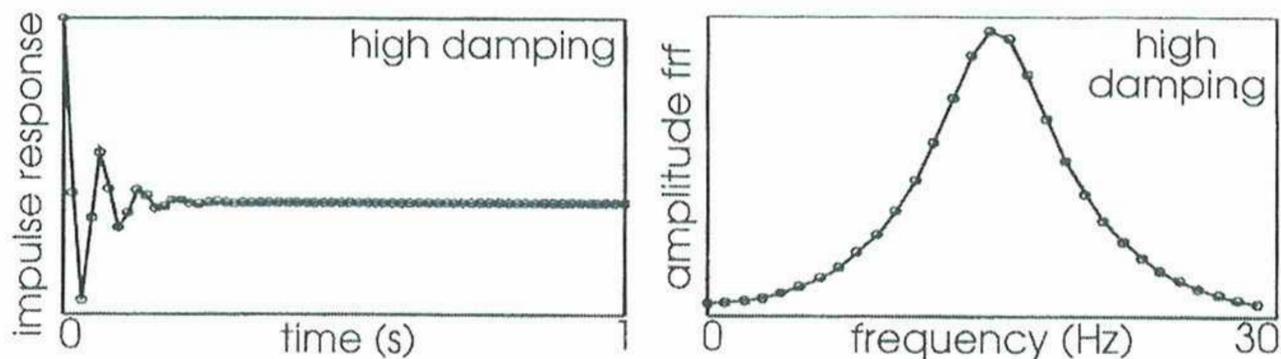


Fig. 1.11 Sistema fuertemente amortiguado: número de puntos de muestra

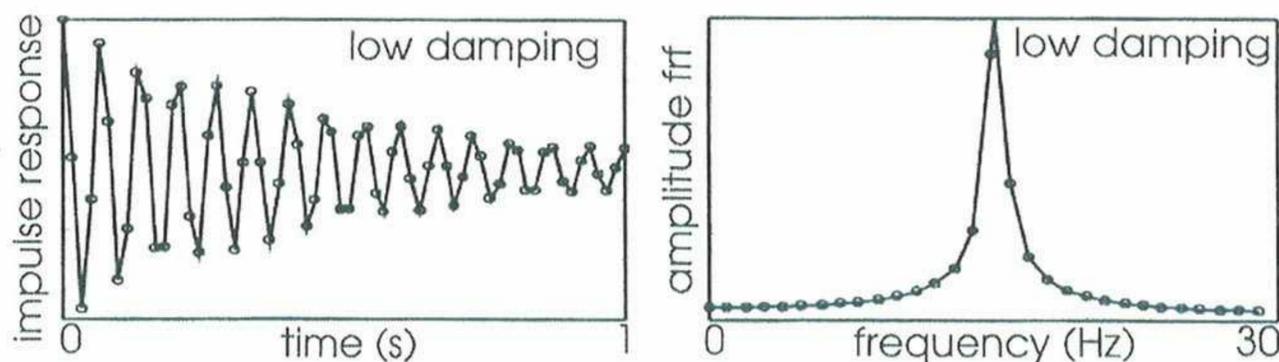


Fig. 1.12 Sistema débilmente amortiguado: número de puntos de muestra

1.6.2. Métodos en el dominio de la frecuencia con amortiguamiento estructural

Los métodos de un único grado de libertad son rápidos y requieren poco esfuerzo computacional y poca memoria. Los que quizás han tenido una mayor relevancia, así como un impacto notable -en términos de uso práctico- son: el método del ajuste del círculo (Kennedy-Pancu), el método inverso (Dobson) y el método de Dobson (extensión del anterior). Sin embargo, con la evolución de los ordenadores, y en particular de los personales, con más capacidad de memoria y la posibilidad de efectuar cálculos cada vez más rápidos, estos métodos se han visto superados, para la mayoría de las aplicaciones prácticas, por los métodos -más sofisticados- de múltiples grados de libertad.

Dentro de estos últimos, y entre los indirectos (o modales), fundamentados en el dominio de la frecuencia y que a su vez trabajan con amortiguamiento estructural, quizás el más conocido sea el método de Ewins-Gleeson. Es este un método que se puede clasificar dentro de los conocidos como de entrada única - salida única (single input - single output), orientado a la identificación de estructuras ligeramente amortiguadas. Originalmente, el problema fue presentado en términos de acelerancia; pero para la exposición que sigue, se realizará en términos de receptancia.

Como se parte de la hipótesis de que el sistema es ligeramente amortiguado, los modos se consideran reales, con ángulos de fase de 0° ó 180° . El modelo matemático se expresa mediante

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{C_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \quad (1.67)$$

donde C_r es sin embargo una cantidad real (amortiguamiento proporcional).

En un primer estado, se considera que no hay amortiguamiento. En este caso

$$\text{Re}(\alpha(\omega)) = \sum_{r=1}^N \frac{C_r}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (1.68)$$

Si además las frecuencias naturales, se identifican con los picos de las funciones de respuesta en frecuencia, en las curvas de la receptancia; y éstos, a su vez, se suponen suficientemente separadas y agudas -y por lo tanto fácilmente visibles-, la única magnitud desconocida es la constante modal C_r .

Para calcular las N incógnitas C_r , es necesario establecer N ecuaciones. Para ello, se toman N frecuencias $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ y la correspondiente parte real de las receptancias medidas, que se representan de forma abreviada como $\text{Re}(\tilde{\alpha}_1), \text{Re}(\tilde{\alpha}_2), \dots, \text{Re}(\tilde{\alpha}_N)$. En tal caso, las constantes modales vendrán dadas por

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_1^2} \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_2^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_N^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_N^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_N^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \text{Re}(\tilde{\alpha}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\alpha}_2) \\ \vdots \\ \text{Re}(\tilde{\alpha}_N) \end{Bmatrix} \quad (1.69)$$

o en forma abreviada,

$$\{C\} = [R]^{-1} \text{Re}\{\tilde{\alpha}\} \quad (1.70)$$

el signo de cada C_r da información sobre si la respuesta está en fase, o no.

En un segundo estado, los factores de amortiguamiento se calculan desde las amplitudes de pico. A partir de la primera expresión de este apartado (1.67), se deduce para cada resonancia

$$|\tilde{\alpha}(\omega_r)| = \frac{|C_r|}{\eta_r \omega_r^2} \quad (1.71)$$

de donde se obtiene finalmente

$$\eta_r = \frac{|C_r|}{|\tilde{\alpha}(\omega_r)| \omega_r^2} \quad (1.72)$$

Los efectos de los modos residuales pueden ser introducidos más tarde. Los detalles sobre los mismos, se pueden consultar en la correspondiente bibliografía. Una posible alternativa consiste en considerar $N+2$ puntos y calcular $N+2$ constantes modales. La matriz $[R]$ en (1.70) debería ser en este caso de orden $N+2$.

Este método da buenos resultados si, de hecho, la estructura es ligeramente amortiguada. Es extremadamente simple y rápido, y fácil de implementar en cualquier programa de cálculo por ordenador. Sin embargo, presenta la desventaja de ser sensible a los puntos elegidos sobre las funciones de respuesta en frecuencia, principalmente si se trata de medidas en las que hay ruido presente; por ello, requiere una cierta experiencia por parte del operador para hacer una adecuada elección de puntos.

CAPITULO 2

Ajuste local de la respuesta

2.1. Introducción

El método de identificación modal que se va a describir a continuación, trata de la determinación de los parámetros modales a través del ajuste local de la respuesta.

Sus *características fundamentales* son:

- Permite -incluso midiendo únicamente la respuesta- la determinación de los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa en la situación general de amortiguamiento estructural; es decir la obtención de la matriz modal $[\Phi]$, solucionando de esta forma el problema inverso, desde las mediciones experimentales del modelo de respuesta, hasta el modelo modal. Frente a otros procedimientos, que solo alcanzan a la determinación de valores proporcionales de la respuesta, entre cada uno de los g.d.l. considerados, que componen cada uno de los modos de vibración (matriz $[\Psi]$).
- Es apto para amortiguamiento histerético o estructural.
- Permite realizar análisis dinámicos de grandes estructuras con equipos muy limitados, en los que el número de canales de captación sea mucho menor que el número de grados de libertad con los que se desea definir el movimiento de la estructura.

El *resto* de las *características principales*, son las siguientes:

- Trabaja en el dominio de la frecuencia.
- Método indirecto (a partir de la respuesta, se determina el modelo modal).
- Se aplica a sistemas MGD.L.
- Método *multi output* (MO), se puede aplicar en los casos de:
 - “*natural input*” - *multi output* (NIMO), para el caso en el que las acciones presentes sean las naturales del “ambiente” (peatones, tráfico, viento, etc.).
 - *global* o *single input - multi output* (SIMO).
 - *polyreference* o *multi input - multi output* (MIMO).

Es decir, la excitación puede ser nula, única (en un grado de libertad), o múltiple (en varios grado de libertad), respectivamente.

- Estimación de parámetros: local (frecuencias naturales y matriz modal $\omega_r, [\Phi]$).
- Modos de vibración complejos. Ahora bien, esto depende de los datos de partida; si los mismos se corresponden con un caso de amortiguamiento proporcional, los modos de vibración serían, evidentemente, reales (idénticos a la situación sin amortiguamiento).

Como se ha indicado en la introducción, el método de identificación modal a través del ajuste local de la respuesta, permite realizar el análisis dinámico de una gran estructura con equipos muy limitados, esto es, con un número de canales de medida mucho menor que la cantidad de grados de libertad en los que se desea medir, para ello es necesario -evidentemente- hacer varias mediciones (varios conjuntos de datos). Con anterioridad al inicio de la captación de datos, se debe seleccionar un sensor de referencia (al menos uno en cada dirección en que se desea medir), el cual no modificará su ubicación en la estructura durante la medida de todos y cada uno de los conjuntos de datos; los restantes sensores se irán cambiando de posición (grado de libertad) en cada conjunto de datos que se defina, hasta que se recojan todas las respuestas de vibración en todos los grados de libertad de interés.

Es conveniente que el/los grado/s de libertad en el/los que se ubique/n el/los sensor/es de referencia tengan una respuesta (vibración) significativa o al menos, una cierta contribución en los modos de vibración que se pretenden identificar. Si no se cumple lo anterior, los resultados serán inexactos e incluso -si el nivel de vibración es bajo- no representativos.

Para ilustrar lo explicado en los párrafos anteriores, considérese el siguiente ejemplo, un edificio de 6 plantas, con dos ejes de simetría en planta ortogonales, en el que se desea determinar sus características dinámicas y únicamente se posee un modesto equipo de dos canales de medición (ahora bien, tanto el equipo de captación como los sensores poseen la sensibilidad suficiente para captar las vibraciones). Para medir la

respuesta en todas las plantas del edificio es necesario realizar 5 mediciones; por lo que al final del proceso de medición, para poder caracterizar dinámicamente el edificio es necesario disponer de 5 conjuntos de datos. El sensor de referencia se dispone en la última planta (ya que en la misma son previsibles mayores vibraciones que en el resto) y como se ha dicho no se modifica su posición en los restantes conjuntos de datos. Así por ejemplo, en el conjunto de datos n° 5 el sensor de referencia se ubicaría en la planta 6 y el otro en la n° 5, y con esta disposición se efectuaría una medición (figura 2.1); posteriormente, para el conjunto de datos 4 el sensor de referencia se ubicaría en el mismo lugar y el adicional en la 4, con esta disposición se realizaría una nueva medición y se procedería así sucesivamente con otros conjuntos de datos hasta que la respuesta de todas las plantas es recolectada. En la tabla 2.1 se muestra un resumen de ubicación de sensores en cada conjunto de datos.

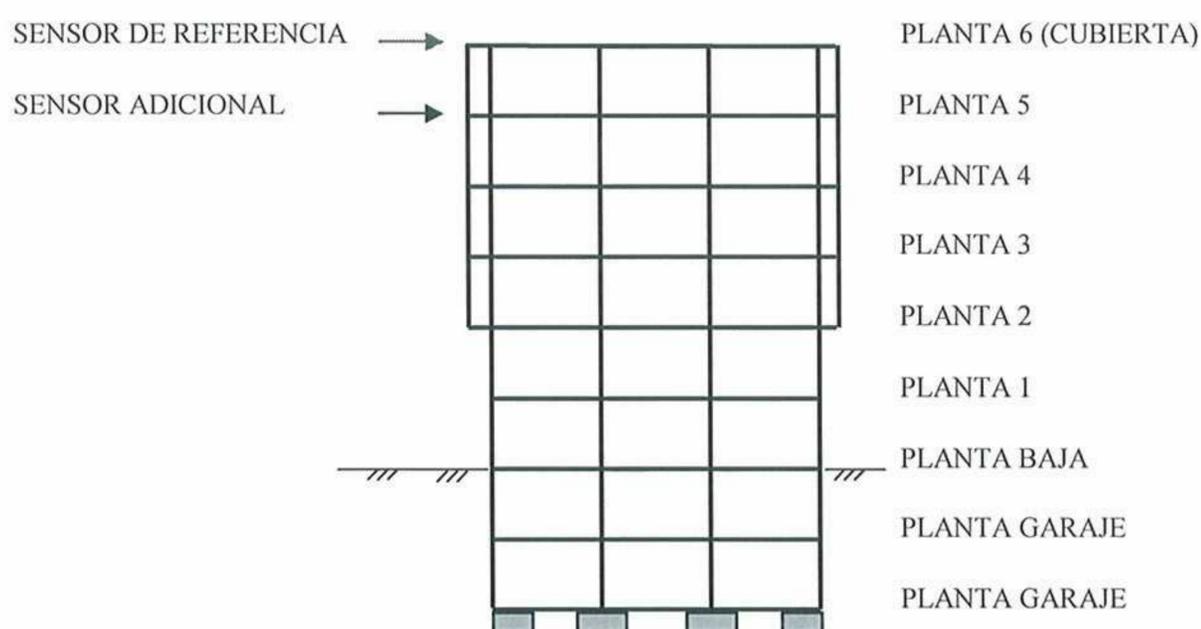


Fig. 2.1 Ubicación de los sensores para el conjunto de datos n° 5.

El algoritmo no presenta limitación alguna para el número de sensores de referencia, ni adicionales (en los que se modifica su ubicación en cada conjunto de datos), la cantidad de los mismos vendrá limitada por la categoría del equipo de que se disponga, muy condicionada evidentemente por cuestiones económicas; lo cual representa nuevamente una ventaja para el Método del Ajuste Local de la Respuesta, ya que como se ha visto, en su expresión mínima, es suficiente con dos sensores para realizar la caracterización dinámica de una gran estructura en una única dirección.

Conjunto de datos nº	Sensor de referencia planta nº	Sensor adicional planta nº	Figura
5	6	5	2.1
4	6	4	-
3	6	3	2.2
2	6	2	-
1	6	1	-

Tabla 2.1 Cuadro resumen de ubicación de sensores en cada grado de libertad.

Otra cuestión de gran interés reside en el hecho de que la historia de cargas en cada conjunto de datos puede ser totalmente diferente, en tipología y/o magnitud de la misma, lo cual no debe preocupar al técnico, ya que no es necesario efectuar ningún tipo de control o medición sobre la excitación de la estructura.

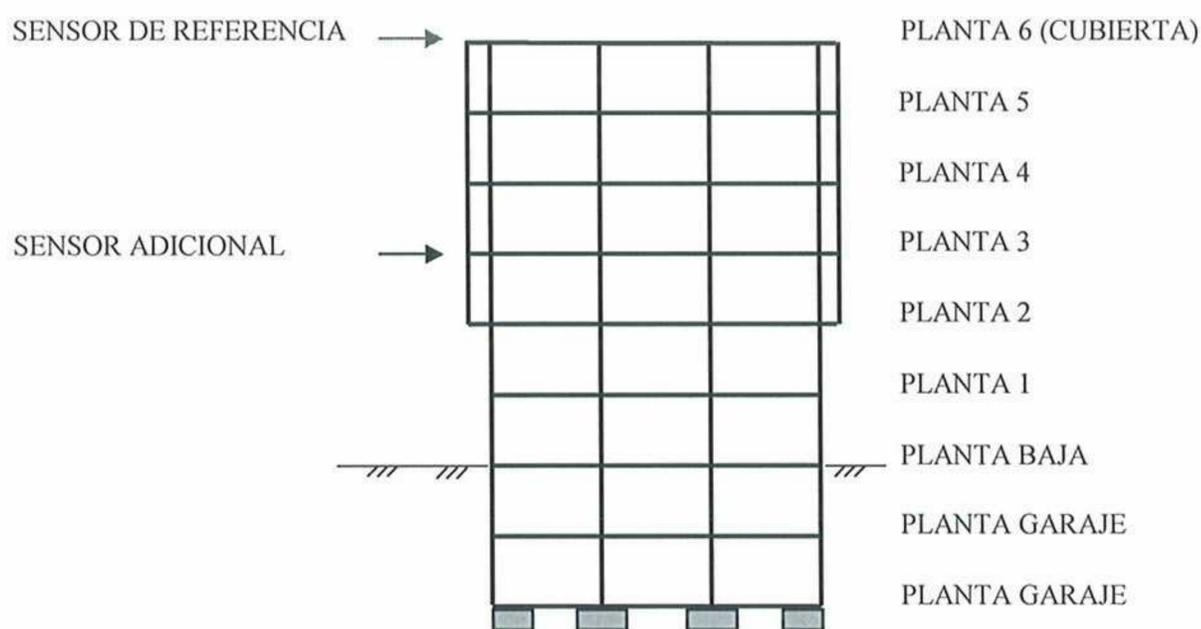


Fig. 2.2 Ubicación de los sensores para el conjunto de datos nº 3.

2.2. Obtención de parámetros modales

El algoritmo que se presenta para la obtención de parámetros modales, corresponde al caso general de amortiguamiento histerético o estructural, -como se ha mencionado- al efectuar una estimación de parámetros local (frecuencias naturales, y matriz modal $\omega_r, [\Phi]$), cada uno de los modos de vibración se determinan independientemente (de uno en uno).

La resolución del mismo comprende dos etapas:

- El ajuste de la respuesta en cada grado de libertad considerado.
- Imposición de las condiciones de ortogonalidad para la obtención de la matriz modal normalizada respecto de la masa.

A continuación se desarrollan cada una de las mismas.

a) Ajuste de la respuesta en cada grado de libertad

El grupo de datos, está constituido por la parte real y compleja de la respuesta, en cada uno de los grados de libertad y conjunto de datos considerados

- $\text{dato}_{R_{ji\text{cd}}}$: magnitud de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte real), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.
- $\text{dato}_{I_{ji\text{cd}}}$: magnitud de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte compleja), a la frecuencia i, en el conjunto de datos cd.

A pesar de que -como el lector sabe- en el dominio del tiempo la respuesta solo presenta parte real, al hacer la transformada de Fourier de la misma, surgen componentes real y compleja.

A su vez, el conjunto de variables involucradas en el problema son las siguientes:

- ω_r : frecuencia natural para el modo r
- $X_{R\ ji\ cd}$: estimación de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte real), a la frecuencia i , en el conjunto de datos cd
- $X_{I\ ji\ cd}$: estimación de la respuesta (desplazamiento) en el g.d.l. j (parte compleja), a la frecuencia i , en el conjunto de datos cd
- $\gamma_{R\ ri\ cd}$: coeficiente de participación modal (parte real) para el modo r , a la frecuencia i , en el conjunto de datos cd
- $\gamma_{I\ ri\ cd}$: coeficiente de participación modal (parte compleja) para el modo r , a la frecuencia i , en el conjunto de datos cd
- $\Psi_{R\ jr}$: componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte real)
- $\Psi_{I\ jr}$: componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte compleja)
- Cr_R : complemento residual (parte real)
- Cr_I : complemento residual (parte compleja)
- $\varepsilon_{R\ ij\ cd}$: error asociado con el dato i (parte real), para el desplazamiento en el g.d.l. j , perteneciente al conjunto de datos cd
- $\varepsilon_{I\ ij\ cd}$: error asociado con el dato i (parte compleja), para el desplazamiento en el g.d.l. j , perteneciente al conjunto de datos cd
- z : función objetivo

debido a la metodología del análisis de regresión efectuado $\varepsilon_{R\ ij\ cd}$ y $\varepsilon_{I\ ij\ cd}$ son siempre positivos. Las frecuencias naturales ω_r , están comprendidas dentro de cada uno de los intervalos identificados manualmente (figura 2.3), donde se encuentran cada uno de los modos que se quieren estimar (picos de las curvas). Asimismo los complementos residuales Cr_R y Cr_I , sirven para tener en cuenta el efecto de los modos fuera del rango

de medición (figura 2.4) y el de otros modos más próximos al que se quiere estimar (para la parte real y compleja respectivamente).

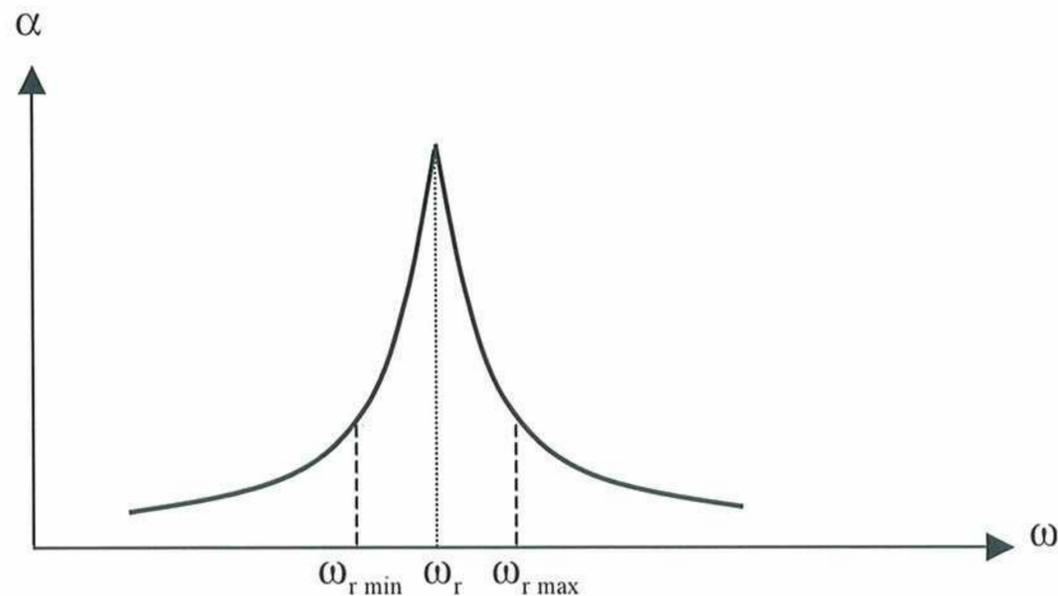


Fig. 2.3 Variable ω_r , frecuencia natural correspondiente al modo r , que puede adoptar valores dentro del intervalo limitado por las magnitudes máx. y mín. que se establecen para el mismo.

Anteriormente, se ha visto que hay un conjunto de N autovalores complejos λ_r^2 y N autovectores asociados $\{\Psi_r\}$, y que los N autovectores forman un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio N , que poseen propiedades de ortogonalidad. Así pues, cualquier vector de respuesta en el espacio N , como $\{\bar{X}\}$, puede ser expresado como una combinación lineal de autovectores

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} \quad (2.1)$$

siendo $\{\Psi_r\}$ el modo de vibración (autovector) correspondiente al modo r y γ_r el coeficiente de participación modal para el modo r . Nótese que las componentes de los autovectores son valores fijos e inalterables para cada forma de vibración, en cambio, los coeficientes de participación, constituyen una magnitud que varía con la frecuencia, pero a una frecuencia dada ω_i tienen el mismo valor para todas las componentes del vector modal. Por otra parte, en las proximidades de una frecuencia natural solamente un número muy limitado de modos contribuye significativamente al resultado, normalmente

uno o dos, por lo que en la respuesta -de un pequeño intervalo constituido por el entorno de una frecuencia natural- solo uno o dos factores de participación modal alcanzarán valores notables frente al resto.

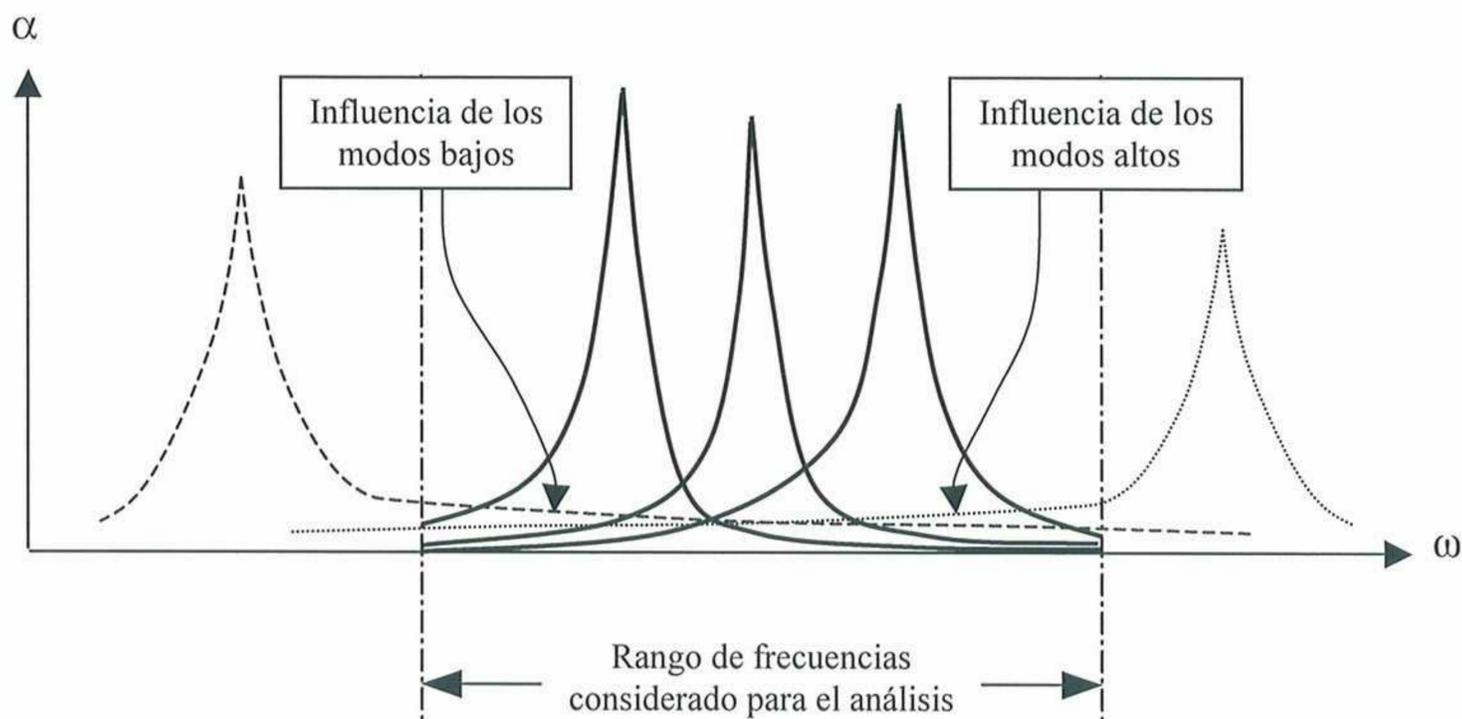


Fig. 2.4 Influencia de los modos altos y bajos en el rango de frecuencias bajo estudio.

Es necesario también destacar, que dos de las magnitudes representadas en (2.1), X_j y γ_r son también funciones de la frecuencia, por lo tanto, la expresión anterior debe de completarse con un segundo subíndice, el cual hace referencia a la misma. Con lo que se puede escribir también de la siguiente forma

$$\bar{X}_{ji} = \sum_{r=1}^N \gamma_{ri} \Psi_{rj} \quad (2.2)$$

Sin embargo, dado que la misma tiene componentes real y compleja -y asumiendo que los grandes paquetes de software para optimización sólo trabajan con magnitudes reales- es necesario realizar las estimaciones de la expresión resultante (parte real y compleja) por separado. De esta manera, se evitan los problemas que surgen al tener que operar con la magnitud y la fase de las expresiones resultantes, en lugar de

operar con su parte real y compleja, en el proceso de optimización. En consecuencia, se tiene que

$$X_{R_{ji\ cd}} + X_{I_{ji\ cd}} = \sum_{r=1}^N \left(\underbrace{\gamma_{R_{ri\ cd}}}_a + \underbrace{\gamma_{I_{ri\ cd}}}_b i \right) \left(\underbrace{\Psi_{R_{jr}}}_c + \underbrace{\Psi_{I_{jr}}}_d i \right) \quad (2.3)$$

Para separar el producto de magnitudes reales y complejas, se recurre a agrupar las componentes reales e imaginarias de acuerdo con la siguiente descomposición; si se considera a $a + bi$ y $c + di$ dos magnitudes complejas, el producto de las mismas resulta

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 \quad (2.4)$$

donde, agrupando términos reales y complejos

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (2.5)$$

Identificando términos a ambos lados de la igualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned} X_{R_{ji\ cd}} &= \sum_{r=1}^N \gamma_{R_{ri\ cd}} \Psi_{R_{jr}} - \sum_{r=1}^N \gamma_{I_{ri\ cd}} \Psi_{I_{jr}} \\ X_{I_{ji\ cd}} &= \sum_{r=1}^N \gamma_{R_{ri\ cd}} \Psi_{I_{jr}} + \sum_{r=1}^N \gamma_{I_{ri\ cd}} \Psi_{R_{jr}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

lo que representa la partición buscada.

Para ajustar la respuesta de todos y cada uno de los g.d.l., se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto

$$\sum_{i=1}^n |X_{R_{ji\ cd}} - \text{dato}_{R_{ji\ cd}}| + \sum_{i=1}^n |X_{I_{ji\ cd}} - \text{dato}_{I_{ji\ cd}}| \quad (2.7)$$

La estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_j \sum_i (\varepsilon_{R ij cd} + \varepsilon_{I ij cd}) + \dots \quad (2.8)$$

Sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el conjunto de soluciones admisibles

$$\left. \begin{array}{l} X_{R ji cd} - \text{dato}_{R ji cd} \leq \varepsilon_{R ij cd} \\ \text{dato}_{R ji cd} - X_{R ji cd} \leq \varepsilon_{R ij cd} \\ \varepsilon_{R ij cd} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte Real} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, N \end{array} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} X_{I ji cd} - \text{dato}_{I ji cd} \leq \varepsilon_{I ij cd} \\ \text{dato}_{I ji cd} - X_{I ji cd} \leq \varepsilon_{I ij cd} \\ \varepsilon_{I ij cd} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte Compleja}$$

donde n es el número de muestras o de puntos en los que se ha medido la respuesta.

El conjunto de estas dos últimas expresiones representa, la contribución de esta etapa, a la función objetivo y al conjunto de restricciones del problema total, respectivamente.

b) Imposición de las condiciones de ortogonalidad

Finalmente se van a introducir las propiedades de ortogonalidad, en el método del ajuste global de la respuesta. En la situación general de amortiguamiento histerético o estructural -y escritas en forma matricial- el lector recordará que se reducen a

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [[K] + i[D]] [\Phi] &= [\lambda_r^2] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Más adelante, se verá que la segunda de estas ecuaciones resulta redundante, ya que si los parámetros del modelo modal son conocidos (frecuencias naturales, coeficientes de pérdida por amortiguamiento y matriz modal $\omega_r, \eta_r, [\Phi]$), el cálculo de la rigidez $[[K]+i[D]]$ es directo.

Por otra parte, la primera ecuación representa el producto de tres matrices con magnitudes reales y complejas, el cual se debe particionar -a lo largo de todo el proceso- en dos ocasiones, para lograr efectuar el mismo. El procedimiento para realizar el producto de las matrices modales y de masa, ha sido verificado aparte, por lo que aquí solo se expone el algoritmo final.

El conjunto de nuevas variables, involucradas en el problema, que van a aparecer durante el desarrollo de esta última etapa, son las siguientes

- $m_{R_{kj}}$: componente de la matriz de masa concentrada (parte real)
- $I_{R_{rs}}$: componente de la matriz identidad (parte real)
- $I_{I_{rs}}$: componente de la matriz identidad (parte compleja)
- $aux_{R_{kr}}$: variable auxiliar (parte real), para el cálculo de $[M] \{\Phi_r\}$
- $aux_{I_{kr}}$: variable auxiliar (parte compleja), para el cálculo de $[M] \{\Phi_r\}$
- $\varepsilon_{Id_{R_{rs}}}$: error en el ajuste (parte real), de cada componente de la matriz identidad $[I]$
- $\varepsilon_{Id_{I_{rs}}}$: error en el ajuste (parte compleja), de cada componente de la matriz identidad $[I]$

Antes de proceder con la metodología empleada, respecto a las variables utilizadas indicar que:

- Todas las masas que no son de la diagonal principal se fijan a cero; mientras que las que pertenecen a la diagonal principal se definen como variables positivas (y conocidas).

- La parte compleja de la matriz de masa es siempre nula, evidentemente.
- Como el lector de sobra conoce, la matriz identidad $[I]$, esta formada por unos en la diagonal principal y valores nulos en el resto; sin embargo al conjunto de variables constituido por cada una de las componentes de la misma, no se les aplica ninguna restricción, al objeto de comprobar la idoneidad del cálculo realizado.
- Debido a la metodología del análisis de regresión efectuado $\varepsilon_{Id_r rs}$ y $\varepsilon_{Id_i rs}$ son siempre positivas.

Como se había mencionado, una variable auxiliar aux_{kr} va a ser utilizada para recoger temporalmente el valor del producto $[M] \{\Phi_r\}$

$$aux_{kr} = \sum_j m_{kj} \Phi_{jr} \quad (2.11)$$

tanto para la parte real como para la compleja

$$(aux_{Rkr} + aux_{Rkr} i) = \sum_j \left(\underbrace{m_{Rkj}}_a + \underbrace{m_{Ikj} i}_b \right) \left(\underbrace{\Phi_{Rjr}}_c + \underbrace{\Phi_{Ijr} i}_d \right) \quad (2.12)$$

dado que la parte compleja de la masa, debe ser siempre nula, resulta, identificando términos reales y complejos a ambos lados de la igualdad anterior

$$aux_{Rkr} = \sum_j m_{Rkj} \Phi_{Rjr} \quad (2.13)$$

$$aux_{Ikr} = \sum_j m_{Rkj} \Phi_{Ijr}$$

la primera partición buscada. Una vez que se tiene la solución para todas y cada una de las componentes del producto $[M] \{\Phi_r\}$, se procede al cálculo del producto del resultado del mismo por el vector modal traspuesto $\{\Phi_r\}^T [aux]$

$$I_{rs} = \sum_j \Phi_{jr} \text{aux}_{js} \quad (2.14)$$

entonces aplicando la partición utilizada en otras ocasiones,

$$(I_{Rrs} + I_{Irs} i) = \sum_j \left(\underbrace{\Phi_{Rjr}}_a + \underbrace{\Phi_{Ijr}}_b i \right) \left(\underbrace{\text{aux}_{Rjs}}_c + \underbrace{\text{aux}_{Ijs}}_d i \right) \quad (2.15)$$

se obtiene, identificando términos reales y complejos, la segunda partición

$$I_{Rrs} = \sum_j \Phi_{Rjr} \text{aux}_{Rjs} - \sum_j \Phi_{Ijr} \text{aux}_{Ijs} \quad (2.16)$$

$$I_{Irs} = \sum_j \Phi_{Rjr} \text{aux}_{Ijs} + \sum_j \Phi_{Ijr} \text{aux}_{Rjs}$$

Finalmente, para culminar esta última etapa, se procede al ajuste de la matriz identidad; para ajustar la solución de todas y cada una de las componentes de la ecuación que constituía la primera condición de ortogonalidad $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$, se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto

$$\sum \left| [\Phi]^T [M] [\Phi] - [I] \right|_R + \sum \left| [\Phi]^T [M] [\Phi] - [I] \right|_I \quad (2.17)$$

La estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_r \sum_s \dots + (\epsilon_{Id_r rs} + \epsilon_{Id_i rs}) \quad (2.18)$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen -junto con las de, la etapa anterior- el conjunto de soluciones admisibles

$$\begin{aligned}
 [\Phi]^T [M] [\Phi] - [I] &\leq [\epsilon_{Id}] \\
 [I] - [\Phi]^T [M] [\Phi] &\leq [\epsilon_{Id}] \\
 [\epsilon_{Id}] &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

tanto para la parte real como para la compleja. Por consiguiente, según la nomenclatura utilizada, se reducen a

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 I_{R\ rs} - \epsilon_{Id_{R\ rs}} \leq 1 \\
 I_{R\ rs} + \epsilon_{Id_{R\ rs}} \geq 1 \\
 \epsilon_{Id_{R\ rs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{ para } r = s \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 I_{R\ rs} - \epsilon_{Id_{R\ rs}} \leq 0 \\
 I_{R\ rs} + \epsilon_{Id_{R\ rs}} \geq 0 \\
 \epsilon_{Id_{R\ rs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{ para } r \neq s \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 I_{I\ rs} - \epsilon_{Id_{I\ rs}} \leq 0 \\
 I_{I\ rs} + \epsilon_{Id_{I\ rs}} \geq 0 \\
 \epsilon_{Id_{I\ rs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{ parte Compleja}
 \end{array} \right\} \text{ parte Real} \tag{2.20}$$

El conjunto de estas últimas expresiones (2.20), junto con 2.19, representa la contribución de esta última etapa, al conjunto de restricciones y a la función objetivo del problema total, respectivamente. Es preciso destacar que, obligar a la matriz modal $[\Psi]$ a cumplir la condición de ortogonalidad $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$ es equivalente a normalizar los vectores de la misma respecto de la matriz de masa; por lo que $\Psi_{R\ jr} \equiv \Phi_{R\ jr}$ y $\Psi_{I\ jr} \equiv \Phi_{I\ jr}$.

La función objetivo completa y el conjunto total de restricciones se muestra a continuación. Las variables que componen las mismas, poseen las definiciones que se han mostrado en las etapas previas. Así pues, la estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_j \sum_i (\varepsilon_{R_{ijcd}} + \varepsilon_{I_{ijcd}}) + \sum_r \sum_s (\varepsilon_{Id_{rs}} + \varepsilon_{Id_1rs}) \quad (2.21)$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el conjunto de soluciones admisibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} X_{R_{jicd}} - \text{dato}_{R_{jicd}} \leq \varepsilon_{R_{ijcd}} \\ \text{dato}_{R_{jicd}} - X_{R_{jicd}} \leq \varepsilon_{R_{ijcd}} \\ \varepsilon_{R_{ijcd}} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte Real} \\ \left. \begin{array}{l} X_{I_{jicd}} - \text{dato}_{I_{jicd}} \leq \varepsilon_{I_{ijcd}} \\ \text{dato}_{I_{jicd}} - X_{I_{jicd}} \leq \varepsilon_{I_{ijcd}} \\ \varepsilon_{I_{ijcd}} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte Compleja} \end{array} \right\} \text{ Ajuste de la respuesta en cada grado de libertad}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} I_{R_{rs}} - \varepsilon_{Id_{rs}} \leq 1 \\ I_{R_{rs}} + \varepsilon_{Id_{rs}} \geq 1 \\ \varepsilon_{Id_{rs}} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ para } r = s \\ \left. \begin{array}{l} I_{R_{rs}} - \varepsilon_{Id_{rs}} \leq 0 \\ I_{R_{rs}} + \varepsilon_{Id_{rs}} \geq 0 \\ \varepsilon_{Id_{rs}} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ para } r \neq s \end{array} \right\} \text{ parte Real}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} I_{I_{rs}} - \varepsilon_{Id_1rs} \leq 0 \\ I_{I_{rs}} + \varepsilon_{Id_1rs} \geq 0 \\ \varepsilon_{Id_1rs} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte Compleja} \end{array} \right\} \text{ Imposición condiciones de ortogonalidad}$$

(2.22)

para $i = 1, \dots, n$ donde n es el número de muestras o de puntos, en los que se ha recogido la respuesta.

2.2.1. Ejemplo 2.1

A continuación, se muestran los resultados obtenidos - utilizando la metodología expuesta- para un sistema de 6 grados de libertad, homólogo a un modelo estructural correspondiente a un edificio simple, y con una disposición de sensores como la indicada en el apartado 2.1 (tabla 2.1); el modelo espacial empleado para la generación de datos, se incluye como anexo 1.

Los datos de partida para alimentar el algoritmo de resolución, han sido elaborados a partir del citado modelo, según se describe en el apartado 1.5.1. La representación gráfica de los mismos, la respuesta (desplazamiento), en el dominio de la frecuencia, para cada uno de los grados de libertad y conjunto de datos definidos, se expone en las figuras 2.5 a la 2.14.

Como se había mencionado al inicio del presente capítulo, la historia de cargas en cada conjunto de datos puede ser totalmente diferente, en tipología y/o magnitud de la misma; así como que, no es necesario efectuar ningún tipo de control o medición sobre la excitación de la estructura.

Los casos de carga simulados, introducidos, se corresponden con una excitación blanca. Ahora bien con el fin de verificar la idoneidad del método propuesto, se ha sometido al modelo estructural citado a una situación de carga extrema, que sin lugar a dudas supera a la que se puede encontrar en la práctica habitual. Esta última ha consistido en ir variando proporcionalmente en cada conjunto de datos la amplitud de la excitación blanca; de forma que entre el primero y último conjuntos de datos (tabla 2.1) hay una diferencia del 100%.

Esta variación del nivel de excitación que se aplica entre todos y cada uno de los conjuntos de datos, es sin lugar a dudas muchísimo mayor, que la esperada en la captación consecutiva de los mismos sobre la construcción que se pretende analizar. Piénsese si no -por un momento- en la tipología de la excitación: cargas de viento sobre edificios, olas de mar actuando sobre estructuras offshore, cargas de tráfico sobre puentes, etc.

Seguidamente, se indican los resultados obtenidos para todos y cada uno de los modos de vibración que componen la matriz modal $[\Phi]$ normalizada respecto de la masa, así como el intervalo de frecuencias seleccionado para identificar cada modo, y dentro de ellos el pico de frecuencias (resonancia o frecuencia natural) asociado a cada uno de los mismos, para finalmente mostrar el resultado alcanzado para el proceso de normalización de los vectores modales en cada uno de los modos (producto $\{\Phi_r\}^T [M] \{\Phi_r\}$), que debería ser igual a $1 + 0i$; lo cual representa una de las condiciones para que el ajuste sea óptimo.

Como se había mencionado, es conveniente que el/los grado/s de libertad en el/los que se ubique/n el/los sensor/es de referencia tengan una respuesta (vibración) significativa o al menos, una cierta contribución en los modos de vibración que se pretenden identificar. Si no se cumple lo anterior, los resultados serán inexactos e incluso -si el nivel de vibración es bajo- no representativos.

La solución analítica exacta del problema directo, para el modelo espacial ya comentado (anexo 1), puede verse en el anexo 3. Si se observan los resultados exactos analíticos de la matriz modal (anexo 3, apartado 2.1) y en particular los desplazamientos del grado de libertad en el que se decidió ubicar el sensor de referencia -planta 6^a- la cual se corresponde con la última fila de la misma; nótese que los desplazamientos en los modos 1 y 2 (última y penúltima columna respectivamente) tienen una contribución notable (son mayores que el resto), lo que favorece que se alcance un ajuste excelente de resultados; en cambio, para los modos 5 y 6 (segunda y primera columna respectivamente) sus desplazamientos son muy bajos y el ajuste es mas pobre.

Por otra parte, estos dos últimos modos de vibración, tienen un interés menor, dado que sus periodos de oscilación son más bajos. A pesar de todo, si se requiriese obtener una identificación mejor de los mismos, es necesario situar el sensor de referencia en otro grado de libertad más adecuado.

Para identificar posiciones favorables de el/los sensor/es de referencia -para cierto/s modo/s de interés- basta con localizar filas de la matriz modal, en que los desplazamientos correspondientes a esa planta o grado de libertad en el/los modo/s que se pretenden identificar, sean lo mayores posibles. A este respecto, un análisis previo por elementos finitos de los modos de vibración de la estructura que se desea analizar experimentalmente, permite dar una primera idea de los modos de interés, grados de libertad para definir los mismos, así como los conjuntos de datos necesarios y la ubicación y número de sensores de referencia, para que todas las direcciones medidas queden bien representadas en todos los conjuntos de datos.

A modo de ejemplo, -y para evitar la duplicidad de información- se introduce únicamente el fichero de entrada GAMS que resuelve el problema del ajuste local para el modo 2 del sistema bajo estudio (anexo 2).

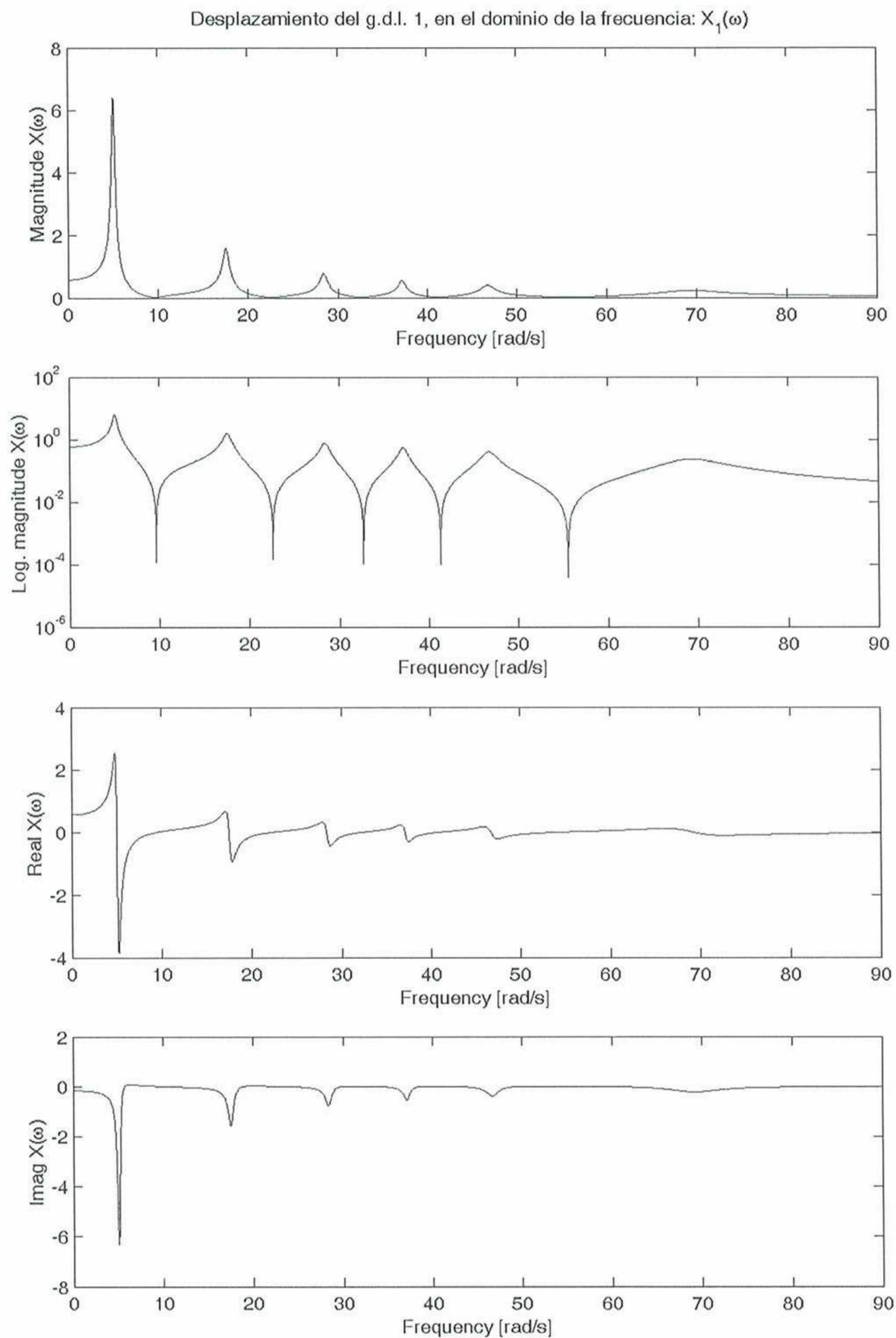


Fig. 2.5 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 1, perteneciente al **Conjunto de datos nº 1**; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 1ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

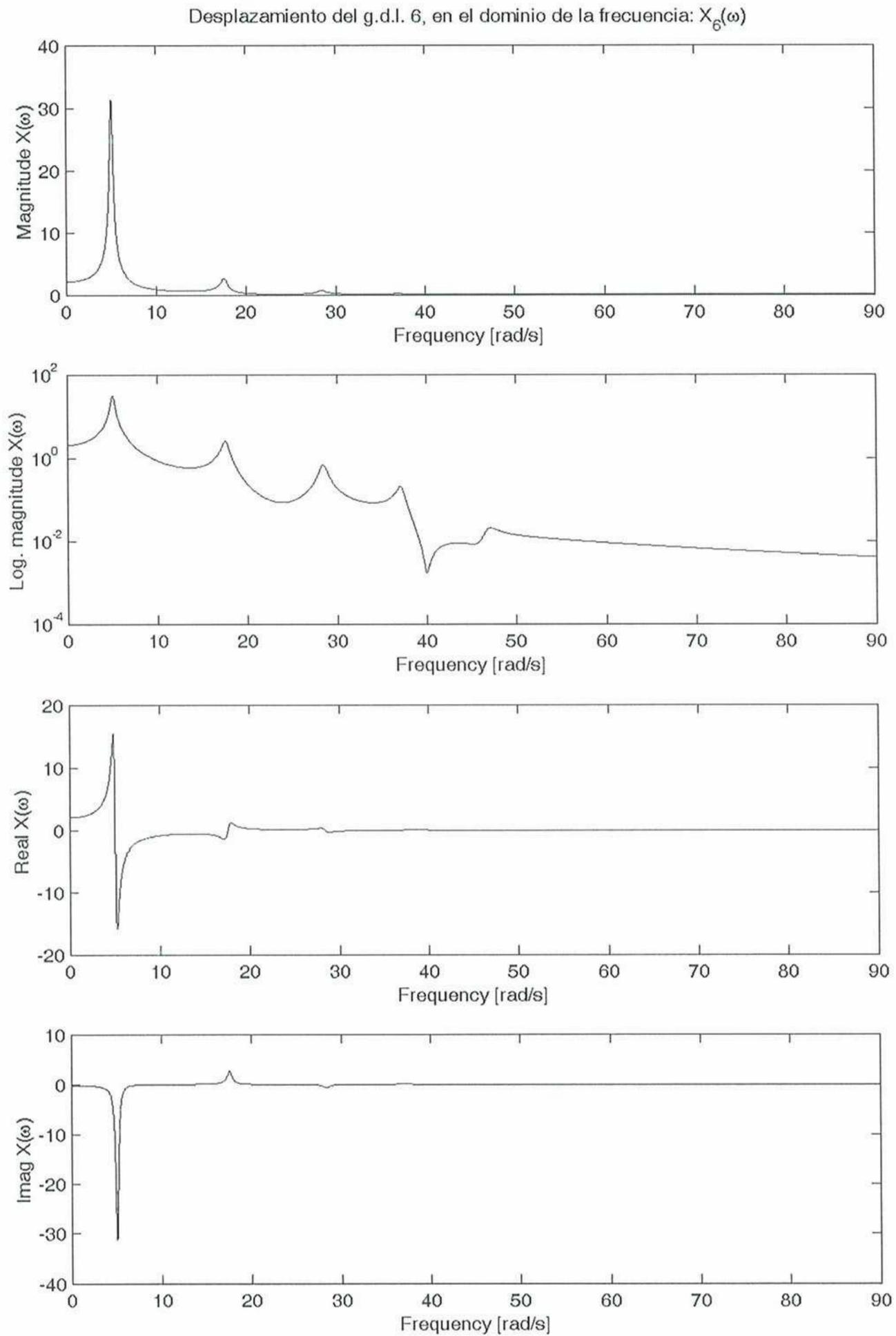


Fig. 2.6 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 6, perteneciente al **Conjunto de datos nº 1**; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 1ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

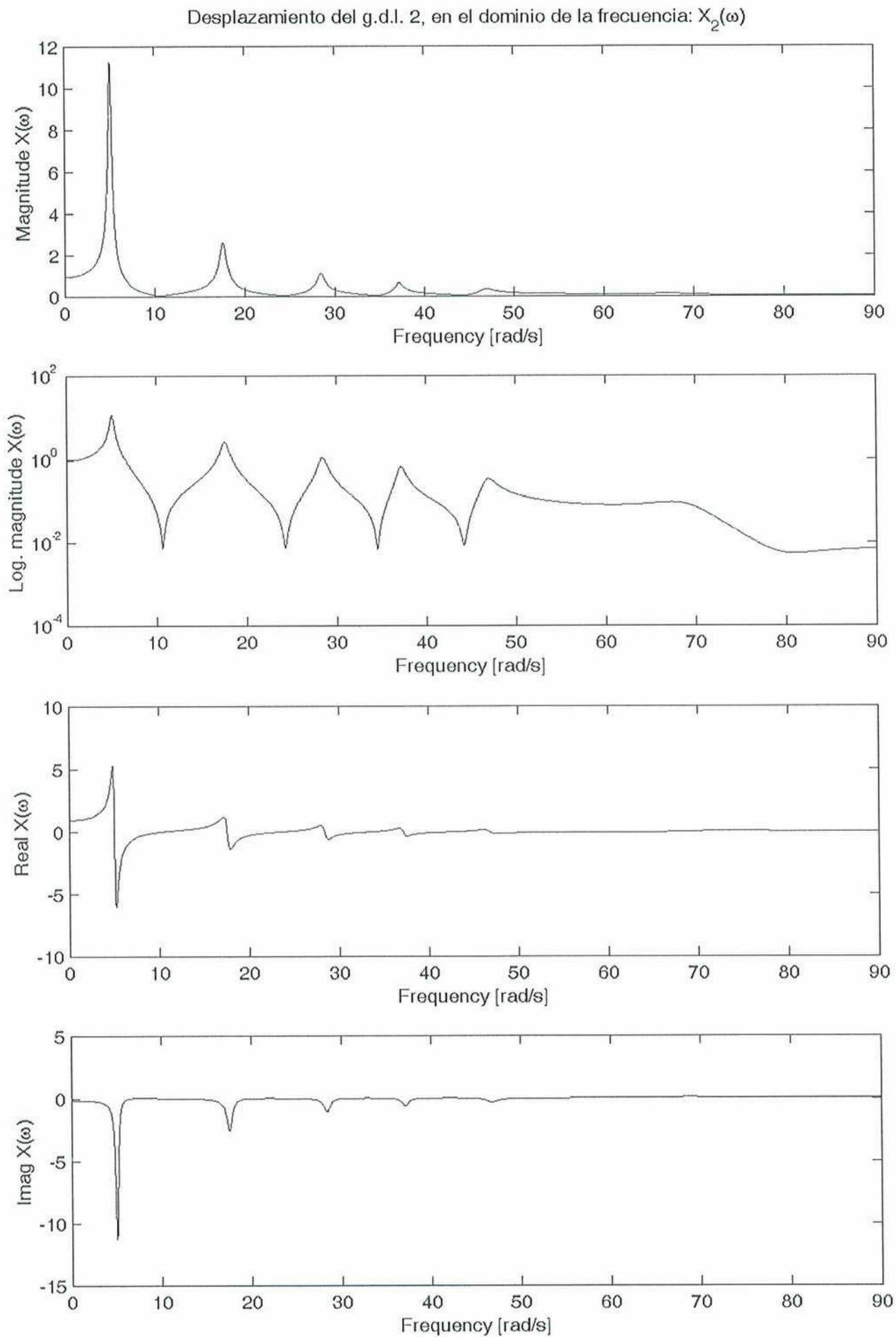


Fig. 2.7 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 2, perteneciente al Conjunto de datos n° 2; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 2ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

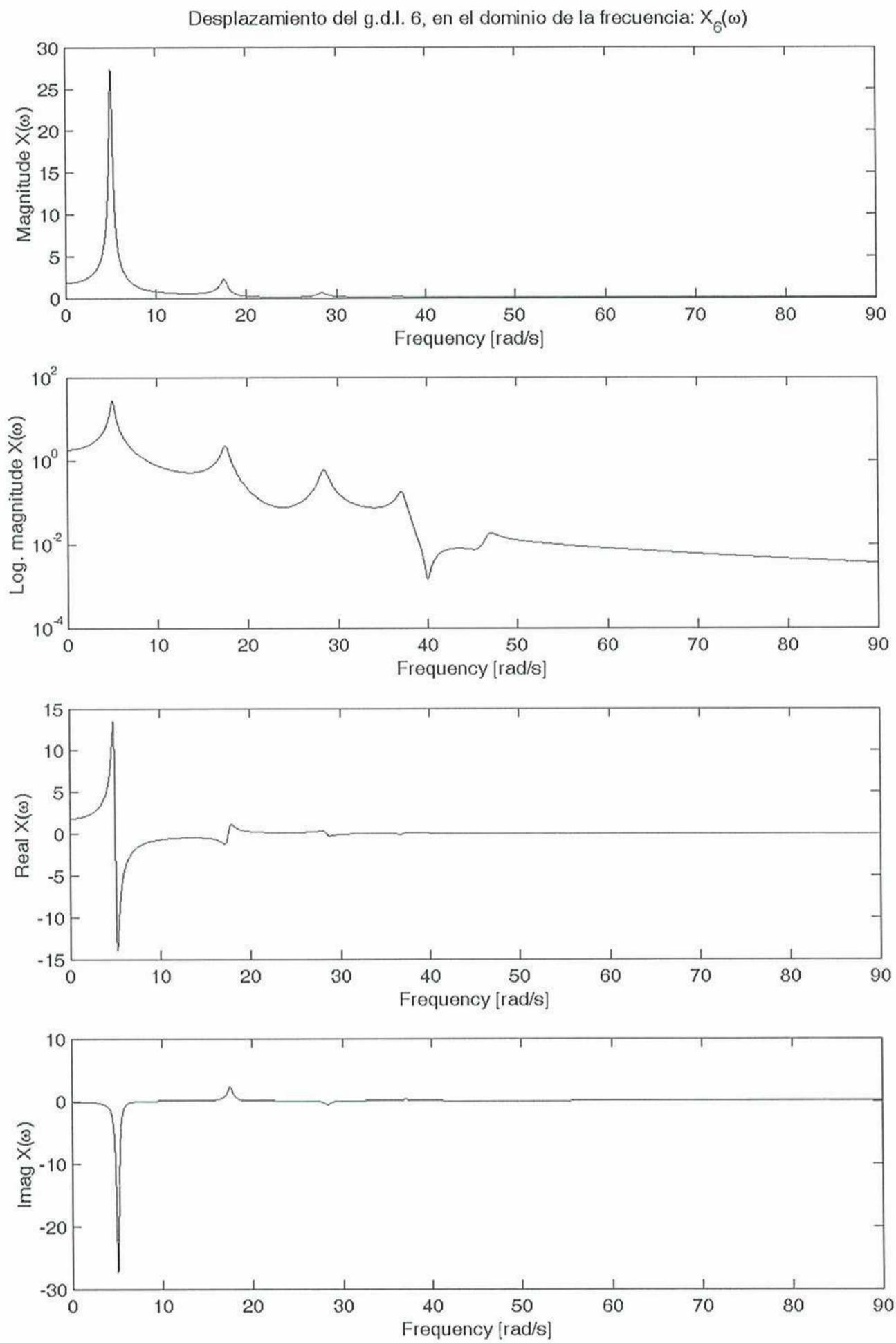


Fig. 2.8 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 6, perteneciente al Conjunto de datos n° 2; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 2ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

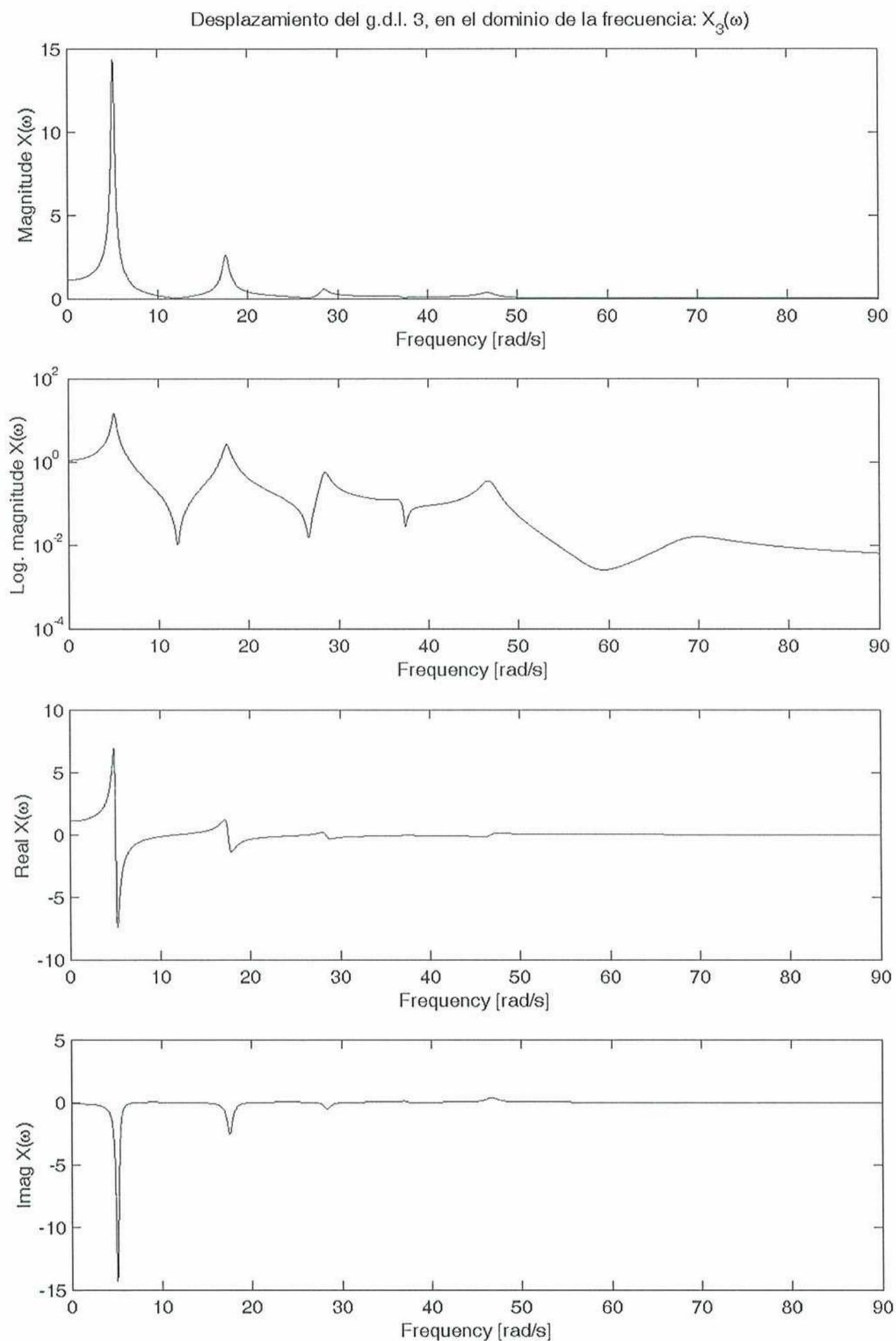


Fig. 2.9 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 3, perteneciente al Conjunto de datos n° 3; ubicación de sensores (figura 2.2):

- Sensor adicional: planta 3ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

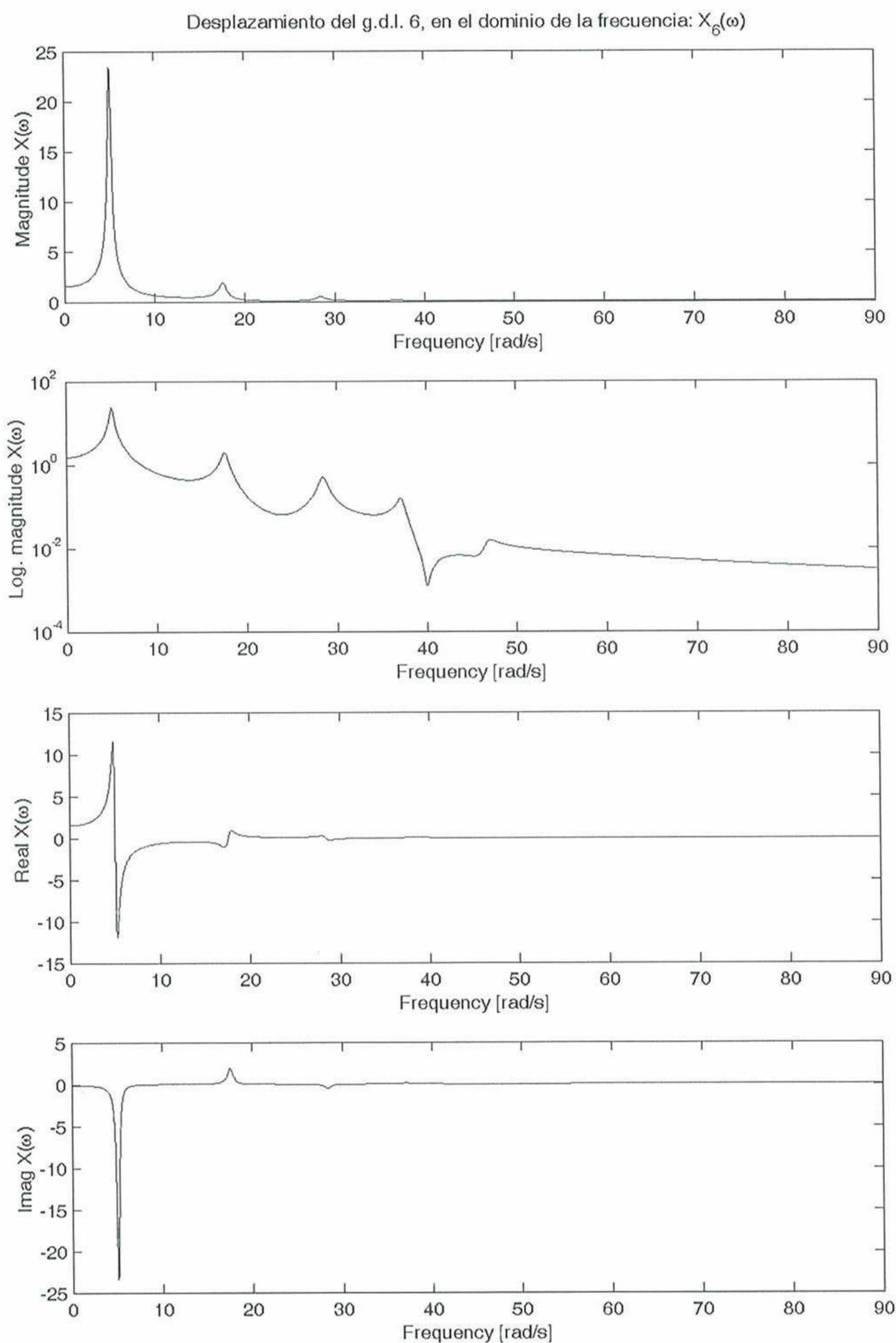


Fig. 2.10 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 6, perteneciente al Conjunto de datos nº 3; ubicación de sensores (figura 2.2):

- Sensor adicional: planta 3ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

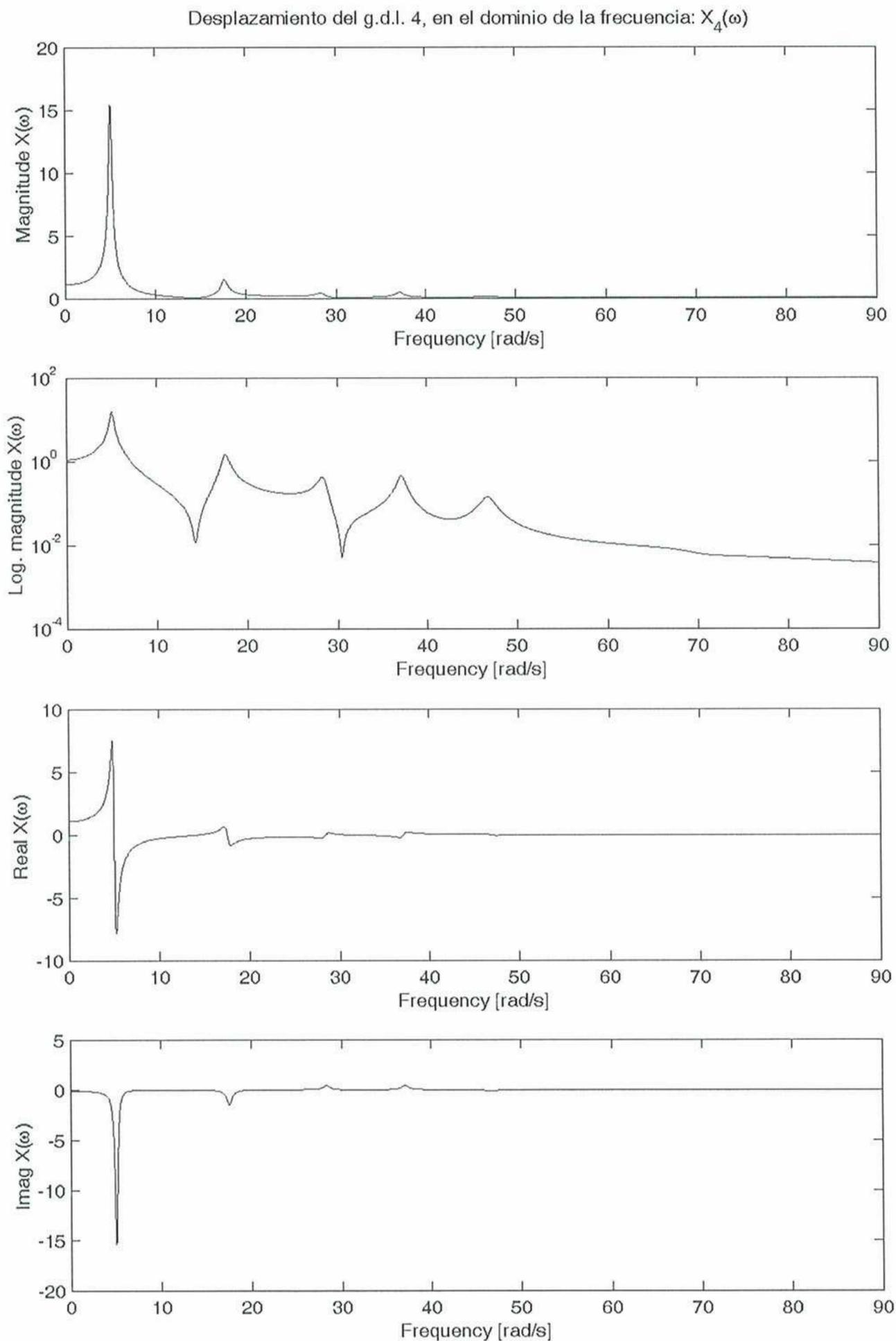


Fig. 2.11 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 4, perteneciente al Conjunto de datos n° 4; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 4ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

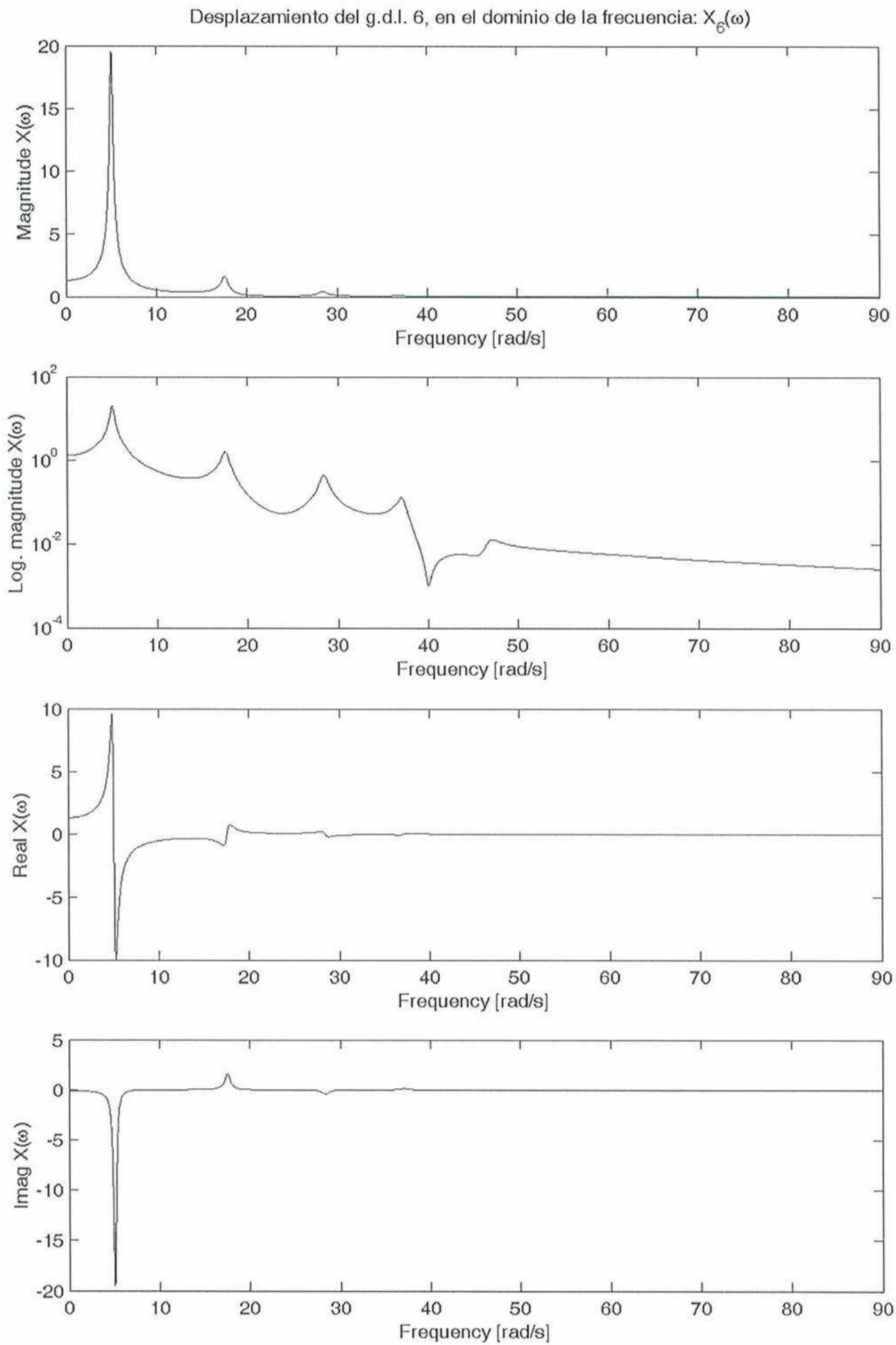


Fig. 2.12 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 6, perteneciente al Conjunto de datos n° 4; ubicación de sensores:

- Sensor adicional: planta 4ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

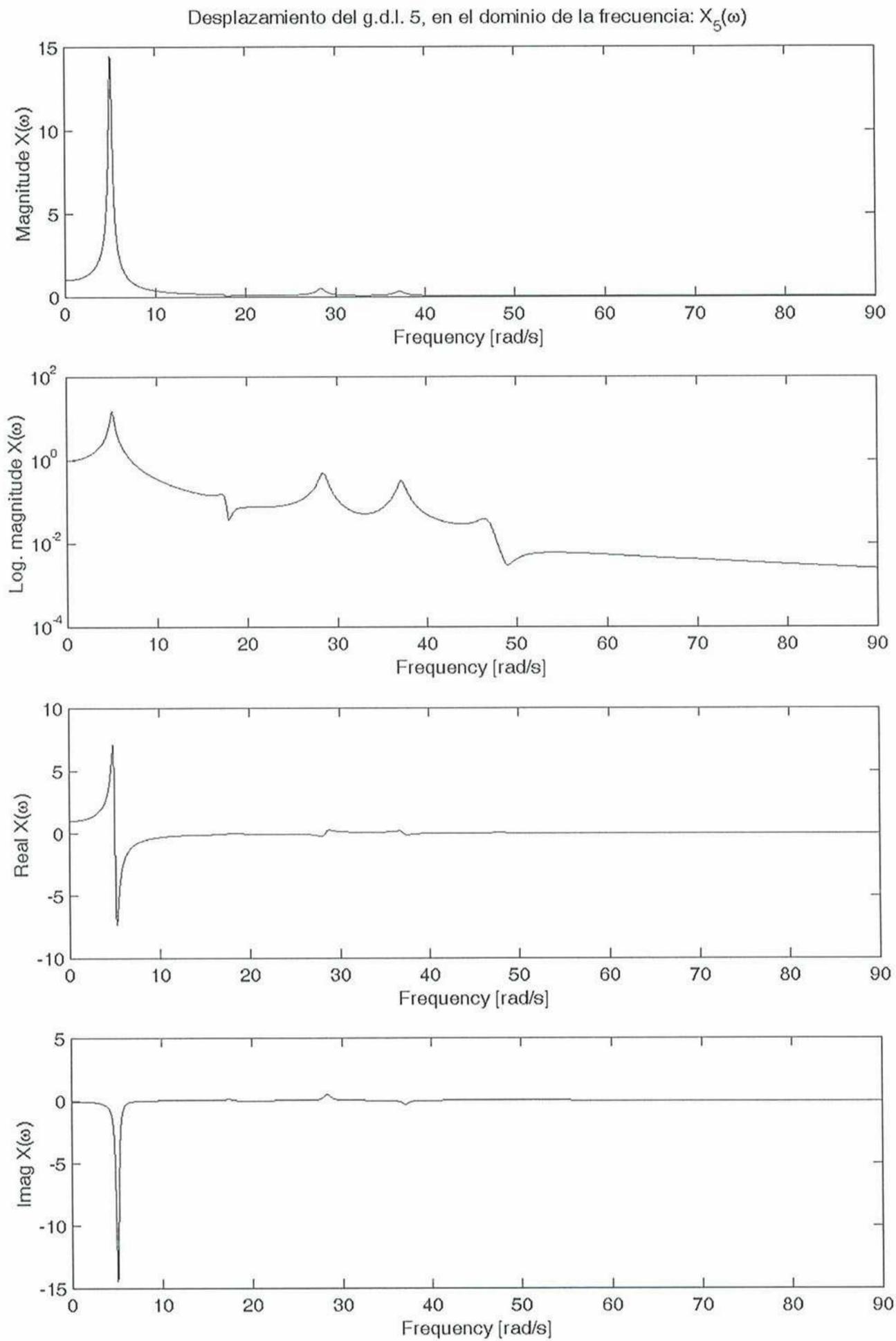


Fig. 2.13 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 5, perteneciente al Conjunto de datos n° 5; ubicación de sensores (figura 2.1):

- Sensor adicional: planta 5ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

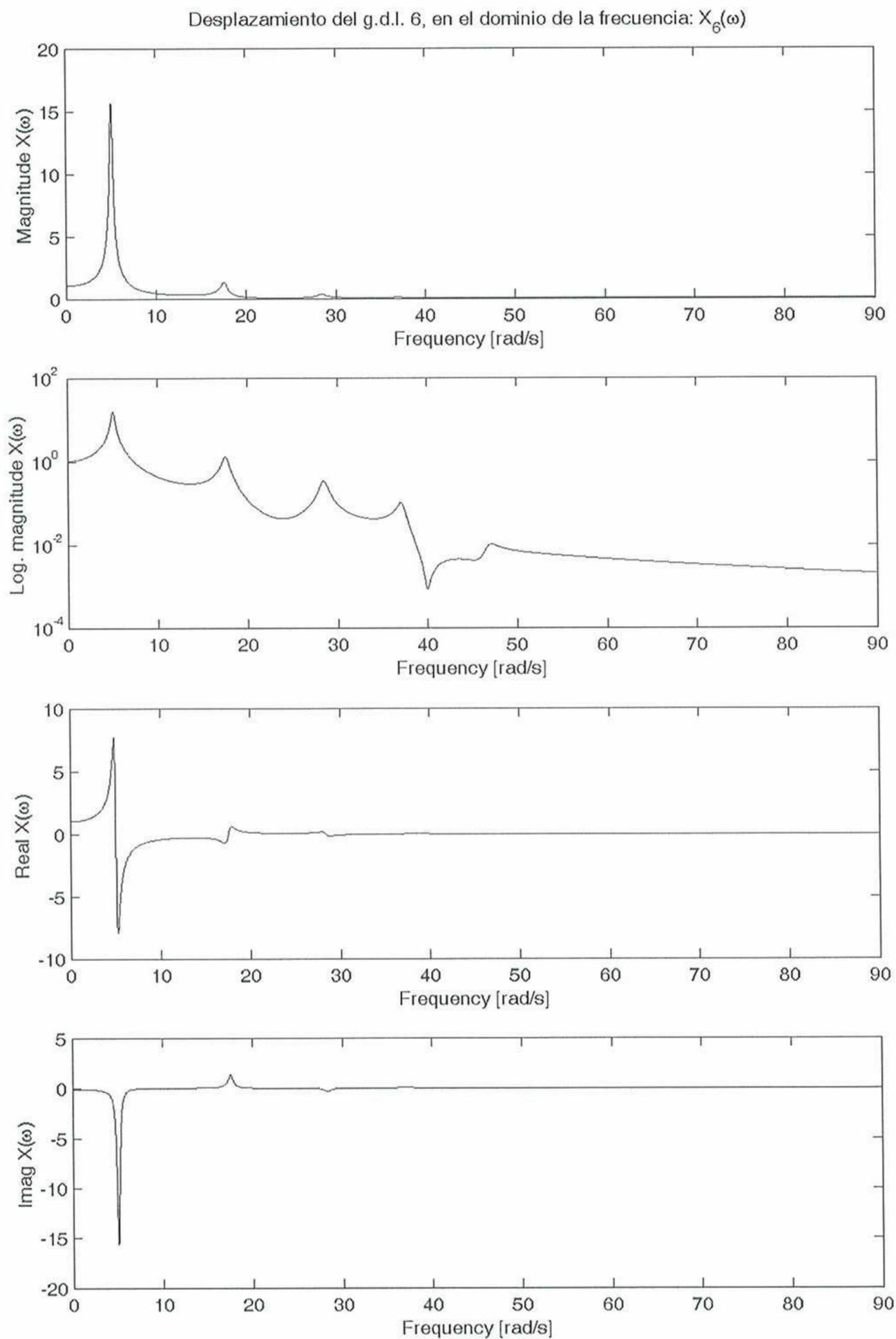


Fig. 2.14 Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 6, perteneciente al Conjunto de datos nº 5; ubicación de sensores (figura 2.1):

- Sensor adicional: planta 5ª.
- Sensor de referencia: planta 6ª.

Modo nº 1		
Frecuencia natural: 5.06 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 3.00 ÷ 7.00 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.1	0.07580879	-0.01570928i
2.1	0.15458661	-0.01073805i
3.1	0.22923621	-0.00624604i
4.1	0.29514051	-0.00194234i
5.1	0.34598707	0.00160544i
6.1	0.37473300	0.00370131i
Resultado producto $\{\Phi_1\}^T [M] \{\Phi_1\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

Modo nº 2		
Frecuencia natural: 17.55 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 15.50 ÷ 19.50 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.2	-0.19447772	0.04712946i
2.2	-0.38533777	0.02075786i
3.2	-0.44916763	-0.00148839i
4.2	-0.30673926	-0.01668568i
5.2	0.02557148	-0.01014640i
6.2	0.33790263	0.00196421i
Resultado producto $\{\Phi_2\}^T [M] \{\Phi_2\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

Modo nº 3		
Frecuencia natural: 28.43 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 27.50 ÷ 29.50 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.3	-0.27113921	0.04640813i
2.3	-0.45219535	0.02853318i
3.3	-0.29887373	0.01957230i
4.3	0.25490507	0.03055598i
5.3	0.35360889	0.02215090i
6.3	-0.25037048	0.00957389i
Resultado producto $\{\Phi_3\}^T [M] \{\Phi_3\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

Modo nº 4		
Frecuencia natural: 37.16 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 35.25 ÷ 39.25 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.4	0.30028143	-0.05823896i
2.4	0.43925482	-0.00658536i
3.4	-0.19313296	-0.01683007i
4.4	-0.41034995	-0.01843085i
5.4	0.36491375	-0.00728318i
6.4	-0.11587886	0.00457855i
Resultado producto $\{\Phi_4\}^T [M] \{\Phi_4\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

Modo nº 5		
Frecuencia natural: 46.77 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 44.75 ÷ 48.75 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.5	0.47009579	-0.12455943i
2.5	0.35870002	-0.17302543i
3.5	-0.66292997	-0.10168329i
4.5	0.26979625	-0.05398376i
5.5	-0.10866856	-0.07356473i
6.5	0.01184509	-0.01938049i
Resultado producto $\{\Phi_5\}^T [M] \{\Phi_5\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

Modo nº 6		
Frecuencia natural: 68.95 rad/s		
Intervalo de frecuencias de cálculo: 67.00 ÷ 71.00 rad/s		
Componente matriz modal $[\Phi]$	Real	Compleja
1.6	1.24074239	-0.10425904i
2.6	-0.51574135	-0.13843451i
3.6	0.09381650	-0.07213252i
4.6	-0.01975929	-0.06061617i
5.6	-0.00420641	-0.04697640i
6.6	-0.00466698	-0.03887326i
Resultado producto $\{\Phi_6\}^T [M] \{\Phi_6\}$: 1.00000000 + 0.00000000i		

CAPITULO 3

Conclusiones generales

A continuación, se exponen las conclusiones generales más destacadas, que se pueden extraer de la exposición efectuada en los capítulos previos. A su vez, las mismas se pueden dividir, por una parte, en las propias de utilizar el algoritmo de identificación modal expuesto, y por otra, en las proporcionadas por adoptar una tipología de medición en la que solo se registra la respuesta de la estructura (método *multi output*).

Con respecto a las primeras, cabe destacar:

- Se abre un nuevo camino para la resolución -a través de métodos de optimización- del problema inverso en análisis modal; a partir de la respuesta del sistema, se puede identificar las frecuencias naturales y la matriz modal, utilizando el Ajuste Local de la Respuesta.
 - Se presentan técnicas de descomposición para trabajar con magnitudes complejas, con la parte real e imaginaria por separado; incluso en operaciones matriciales producto, así como un ejemplo de las mismas para la implementación en software comercial de optimización.
 - permite -incluso midiendo únicamente la respuesta- la determinación de los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa en la situación general de amortiguamiento estructural; es decir la obtención de la matriz modal $[\Phi]$, solucionando de esta forma el problema inverso, desde las mediciones experimentales del modelo de respuesta, hasta el modelo modal $(\omega_r, [\Phi])$. Frente a otros procedimientos, que solo alcanzan a la determinación de valores proporcionales de la respuesta, entre cada uno de los grados de libertad considerados, que componen cada uno de los modos de vibración (matriz $[\Psi]$).
 - Da una primera estimación de cada modo de interés muy rápida (tiempo de cálculo en ordenador), a partir de medidas únicamente de la respuesta en unos pocos grados de libertad.
-

-
-
- Es apto para amortiguamiento estructural o histerético.
 - A su vez, el rango de medida puede ser también muy limitado, en las proximidades de una frecuencia o modo de vibración de interés.
 - A pesar de que la estimación de parámetros es local (frecuencias naturales, y matriz modal $\omega_r, [\Phi]$). Es posible obtener un conjunto de soluciones único y consistente de estas propiedades procesando toda la información, correspondiente a cada modo de vibración, simultáneamente. En principio, esto es preferible a las formas de promediado de los resultados de varios análisis independientes de -por ejemplo- una colección de funciones de respuesta en frecuencia.

y finalmente, con respecto a las segundas:

- El ensayo consume menos tiempo y es mucho más económico, ya que el equipo para excitar la estructura no es necesario.
 - El ensayo no interrumpe la operación de la estructura.
 - Permite realizar análisis dinámicos de grandes estructuras con equipos muy limitados, en los que el número de canales de captación es mucho menor que el número de grados de libertad con los que se desea definir el movimiento de la estructura; manteniendo uno o varios sensores fijos (de referencia) en todas las mediciones.
 - La respuesta medida es representativa de las condiciones reales de operación de la estructura.
-

ANEXO 1

Modelo espacial del ejemplo 2.1

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 2+0.3i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ANEXO 2

***Fichero de entrada GAMS
para el ejemplo 2.1***

```
$title Estimacion directa / amortiguamiento estructural 6 g.d.l.;
```

```
file out / ed6_5crfi.out / ;
```

```
*file out / C:\Luis_Manuel\gams_side\est_dir\ed6\ed6_5crfi.out / ;
```

```
put out;
```

```
sets
```

```
  j indice de filas y columnas / 1*6 /
```

```
  cd indice de conjuntos de datos / 1*5 /
```

```
  i indice de datos / 63A*79A, 63B*79B, 63C*79C, 63D*79D, 63E*79E /
```

```
  r indice de modos considerados / 5*5 / ;
```

```
alias(j,k);
```

```
alias(r,s);
```

```
*parameter d(i) valores de omega para los que se intro. datos
```

```
* /
```

```
*1 0
```

```
*2 0.25
```

```
*3 0.5
```

```
*4 0.75
```

```
*5 1
```

```
*6 1.25
```

```
*7 1.5
```

```
...
```

```
...
```

```
...
```

```
*359 89.5
```

```
*360 89.75
```

```
*361 90
```

```
* / ;
```

table d_R(i,j,cd) matriz de datos (parte real)

	5.5	6.5
63E	-0.14786514931132	-0.35045711481226
64E	-0.14553523090377	-0.37345802454444
65E	-0.14379094098160	-0.40427129733449
66E	-0.14269701175985	-0.44606080846847
67E	-0.14226108224159	-0.50347111728019
68E	-0.14213207792135	-0.58196338205355
69E	-0.14015234115411	-0.67783715153468
70E	-0.12557069093733	-0.70421144729025
71E	-0.06954827529884	-0.24059415752416
72E	-0.02301576601587	0.49230073403210
73E	-0.03398245121393	0.57205531378821
74E	-0.04962637423316	0.45984709765294
75E	-0.05958901734912	0.35846793828488
76E	-0.06556213512978	0.28456475665885
77E	-0.06919178581348	0.23122633510213
78E	-0.07142956328917	0.19187074013805
79E	-0.07281287934535	0.16208084792434
+		
	4.4	6.4
63D	0.11692290186841	-0.43807139351533
64D	0.15330268222133	-0.46682253068055
65D	0.19839452199939	-0.50533912166811
66D	0.25608638639794	-0.55757601058558
67D	0.33221925237211	-0.62933889660023
68D	0.43423944248796	-0.72745422756694
69D	0.56099066963788	-0.84729643941835
70D	0.62060360902585	-0.88026430911281
71D	0.13093188150269	-0.30074269690519
72D	-0.71275469264112	0.61537591754013

73D	-0.82811803841598	0.71506914223526
74D	-0.70972266931147	0.57480887206617
75D	-0.59582515001723	0.44808492285610
76D	-0.51008257073688	0.35570594582356
77D	-0.44645540004053	0.28903291887767
78D	-0.39819634106316	0.23983842517256
79D	-0.36061107898421	0.20260105990542

+	3.3	6.3
63C	0.35999494323384	-0.52568567221839
64C	0.41996053182638	-0.56018703681666
65C	0.49493966995451	-0.60640694600173
66C	0.59135809761514	-0.66909121270270
67C	0.71864576955551	-0.75520667592028
68C	0.88797765025386	-0.87294507308032
69C	1.09250299040124	-1.01675572730202
70C	1.15960063068223	-1.05631717093537
71C	0.24732399565024	-0.36089123628623
72C	-1.21213815247431	0.73845110104815
73C	-1.36756502870519	0.85808297068231
74C	-1.13657802928367	0.68977064647941
75C	-0.92618605579351	0.53770190742732
76C	-0.77047279801459	0.42684713498827
77C	-0.65589632278194	0.34683950265320
78C	-0.56939095769331	0.28780611020707
79C	-0.50215359986308	0.24312127188651

+	2.2	6.2
63B	0.43744076431732	-0.61329995092146
64B	0.49547534848921	-0.65355154295277
65B	0.56787392695509	-0.70747477033535

66B	0.66054249925476	-0.78060641481982
67B	0.78184338180931	-0.88107445524033
68B	0.94052947948534	-1.01843591859371
69B	1.12375331938111	-1.18621501518569
70B	1.14554584262110	-1.23237003275793
71B	0.17373448516132	-0.42103977566727
72B	-1.24964205191393	0.86152628455618
73B	-1.34371044192056	1.00109679912936
74B	-1.08343850483882	0.80473242089264
75B	-0.85971802603558	0.62731889199854
76B	-0.69713291266141	0.49798832415298
77B	-0.57852469118363	0.40464608642873
78B	-0.48936288446557	0.33577379524159
79B	-0.42018438632708	0.28364148386759
+	1.1	6.1
63A	0.29976261093476	-0.70091422962452
64A	0.33210044519585	-0.74691604908888
65A	0.37193430132886	-0.80854259466897
66A	0.42199167342749	-0.89212161693693
67A	0.48561124393097	-1.00694223456038
68A	0.56423740752732	-1.16392676410710
69A	0.64074869408719	-1.35567430306936
70A	0.58268891198246	-1.40842289458050
71A	-0.09346500268567	-0.48118831504831
72A	-0.89018008795432	0.98460146806420
73A	-0.85036133390797	1.14411062757641
74A	-0.64859036780437	0.91969419530588
75A	-0.49388246769683	0.71693587656976
76A	-0.38605154822660	0.56912951331770
77A	-0.30913096259547	0.46245267020427

```

78A   -0.25211061075905   0.38374148027610
79A   -0.20828319228155   0.32416169584868
;
```

```
table d_I(i,j,cd) matriz de datos (parte imag)
```

```

           5.5           6.5
63E   0.01412767112901   0.05059148121400
64E   0.01614208975415   0.06310125484154
65E   0.01888024292472   0.08138035743412
66E   0.02277970332005   0.10961661747993
67E   0.02867060033736   0.15645620920798
68E   0.03824703020010   0.24159197915576
69E   0.05506031617957   0.41398733969600
70E   0.08407737556839   0.78348165934432
71E   0.10357647518970   1.27478738695017
72E   0.05421745510588   0.98914399280971
73E   0.01374197568508   0.49078484589559
74E   0.00020522527874   0.25258495845107
75E   -0.00388375447095   0.14518708302598
76E   -0.00499044939816   0.09125393185202
77E   -0.00508034526202   0.06120897906050
78E   -0.00480711622241   0.04304077199693
79E   -0.00440987958656   0.03133129368785

+           4.4           6.4
63D   -0.03852696428480   0.06323935151750
64D   -0.05103461647792   0.07887656855193
65D   -0.06962903382064   0.10172544679265
66D   -0.09886921794964   0.13702077184992
67D   -0.14828616985985   0.19557026150998
68D   -0.23990578097732   0.30198997394470
```

69D	-0.42955973222075	0.51748417462000
70D	-0.84734074172058	0.97935207418040
71D	-1.43366896923485	1.59348423368771
72D	-1.15426724996399	1.23642999101214
73D	-0.59303986853794	0.61348105736949
74D	-0.31543173750574	0.31573119806384
75D	-0.18703944318584	0.18148385378248
76D	-0.12106086685248	0.11406741481503
77D	-0.08348082248196	0.07651122382562
78D	-0.06025207741104	0.05380096499616
79D	-0.04494863884875	0.03916411710981
+	3.3	6.3
63C	-0.09144157337042	0.07588722182100
64C	-0.11631275525811	0.09465188226231
65C	-0.15264996717720	0.12207053615118
66C	-0.20879731118362	0.16442492621990
67C	-0.30200252478325	0.23468431381198
68C	-0.47160386202464	0.36238796873365
69C	-0.81559120133084	0.62098100954400
70C	-1.55460545278222	1.17522248901648
71C	-2.54242354656057	1.91218108042525
72C	-1.97876840151212	1.48371598921457
73C	-0.98276084624357	0.73617726884339
74C	-0.50520364855667	0.37887743767661
75C	-0.28943483330674	0.21778062453897
76C	-0.18091529994194	0.13688089777803
77C	-0.12040567146530	0.09181346859074
78C	-0.08380912640737	0.06456115799539
79C	-0.06024178604379	0.04699694053177

	2.2	6.2
+		
63B	-0.12098045469500	0.08853509212450
64B	-0.14945550837687	0.11042719597270
65B	-0.19031542410253	0.14241562550971
66B	-0.25228962599288	0.19182908058988
67B	-0.35318659212238	0.27379836611397
68B	-0.53299079057882	0.42278596352259
69B	-0.88917726125650	0.72447784446800
70B	-1.63159918592356	1.37109290385256
71B	-2.56260493222774	2.23087792716279
72B	-1.91013961111790	1.73100198741700
73B	-0.90562742546177	0.85887348031729
74B	-0.44274139794541	0.44202367728938
75B	-0.24013934844857	0.25407739529547
76B	-0.14134517478334	0.15969438074104
77B	-0.08800713232942	0.10711571335587
78B	-0.05685281095084	0.07532135099463
79B	-0.03754892954674	0.05482976395374
+	1.1	6.1
63A	-0.12138687948651	0.10118296242799
64A	-0.14415828027338	0.12620250968308
65A	-0.17579253858446	0.16276071486825
66A	-0.22212818237081	0.21923323495987
67A	-0.29472212071503	0.31291241841597
68A	-0.41855982489195	0.48318395831153
69A	-0.65126768661779	0.82797467939200
70A	-1.10170203143598	1.56696331868863
71A	-1.57057291387437	2.54957477390033
72A	-1.03988882961199	1.97828798561942
73A	-0.42431685080736	0.98156969179118

```

74A   -0.16984912272934   0.50516991690215
75A   -0.06904803737077   0.29037416605196
76A   -0.02506381328530   0.18250786370404
77A   -0.00430903601341   0.12241795812099
78A    0.00587338514084   0.08608154399386
79A    0.01081394866791   0.06266258737570

```

```
;
```

variable

```

X_real(j,i,cd)   parte real (desplaz. en el pto. j)
X_imag(j,i,cd)   parte imaginaria (desplaz. en el pto. j)
gamma_R(r,i,cd)  coef. participacion modal para modo r a la frec. i (parte real)
gamma_I(r,i,cd)  coef. participacion modal para modo r a la frec. i (parte imag.)
FI_R(j,r)        componente j del modo r (parte real)
FI_I(j,r)        componente j del modo r (parte imag)
aux_R(k,r)       matriz aux. para el cal. de la matriz identidad (parte real)
aux_I(k,r)       matriz aux. para el cal. de la matriz identidad (parte imag.)
I_R(r,r)         matriz identidad calculada (parte real)
I_I(r,r)         matriz identidad calculada (parte imag.)
cr_R             complemento residual (parte real)
cr_I             complemento residual (parte compleja)
z               objetivo;

```

positive variable

```

epsi_R(i,j,cd)   error asociado con dato i (real) para desplaz. en pto. j
epsi_I(i,j,cd)   error asociado con dato i (imag) para desplaz. en pto. j
epsiFI_R(r,j,k)  error en el ajuste de FI (parte real)
epsiFI_I(r,j,k)  error en el ajuste de FI (parte imag.)
epsiId_R(r,r)    error en el ajuste de la matriz identidad (parte real)
epsiId_I(r,r)    error en el ajuste de la matriz identidad (parte imag.)
m_R(k,j)         matriz de masa concentrada (parte real);

```

```

m_R.fx('1','1')=0.5;
m_R.fx('2','2')=1;
m_R.fx('3','3')=1.5;
m_R.fx('4','4')=2;
m_R.fx('5','5')=2.5;
m_R.fx('6','6')=3;

```

```

m_R.fx(k,j)$( ord(k) ne ord(j) )= 0 ;

```

* Todas las masas que no son de la diagonal principal se fijan a cero.

```

cr_R.up= 0.005;
cr_R.lo= -0.005;
cr_I.up= 0.005;
cr_I.lo= -0.005;

```

free variable z;

equations

* Estimaciones del desplaz. en el g.d.l. j a la frecuencia i

eq_X_real(j,i,cd) eq. estimacion del desplaz. (parte real)

eq_X_imag(j,i,cd) eq. estimacion del desplaz. (parte imag.)

* Ecu. ajuste datos para cada g.d.l.

X_R(j,i,cd) eq. ajuste desplaz. (parte real) para la muestra i

X_R_ad(j,i,cd) eq. ajuste desplaz. (parte real) para la muestra i (adicional)

X_I(j,i,cd) eq. ajuste desplaz. (parte imag.) para la muestra i

X_I_ad(j,i,cd) eq. ajuste desplaz. (parte imag.) para la muestra i (adicional)

* Ecu. producto de matrices: $FI^T m FI = Id$

eq_aux_R(k,r) cal. de m.FI (parte real)

eq_aux_I(k,r) cal. de m.FI (parte imag.)

eq_I_R(r,r) cal. de FIIt.aux (parte real)
 eq_I_I(r,r) cal. de FIIt.aux (parte imag.)

* Ecu. ajuste matriz identidad

Id_R(r,r) ajuste matriz Id (parte real)
 Id_R_ad(r,r)
 Id_I(r,r) ajuste matriz Id (parte compleja)
 Id_I_ad(r,r)

obj obj;

* Estimaciones del desplaz. en el g.d.l. j a la frecuencia i

eq_X_real(j,i,cd)\$((ord(j) eq ord(cd)) or (ord(j) eq card(j))).. X_real(j,i,cd) =e=

$$\text{sum}(r, \text{gamma_R}(r,i,cd) * \text{FI_R}(j,r)) - \text{sum}(r, \text{gamma_I}(r,i,cd) * \text{FI_I}(j,r));$$

eq_X_imag(j,i,cd)\$((ord(j) eq ord(cd)) or (ord(j) eq card(j))).. X_imag(j,i,cd) =e=

$$\text{sum}(r, \text{gamma_R}(r,i,cd) * \text{FI_I}(j,r)) + \text{sum}(r, \text{gamma_I}(r,i,cd) * \text{FI_R}(j,r));$$

* Ecu. ajuste datos para cada g.d.l.

X_R(j,i,cd)\$((ord(j) eq ord(cd)) or (ord(j) eq card(j)))..

$$(X_real(j,i,cd) + cr_R) - d_R(i,j,cd) =l= \text{epsi_R}(i,j,cd);$$

X_R_ad(j,i,cd)\$((ord(j) eq ord(cd)) or (ord(j) eq card(j)))..

$$d_R(i,j,cd) - (X_real(j,i,cd) + cr_R) =l= \text{epsi_R}(i,j,cd);$$

$X_I(j,i,cd) \$ (\text{ord}(j) \text{ eq } \text{ord}(cd)) \text{ or } (\text{ord}(j) \text{ eq } \text{card}(j)) ..$

$$(X_imag(j,i,cd) + cr_I) - d_I(i,j,cd) =l= \text{epsi_I}(i,j,cd);$$

$X_I_ad(j,i,cd) \$ (\text{ord}(j) \text{ eq } \text{ord}(cd)) \text{ or } (\text{ord}(j) \text{ eq } \text{card}(j)) ..$

$$d_I(i,j,cd) - (X_imag(j,i,cd) + cr_I) =l= \text{epsi_I}(i,j,cd);$$

* Ecu. producto de matrices: $FI \cdot m \cdot FI = Id$

$$\text{eq_aux_R}(k,r) .. \text{aux_R}(k,r) =e= \text{sum}(j, m_R(k,j) * FI_R(j,r));$$

$$\text{eq_aux_I}(k,r) .. \text{aux_I}(k,r) =e= \text{sum}(j, m_R(k,j) * FI_I(j,r));$$

$$\text{eq_I_R}(r,s) .. I_R(r,s) =e= \text{sum}(j, FI_R(j,r) * \text{aux_R}(j,s)) - \text{sum}(j, FI_I(j,r) * \text{aux_I}(j,s));$$

$$\text{eq_I_I}(r,s) .. I_I(r,s) =e= \text{sum}(j, FI_R(j,r) * \text{aux_I}(j,s)) + \text{sum}(j, FI_I(j,r) * \text{aux_R}(j,s));$$

* Ecu. ajuste matriz identidad

$$Id_R(r,s) .. I_R(r,s) - \text{epsi}Id_R(r,s) =l= 1 \$ (\text{ord}(r) \text{ eq } \text{ord}(s));$$

$$Id_R_ad(r,s) .. I_R(r,s) + \text{epsi}Id_R(r,s) =g= 1 \$ (\text{ord}(r) \text{ eq } \text{ord}(s));$$

$$Id_I(r,s) .. I_I(r,s) - \text{epsi}Id_I(r,s) =l= 0;$$

$$Id_I_ad(r,s) .. I_I(r,s) + \text{epsi}Id_I(r,s) =g= 0;$$

```
obj.. z =e= sum( (i,j,cd), epsi_R(i,j,cd) ) + sum( (i,j,cd) ,epsi_I(i,j,cd) )
          + sum( (r,s), epsiId_R(r,s) ) + sum( (r,s), epsiId_I(r,s) ) ;
```

```
model ed_c / all /;
* gamma_R.l(r,i,cd)=1;
* gamma_I.l(r,i,cd)=1;
  FI_R.l(j,r)=1;
  FI_I.l(j,r)=1;
  Id_R.l(r,r)=1;
  cr_R.l=-0.0025;
  cr_I.l=-0.0025;
Option iterlim=1e8;
Option reslim=1e10;
solve ed_c using nlp minimizing z;
display FI_R.l, FI_I.l, cr_R.l, cr_I.l, z.l;
```

```
***** OUT *****
```

```
put "modelstat=",ed_c.modelstat," solvestat=",ed_c.solvestat/;
put "tiempo de resolucio[n] [horas]=",(ed_c.resusd/60/60) /;
put "z=",z.l:12:10/;

put
"_____"/;
loop( r, put"Modo ",r.tl:2:0/
      put /;
      loop( j, put j.tl:1:0"."r.tl:1:0, FI_R.l(j,r):12:8, FI_I.l(j,r):12:8"i"/;
            );
      );
```

```
put /;
put /;

put
"_____"/;
loop( r,put "Componente " ,r.tl:1:0,".",r.tl:1:0" del producto FIt.m.FI"/;
    put /;
    loop( s,
        put r.tl:1:0"."s.tl:1:0, Id_R.l(r,s):12:8, Id_I.l(r,s):12:8" ";
    );
);
put /;
put /;

put
"_____"/;
put "Complementos residuales"/;
put /;
put "Real" cr_R.l:12:8," Imag" cr_I.l:12:8/;
```

ANEXO 3

***Solución del modelo espacial
-problema directo- del ejemplo 2.1***

1. CALCULO DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1.1. Matrices [m] y [k]

m =

0.5000	0	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0	0
0	0	1.5000	0	0	0
0	0	0	2.0000	0	0
0	0	0	0	2.5000	0
0	0	0	0	0	3.0000

k =

1.0e+003 *

2.0000 + 0.3000i	-1.0000	0	0	0	0
-1.0000	2.0000	-1.0000	0	0	0
0	-1.0000	2.0000	-1.0000	0	0
0	0	-1.0000	2.0000	-1.0000	0
0	0	0	-1.0000	2.0000	-1.0000
0	0	0	0	-1.0000	1.0000

Sistema con amortiguamiento histerético.

1.2. Cálculo de autovalores y autovectores

psi =

0.9887 + 0.0113i	0.8224 - 0.1175i	0.7151 - 0.1362i	0.5954 - 0.1176i	0.4162 - 0.1199i	0.1779 - 0.0141i
-0.3739 + 0.0664i	0.7762 + 0.1101i	0.9750 + 0.0250i	0.9839 - 0.0161i	0.8036 - 0.0992i	0.3577 + 0.0252i
0.0715 - 0.0233i	-0.9601 + 0.0399i	-0.1113 + 0.1213i	0.5762 + 0.0748i	0.9419 - 0.0581i	0.5284 + 0.0632i
-0.0091 + 0.0043i	0.4588 - 0.0556i	-0.9613 - 0.0286i	-0.5279 + 0.0543i	0.6438 - 0.0081i	0.6790 + 0.0974i
0.0009 - 0.0005i	-0.1380 + 0.0249i	0.8430 - 0.0396i	-0.7755 - 0.0288i	-0.0514 + 0.0305i	0.7950 + 0.1242i
-0.0001 + 0.0000i	0.0246 - 0.0054i	-0.2675 + 0.0206i	0.5433 - 0.0072i	-0.7060 + 0.0472i	0.8605 + 0.1395i

lambda_2 =

1.0e+003 *

4.7546 + 0.4571i	0	0	0	0	0
0	2.1878 + 0.0733i	0	0	0	0
0	0	1.3815 + 0.0312i	0	0	0
0	0	0	0.8088 + 0.0240i	0	0
0	0	0	0	0.3082 + 0.0127i	0
0	0	0	0	0	0.0257 + 0.0018i

Se puede hacer un cálculo alternativo para los autovalores:

$$\text{lambda}_2 = \text{inv}(m) * (k)$$

lambda_2 =

1.0e+003 *

4.0000 + 0.6000i	-2.0000	0	0	0	0
-1.0000	2.0000	-1.0000	0	0	0
0	-0.6667	1.3333	-0.6667	0	0
0	0	-0.5000	1.0000	-0.5000	0
0	0	0	-0.4000	0.8000	-0.4000
0	0	0	0	-0.3333	0.3333

lambda_2=eig(lambda_2,eye(gdl))

lambda_2 =

1.0e+003 *

4.7546 + 0.4571i
 2.1878 + 0.0733i
 1.3815 + 0.0312i
 0.8088 + 0.0240i
 0.3082 + 0.0127i
 0.0257 + 0.0018i

2. CALCULO DE LAS MATRICES MODALES (NORMALIZADAS) [M] y [K]

M=psi.'*m*psi

M =

0.6311 - 0.0437i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	2.7647 - 0.1605i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	5.0255 - 0.1792i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	4.5658 + 0.0015i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	4.3630 - 0.6020i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	5.1631 + 1.5944i

K=psi.'*k*psi

K =

1.0e+003 *

3.0205 + 0.0808i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	6.0603 - 0.1484i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	6.9485 - 0.0910i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	3.6929 + 0.1106i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	1.3523 - 0.1300i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.1297 + 0.0501i

2.1. Cálculo de la matriz FI

FI =

1.2419 + 0.0571i	0.4961 - 0.0562i	0.3199 - 0.0551i	0.2787 - 0.0551i	0.2018 - 0.0434i	0.0748 - 0.0174i
-0.4727 + 0.0672i	0.4643 + 0.0797i	0.4345 + 0.0189i	0.4605 - 0.0076i	0.3852 - 0.0209i	0.1538 - 0.0122i
0.0909 - 0.0262i	-0.5774 + 0.0072i	-0.0506 + 0.0532i	0.2697 + 0.0350i	0.4497 + 0.0031i	0.2288 - 0.0070i
-0.0116 + 0.0050i	0.2766 - 0.0254i	-0.4284 - 0.0204i	-0.2470 + 0.0254i	0.3063 + 0.0172i	0.2951 - 0.0021i
0.0011 - 0.0006i	-0.0833 + 0.0125i	0.3762 - 0.0110i	-0.3629 - 0.0134i	-0.0254 + 0.0128i	0.3461 + 0.0018i
-0.0001 + 0.0001i	0.0149 - 0.0028i	-0.1194 + 0.0070i	0.2542 - 0.0034i	-0.3372 - 0.0006i	0.3750 + 0.0041i

Cálculo del módulo y la fase de FI:

modulo=abs(FI)

modulo =

1.2432	0.4992	0.3246	0.2840	0.2064	0.0768
0.4774	0.4711	0.4349	0.4605	0.3858	0.1543
0.0946	0.5775	0.0734	0.2719	0.4497	0.2289
0.0127	0.2777	0.4288	0.2484	0.3068	0.2951
0.0013	0.0843	0.3764	0.3632	0.0285	0.3461
0.0001	0.0151	0.1196	0.2543	0.3372	0.3750

fase=angle(FI).*180/pi

fase =

2.6328	-6.4677	-9.7652	-11.1776	-12.1460	-13.1094
171.9071	9.7370	2.4915	-0.9453	-3.1073	-4.5493
-16.0887	179.2836	133.5568	7.3909	0.4012	-1.7566
156.7877	-5.2468	-177.2748	174.1230	3.2093	-0.4147
-29.8991	171.4400	-1.6701	-177.8820	153.2570	0.3002
144.1988	-10.8250	176.6276	-0.7661	-179.8978	0.6292

Comprobación:

FI.'*m*FI

1.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	1.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	1.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	1.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	1.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	1.0000 + 0.0000i

FI.'*k*FI

1.0e+003 *

4.7546 + 0.4571i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	2.1878 + 0.0733i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	1.3815 + 0.0312i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.8088 + 0.0240i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.3082 + 0.0127i	0.0000 - 0.0000i
0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0257 + 0.0018i

3. CALCULO DE LOS VALORES DE OMEGA Y ETA

primero se calculan los valores de omega_n

omega_n =

68.9539
 46.7739
 37.1690
 28.4398
 17.5557
 5.0667

y después se calcula el valor de los factores de pérdida por amortiguamiento (eta)

eta =

0.0961
 0.0335
 0.0225
 0.0296
 0.0413
 0.0688

Referencias bibliográficas

-
- G. D'Alessandro, E. Giorcelli, L. Garibaldi, A. De Stefano, "ARMAV Model Technique for Multiple Input/Output System Identification", Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC IX), Vol. 1, Florence, Italy, 1991.
 - P. Andersen, R. Brincker, B. Peeters, G. de Roeck, L. Hermans y C. Krämer "Comparasion of System Identification Methods Using Ambient Bridge Test Data", Proceedings of The 17th International Modal Analysis Conference (IMAC), Kissimmee, Florida, 1999.
 - P. Avitabile, "Experimental Modal Analysis", Sound and Vibration, january 2001.
 - T. S. Arthanari, Y. Dodge, "Mathematical Programming in Statistics", Wiley, New York, 1993.
 - E. Balmes, "Structural Dynamics Toolbox, User's Guide (Version 3)", 1997.
 - A. H. Barbat, J. M. Canet, "Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por Ordenador", 2^a edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1994.
 - A. H. Barbat, S. Oller, "Conceptos de Cálculo de Estructuras en las Normativas de Diseño Sismorresistente", Monografía CIMNE IS-24, Ed. A. H. Barbat, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1998.
 - M. Batel, "Operational Modal Análisis – Another Way of Doing Modal Testing", Sound and Vibration, august 2002.
 - C. Black, P. Tsai, C. E. Ventura, "Ambient Vibration Measurements of the University Drive / Crowchild Trail Bridge in Calgary, Alberta", ISIS Canada, U. B. C. Earthquake Engineering Research, 1997.
-

-
- L. M. Bozzo, A. H. Barbat, "Diseño Sísmico de Edificios de Hormigón Armado", Monografía CIMNE IS-15, Ed. A. H. Barbat, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995.
 - R. D. Brillhart, D. L. Hunt, S. M. Crowley, "Comparasion of Modal Parameter Estimation Methods for Highly Damped Structures", Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC VI), Kissimmee, Florida, U.S.A., 1988.
 - R. Brincker, P. Andersen, "Ambient Response Analysis, Modal Analysis for Large Structures", Proceedings of The International Congress On Sound and Vibration Technical University of Denmark Lyngby, 1999.
 - R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen, "Output-Only Modal Analisis by Frecuency Domain Decomposition", Proceedings of the ISMA 25 Noise and Vibration Engineering Volume 11. Leuven, Belgium, September 13-15, 2000.
 - R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen, "Modal Identification from Ambient Responses using Frecuency Domain Decomposition", Proceedings of The 18th International Modal Analysis Conference (IMAC) San Antonio, Texas, 2000.
 - D. L. Brown, R. J. Allemang, R. Zimmerman, M. Mergeay, "Parameter Estimation Techniques For Modal Analysis", SAE Technical Paper Series, No. 790221, 1979.
 - A. Brooke, D. Kendrick, A. Meeraus, R. Raman, R. E. Rosenthal, "Gams, a User's Guide", Gams Development Corporation, 1998.
 - R. Cantieni, "Experimental Methods Used in System Identification of Civil Engineering Structures", 2^o Workshop: Problemi di vibrazioni nelle strutture civili e nelle costruzione meccaniche, Perugia, 10-11 Giugno 2004.
-

-
- J. Casas, "Puentes y Pasarelas". Estructuras Sometidas a Acciones Dinámicas, Ed. E. Car, F. López Almansa, S. Oller; CIMNE, 2000.
 - E. Castillo, A. Cobo, J. M. Gutiérrez, R. E. Pruneda, "Introducción a la Redes Funcionales con Aplicaciones. Un Nuevo Paradigma Neuronal", Paraninfo, 1999.
 - E. Castillo, J. A. Conejo, P. Pedregal, R. García, N. Alguacil, "Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science", Research Studies Press Ltd., 2001.
 - E. Castillo, A. S. Hadi, y B. Lacruz, "Regresión Diagnostic for the Least Absolute Value and the Minimax Methods," Communications in Statistics, Theory and Methods, Vol. 30, 381-395, 2001.
 - A.K. Chopra, "Dynamics of Structures", Prentice Hall, 1995.
 - R. W. Clough, J. Penzien, "Dynamics of Structures", Mc-Graw-Hill, 1993.
 - F. Deblauwe, R. J. Allemang, "The Polyreference Time Domain Technique", Proceedings of the 10th International Seminar on Modal Analysis, Part IV, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1985.
 - B. J. Dobson, "Modal Analysis Using Dynamic Stiffness Data", Royal Naval Engineering College (RNEC), TR-84015, June 1984.
 - B. J. Dobson, "A Straight-Line Technique for Extracting Modal Properties from Frequency Response Data", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 1, No. 1, Jan 1987.
-

-
- A. Emin Aktan, D. N. Farhey, A. J. Helmicki, D. L. Brown, V. J. Hunt, K. Lee y A. Levi, "Structural Identification for Condition Assessment: Experimental Arts", *Journal of Estructural Engineering*, december 1997.
 - D. J. Ewins, "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press Ltd., 1991.
 - D. J. Ewins, P. T. Gleeson "A Method For Modal Identification Of Lightly Damped Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 1, 1982.
 - J. García García, M. López Pellicer, "Algebra Lineal y Geometría", Marfil, 1989.
 - D. R. Gaukroger, C. W. Sklinge, K. H. Heron, "Numerical Analysis of Vector Response Loci", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 29, No. 3, 1973.
 - W. Gersh, "Estimation of the Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving-Average Time Series", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC15, Oct. 1970.
 - W. Gersh, S. Luo, "Discrete Time Series Synthesis of Randomly Excited Structural System Response", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 51, No. 1 (Part 2), 1972.
 - W. Gersh, D. R. Sharpe, "Estimation of Power Spectra with Finite-Order Autoregressive Models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC18, 1973.
 - W. Gersh, N. N. Nielsen, H. Akaite, "Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Radom Vibration Data", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No. 3, 1973.
-

-
-
- W. Gersh, "On the Achievable Accuracy of Structural System Parameter Estimates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 1, 1974.
 - W. Gersh, D. A. Foutch, "Least Squares Estimates of Structural System Parameters Using covariance Function Data", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC19, Dec. 1974.
 - W. Gersh, "Parameter Identification: Stochastic Process Techniques", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 7, No. 11, Nov. 1975.
 - W. Gersh, R. Liu "Time Series Methods for the Synthesis of Random Vibration Systems", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, No. 1, Mar. 1976.
 - W. Gersh, F. Martinelli, "Estimation of Structural System Parameters from Stationary and Non-Stationary Ambient Vibrations: An Exploratory-Confirmatory Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 65, No. 3, 1979.
 - W. Gersh, T. Brotherton, "Estimation of Stationary Structural System Parameters from Non-Stationary Random Vibration Data: A locally Stationary Model Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 81, No. 2, 1982.
 - E. Giorcelli, A. Fasana, L. Garibaldi, A. Riva, "Modal Analysis and System Identification Using ARMAV Models", *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference (IMAC XII)*, Vol. 1, Honolulu, Hawaii, U.S.A., 1994.
 - E. Giorcelli, L. Garibaldi, A. Riva, A. Fasana, , "ARMAV Analysis of Queensborough Bridge Ambient Data", *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference (IMAC XIV)*, Vol. I, Dearborn, Michigan, U.S.A., 1996.
-

-
-
- M. A. Hacar, E. Alarcón, “Elementos de Dinámica Aplicada a las Estructuras”, Edix, 1971.
 - A. S. Hadi, “Matriz Algebra as a Tool”, Wadsworth Publishing Company, 1996.
 - W. Hielen, S. Lammens, P. Sas, “Modal Analysis Theory and Testing”, Katholieke Universiteit Leuven, 1999.
 - J. Hurtado, “Vibraciones aleatorias”. Estructuras Sometidas a Acciones Dinámicas, Ed. E. Car, F. López Almansa, S. Oller; CIMNE, 2000.
 - J. Hurtado, “Estructuras de Edificación”. Estructuras Sometidas a Acciones Dinámicas, Ed. E. Car, F. López Almansa, S. Oller; CIMNE, 2000.
 - J. Hurtado, “Identificación de sistemas dinámicos”, Estructuras Sometidas a Acciones Dinámicas, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2000.
 - S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcik, “A Time Domain Modal Vibration Test Technique”, The Shock and Vibration Bulletin, Vol 43, No. 4, 1973.
 - S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcik, “The experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses”, The Shock and Vibration Bulletin, Vol 46, No. 5, 1976.
 - S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcik, “A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response”, The Shock and Vibration Bulletin, Vol 47, No. 4, 1977.
-

-
-
- S. R. Ibrahim, "A Modal Identification Algorithm for Higher Accuracy Requirements", AIAA Paper, No. 84-0928, Proceedings of the 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, California, May 1984.
 - S. R. Ibrahim, "Modal Confidence Factor in Vibration Testing", The Shock and Vibration Bulletin, Vol 48, No. 1, 1978.
 - S. R. Ibrahim, "An Upper Hessenberg Sparse Matrix Algorithm for Modal Identification of Mini-computers" Proceedings of the 10th International Seminar on Modal Analysis, Part III, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1985.
 - S. R. Ibrahim, R. Brincker, J. C. Asmussen, "Modal Parameter Identification from Responses of General Unknown Random Inputs", Proceedings of The 14th International Modal Analysis Conference (IMAC) Dearborn, Michigan, 1996.
 - J. N. Juang, R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 5, Sept.-Oct. 1985.
 - J. N. Juang, "Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification Methods Via System Realization Theory", International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 2, No. 1, Jan. 1987.
 - J. N. Juang, R. S. Pappa, "Effects of Noise on Modal Parameters Identified by the Eigensystem Realization Algorithm", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, No. 3, May- June 1986.
 - J. Leuridan, "Some Direct Parameter Model Identification Methods Applicable for Multiple Modal Analysis", Ph. D. Dissertation, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati, 1984.
-

-
-
- J. Leuridan, H. Vold, "A Time Domain Linear Model Estimation Technique for Multiple Input Modal Analysis", The Winter Annual Meeting of the ASME, Boston, Massachusetts, 1983.
 - M. Link, A. Vollan, "Identificación de Structural System Parameters from Dynamic Response Data", Z. Flugwiss. Weltraumforsch, Vol. 2, No. 3, 1978.
 - M. Link, "Identification of Physical System Matrices Using Incomplete Vibration Test Data", Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference (IMAC IV), Los Angeles, California, U.S.A., 1986.
 - E. Maldonado, J. A. Canas, J. R. Casas, L. G. Pujades, "Respuesta de Puentes Frente a Acciones Sísmicas", Monografía CIMNE IS-27, Ed. A. H. Barbat, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1998.
 - L. Meirovitch, "Principles and Techniques of Vibrations", 1^a edición, Prentice Hall, 1996.
 - L. Meirovitch, "Analytical Methods in Vibrations", 1^a edición,, Pearson Education POD, 1997.
 - L. Meirovitch, "Fundamentals of Vibrations", McGraw-Hill, 2003.
 - N. M. Mendes Maia, D. J. Ewins, "A New Approach For The Modal Identification Of Lightly Damped Structures", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 3, No. 2, 1989.
 - N. M. Mendes Maia, J. M. Montalvao e Silva, J. He, N. A. John Lieven, R. Ming Lin, G. William Sklinge, W. To, A. P. Vale Urgueira, "Theoretical and Experimental Modal Análisis", Research Studies Press Ltd., 1997.
-

-
-
- L. D. Mitchell, "A Perspective View of Modal Analysis", Keynote Address. Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC VI), Kissimmee, Florida, U S. A., 1998.
 - N. Moller, R. Brincker, H. Herlufsen, P. Andersen, "Modal Testing of Mechanical Structures Subject to Operational Excitation Forces", Proceedings of The ISMA25 Noise and Vibration Engineering Volume 11. Leuven, Belgium, September 13-15, 2000.
 - D. E. Newland, "Mechanical vibration analysis and computation", Longman, 1989.
 - D. E. Newland, "Vibraciones Aleatorias y Análisis Espectral", AC, 1983.
 - R. S. Pappa, S. R. Ibrahim, "A Parameter Study of the Ibrahim Time Domain Identification Algorithm", The Shock and Vibration Bulletin, Vol 51, No. 3, 1981.
 - B. Park, K. Kim, "Vector ARMAX Modeling Approach in Multi-Input Modal Analysis", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 3, No. 4, Oct, 1989.
 - P. Paultre, J. Proulx y M. Talbot, "Dynamic Testing Procedures for Highway Bridges Using Traffic Loads", Journal of Structural Engineering, Vol. 121, n° 2, February, 1995.
 - M. Paz, "Dinámica Estructural Teoría y Cálculo", Reverté, 1992.
 - B. Piombo, E. Giorcelli, L. Garibaldi, A. Fasana, "Structures Identification Using ARMAV Models", Proceedings of the 11th Internacional Modal Análisis Conference (IMAC XI), Vol. 1, Kissimmee, Florida, U.S.A., 1993.
-

-
-
- R. Prony, “Essai Expérimental et Analitique Sur Les Lois De La Dilatabilité Des Fluides Élastiques Et Sur Celles De La Force Expansive De La Vapeur De L’Eau Et De La Vapeur De L’Alcool, A Différentes Températures”, Journal de L’Ecole Polytechnique (Paris), Vol. A, Cahier 2, Floréal et Prairial, An. III, 1775.
 - M. Richardson, D. Formenti, “Parameter Estimation from Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials”, Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC 1), Orlando, Florida, U.S.A., 1982.
 - M. Richardson, B. Schwarz, “Modal Parameter Estimation from Operating Data”, Sound and Vibration, January 2003.
 - F. R. Spitznogle, A. H. Quazi, “Representation and Analysis of Time-Limited Signals Using a Complex Exponential Algorithm”, The Journal of The Acoustical Society of America, Vol. 47, No. 5 (Part 1), 1970.
 - F. R. Spitznogle et al., “Representacion and Analysis of Sonar Signals, Vol. 1: Improvements in the Complex Exponential Signal Analysis Computational Algorithm”, Texas Instruments, Inc., Report No. U1-829401-5, Office of Naval Research Contract No. N00014-69-C0315, 1971.
 - C. Ventura, R. Brincker, “Technology Seminar: Output-only Modal Testing and Analysis”, Structural Vibration Solutions, 2002.
 - C. E. Ventura, N. D. Schuster, “Structural Dynamic Properties of a Reinforced Concrete High-rise Building During Construction”, Can. J. Civ. Eng. n° 23, 1996.
 - H. Vold, J. Kundrat, G. T. Rocklin, R. Russel, “A Multi-Input Modal Estimation Algorithm For Mini-Computers”, SAE Technical Paper Series, No. 820194, 1982.
-

-
- H. Vold, G. T. Rocklin, "The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Method for Mini-Computers", Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC 1), Orlando, Florida, U.S.A., 1982.
 - "Structural Testing. Mechanical Mobility Measurements", Brüel & Kjær, 1988.
 - "Structural Testing. Modal Analysis and Simulation", Brüel & Kjær, 1988.
 - "Single-Channel and Dual Channel Machinery Analyzer, Model 2120A2", Computational Systems, Incorporated, 2001.
 - "Advanced Two-Channel Analysis Program, Downloadable Program for the Model 2120A2", Computational Systems, Incorporated, 2000.
 - "Advanced Transient Analysis Program, Downloadable Program for the Model 2120", Computational Systems, Incorporated, 1998.
 - "VibPro Advanced Diagnostics Software for CSI's Model 2120 Machinery Analyzer", Computational Systems, Incorporated, 2000.
 - "The Fundamentals of Modal Testing, Application Note 243-3", Hewlett Packard, 1991.
 - "Signal Processing Toolbox, User's Guide (Version 5)", MathWorks, 2001.
 - Norma de Construcción Sismorresistente NCSE-02. Parte General y Edificación. Ministerio de Fomento, España, 2002
 - "Modally Tuned ICP[®] Model 086C41 Impulse Test Hammers, Installation and Operating Manual", PCB Piezotronics, 2000.
-

- “Industrial ICP[®] Accelerometer Model 626A03, Installation and Operating Manual”, PCB Piezotronics, 2000.