

## El problema del contacto en bombas de engranajes de perfil trocoidal

Pedro Javier Gamez-Montero

Dep. Mecánica de Fluidos LABSON  
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)  
Colom 7-11, 08222 Terrassa, España  
Tel.: 34-93-739 80 85; Fax: 34-93-739 80 86  
e-mail: pjgm@mf.upc.edu

Francisco Zárate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE), UPC  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-401 07 94; Fax: 34-93-401 65 17  
e-mail: zarate@cimne.upc.edu

Montserrat Sánchez

Departamento Resistencia de Materiales  
Análisis en las Estructuras, UPC  
Colom no 7-11, 08222 Terrassa, España  
Tel.: 34-93-739 80 54; Fax: 34-93-739 86 33  
e-mail: monserrat.sanchez@upc.edu

Roberto Castilla y Esteve Codina

Dep. Mecánica de Fluidos LABSON  
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)  
Colom 7-11, 08222 Terrassa, España  
Tel.: 34-93-739 80 85; Fax: 34-93-739 80 86  
e-mail: castilla@mf.upc.edu, ecodina@mf.upc.edu

### Resumen

El objetivo principal de las metodologías presentadas en este artículo es determinar las tensiones de contacto en un engranaje de perfiles trocoidales cuando este trabaja formando parte de una máquina óleo-hidráulica. Conocer las tensiones de contacto en una máquina “trocoidal” es importante porque este tipo de máquinas no pueden ser ajustadas para la fricción. La principal dificultad que se plantea en el cálculo de las tensiones de contacto consiste en determinar las fuerzas que se transmiten a través de cada punto de contacto. Debido a la existencia de un número importante de puntos de contacto para cada instante de tiempo en una rotación completa del conjunto del engranaje, el problema es hiperestático. En la primera y segunda sección de este artículo se presenta un modelo analítico para el cálculo de las tensiones de contacto en una máquina “trocoidal” tipo gerotor, desestimando la fricción en los puntos de contacto. A partir de este punto el comportamiento del conjunto del engranaje es evaluado a través del cálculo de la máxima tensión de contacto normal en los dientes del engranaje. En la tercera sección del artículo se presenta un estudio de la misma máquina mediante elementos finitos y sus resultados. En la cuarta parte del artículo se describe el trabajo experimental usando un modelo prototipo del conjunto del engranaje de la misma máquina que proporciona el rango de magnitud de la máxima tensión de contacto en un par de dientes a través de la técnica de la fotoelasticidad. Finalmente los resultados de los dos modelos y de los ensayos experimentales son comparados aportando conclusiones muy interesantes.

### **Palabras clave:**

*engranajes trocoidales, bomba gerotor, tensión de contacto, MEF, técnica fotoelasticidad.*

## THE CONTACT PROBLEM IN A TROCHOIDAL GEAR PUMP

### Summary

The aim of this approach on this paper is to characterise contact stress of a trochoidal gear set when it works as part of hydraulic machine. Knowing the contact stress forces in a trochoidal-type machine is important because the machine cannot be adjusted for wear. The main difficulty in calculating the contact forces is to determine the forces that are transmitted through each contact point. Since there are many contact points, at any instant, the problem is quasi-statically indeterminate. The first part of this paper presents a simplified analytical model of a trochoidal-type machine, specifically to an internal gear pump type gerotor, when friction at the contact points is neglected. From this study, the performance of the gear set is evaluated through the calculation of the normal maximum contact stress in the gear teeth. Then the second part of the paper presents a finite element model of the same machine. The analysis of both models is for quasi-static conditions. An experimental approach using a prototype model of the gear set provides the maximum contact stress on a pair of teeth through photoelasticity measurement techniques of the same machine. The results from the two models and the experimental work are compared and important conclusions are drawn and discussed.

### **Keywords:**

*internal trochoidal gear pumps type gerotor, contact stress, FEM, photoelasticity techniques.*

## INTRODUCCIÓN

Las bombas de engranajes internos se pueden encontrar en un amplio rango de aplicaciones debido a su número importante de ventajas. La industria de la automoción se ha centrado en ellas, en especial en las máquinas “trocoidal”. Algunas de sus cualidades son la generación de un menor ruido fluídico, pocos componentes y la ausencia de elementos de estanqueidad. Sin embargo, es esencial caracterizar adecuadamente el engranaje generado por perfiles trocoidales debido a que algunas de las ventajas de su diseño pueden suponer inconvenientes en diferentes aspectos de su comportamiento. Tomando en cuenta el aspecto fluido dinámico del mecanismo de engrane, una desventaja en el diseño de bombas “trocoidales” es la ausencia de partes que puedan ser ajustadas para compensar el desgaste en el perfil de los dientes de las ruedas dentadas que forman el conjunto. Por consecuencia se produce una notable reducción de su eficiencia y el engranaje debe ser simplemente reemplazado.

El presente artículo centra su estudio en la tensión de contacto en los dientes de un engranaje interno con perfiles trocoidales cuando trabaja formando parte de una máquina ‘trocoidal’, en concreto, en una bomba óleo-hidráulica tipo gerotor. En este tipo de bomba el movimiento de ambas ruedas dentadas del engranaje se produce por las fuerzas desarrolladas en los puntos de contacto. El problema de la tensión de contacto ha sido estudiado por varios investigadores. Colbourne<sup>1</sup> simplificó el problema mediante la hipótesis de no fricción en los puntos de contacto en el engrane. De esta forma obtuvo soluciones analíticas que pueden ser utilizadas para modificar los parámetros de generación del engranaje en aras de reducir la tensión de contacto. Su campo de aplicación es sólo válido para perfiles de dientes de la rueda exterior formados por arcos de círculo. Sin embargo, el cálculo de los perfiles y la posición de los puntos de contacto resultan ser engorrosas. Basado en la teoría de Colbourne se ha desarrollado en este artículo un modelo analítico de cálculo de los perfiles implementado por una nueva variante del cálculo de los puntos de contacto que proporciona la máxima tensión en los dientes del engranaje. La principal dificultad en el cálculo de la tensión de contacto es determinar la fuerza que es transmitida a través de cada punto. Durante una rotación completa del conjunto el problema es hiperestático debido al número de puntos de contacto.

Se ha de tener presente que la correcta selección de los parámetros de diseño permite alcanzar una tensión de contacto óptima desde el punto de vista mecánico; no se puede

obviar que estos mismos parámetros geométricos también determinan las características volumétricas de la bomba. De aquí que se presenten las características volumétricas (caudal específico, capacidad volumétrica e irregularidad del caudal), así como la tensión de contacto de acuerdo con los parámetros geométricos, por un lado para conocer la influencia de los parámetros de diseño del engranaje con tal de reducir la máxima tensión de contacto y obtener óptimas características volumétricas y, por otro lado para guiar al diseñador lo más posible a la hora de seleccionar los mejores parámetros en una aplicación específica.

El presente estudio también lleva a cabo la simulación numérica mediante el método de los elementos finitos (MEF) y el trabajo experimental con fotoelasticidad para una unidad específica de una bomba óleo-hidráulica tipo gerotor usada en la lubricación de motores de combustión interna. La simulación ha derivado en una herramienta esencial para estimar el comportamiento óptimo en los sistemas y componentes óleo-hidráulicos, especialmente cuando deben ser diseñados. Los ensayos experimentales con fotoelasticidad complementan el estudio para la misma unidad específica de bomba óleo-hidráulica tipo gerotor.

El presente artículo ha sido dividido en cuatro secciones. En la primera sección se presenta esta introducción. En la segunda sección se describe la geometría del engranaje y la línea de puntos de contacto. Partiendo de dicha línea, se presenta el modelo analítico desarrollado basado en la teoría de Colbourne. Los resultados muestran la máxima tensión de contacto y su comparación con las características volumétricas. La tercera sección presenta el modelo de elementos finitos de la bomba gerotor. Los resultados de la máxima tensión de contacto son comparados y contrastados con el modelo analítico. En la cuarta sección se describe el trabajo experimental usando la técnica de fotoelasticidad. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante el modelo analítico y el MEF. Finalmente se presentan las conclusiones del presente trabajo.

## NOMENCLATURA

### Letras latinas

$a$	ancho de contacto en el diente
$c_v$	capacidad volumétrica
$d$	distancia normal a la fuerza de contacto
$e$	excentricidad
$F$	fuerza de contacto por unidad de espesor
$G$	radio del círculo que completa la rueda dentada exterior
$H$	espesor del engranaje
$I$	centro instantáneo de rotación
$m$	distancia $IP_s$ (Figura 1)
$M$	módulo del engranaje trocoidal
$O$	centro de la rueda dentada
$r$	radio círculo generación epitrocoide
$P$	presión del fluido
$P_s$	centro del arco de círculo $S$ en los puntos singulares
$P_k$	punto de contacto $k = 1, 2, \dots, Z$
$Q_k$	centro de curvatura
$Q_s$	caudal específico
$R_2$	distancia $O_2P_s$ (Figura 1)
$S$	radio del arco de círculo del diente de la rueda dentada exterior
$V_k$	volumen de una cámara genérica
$x_{pc}, y_{pc}$	coordenadas del punto de contacto
$x, y$	coordenadas del perfil de del engranaje
$X, Y$	sistema de coordenadas de referencia absoluta
$Z, (Z - 1)$	número de dientes de la rueda dentada exterior, interior

### Letras griegas

$\alpha_{pc}$	ángulo del punto de contacto
$\alpha_g$	ángulo de generación del perfil
$\delta_Q$	irregularidad del caudal
$\phi$	ángulo de presión
$\gamma$	ángulo tangente en el punto de contacto
$\lambda$	factor de contracción
$\rho$	radiovector
$\nu$	factor equidistante
$\omega$	ángulo de giro
$\psi$	ángulo de rotación de la rueda dentada exterior respecto la rueda dentada interior

### Subíndices

$1 \equiv i$	rueda dentada interior
$2 \equiv e$	rueda dentada exterior
$A, B$	puntos de contacto de división de la zona de baja y de alta presión (Figura 1)
$k$	punto de contacto genérico
$pc$	punto de contacto

## MODELO ANALÍTICO DE LA TENSIÓN DE CONTACTO EN LOS DIENTES DEL ENGRANAJE

En esencia, el engranaje interno de una bomba tipo gerotor consiste en un par de ruedas dentadas: un pinón con dientes externos denominado *rueda dentada interior* y una corona con dientes internos denominada *rueda dentada exterior* (Figura 1). Las dos ruedas dentadas están conjugadas de forma que cada diente de la rueda dentada interior está en permanente contacto deslizante con la rueda dentada exterior formando los conocidos puntos de contacto. La rueda dentada exterior presenta  $Z$  dientes o lóbulos, uno más que la rueda dentada interior. De este modo se forman  $Z$  puntos de contacto. La idea fundamental del método basado en la teoría de Cobourne es igualar el momento debido a la presión del fluido con el momento de contacto. Por lo tanto el primer objetivo es calcular la posición de cada punto de contacto en cualquier posición de una rotación completa del conjunto del engranaje. Los dos puntos de contacto más alejados forman la frontera de separación entre la zona de alta y baja presión del fluido. Conocidas sus coordenadas, es posible el cálculo de la fuerza en cada rueda dentada causada por la diferencia de presión del fluido. Por consiguiente es posible encontrar el momento debido a la presión del fluido requerido para producir la rotación de cada rueda dentada.

El eje motor al ser conectado directamente a la rueda dentada interior transmite la fuerza directamente a los puntos de contacto entre las ruedas dentadas. Sin embargo, el problema se presenta hiperestático debido al número de puntos de contacto. Las fuerzas de contacto sobre los dientes deben ser tales que se transmita a la rueda dentada exterior un momento mecánico sobre su centro igual al momento debido a la presión del fluido. Una vez se ha encontrado que fuerza es transmitida a cada diente, se utilizan las ecuaciones de Hertz para calcular las tensiones de contacto.

### Línea de puntos de contacto y geometría del engranaje

Las posiciones de cada punto de contacto para cualquier perfil de la rueda dentada exterior fueron derivadas por Colbourne<sup>1</sup>. Sin embargo, la localización de los puntos de contacto y la geometría del engranaje se obtienen a partir de un análisis matemático que deriva en una ecuación cuadrática de compleja resolución. En el presente modelo analítico se ha introducido otra metodología para estimar la línea de puntos de contacto y la geometría del engranaje.

Nervegna<sup>2</sup> y sus colaboradores definen la línea de puntos de contacto como

$$\begin{aligned} x_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos \alpha_{pc} - \frac{S}{m}(R_2 \cos \alpha_{pc} \pm r_2) \\ y_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \sin \alpha_{pc} - \frac{S}{m}(R_2 \sin \alpha_{pc}) \\ m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \alpha_{pc}} \end{aligned} \tag{1}$$

donde el signo debe ser tomado negativo para la posición de referencia mostrada en la Figura 1. El perfil de la rueda dentada interior contiene todos los puntos de contacto durante una rotación completa del conjunto del engranaje de forma que la línea de puntos de contacto, la cual es función de cuatro parámetros geométricos, describe su perfil  $x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi}) = f(R_2, S, e, Z - 1)$ . La determinación del perfil de la rueda dentada exterior, el cual es también función de cuatro parámetros geométricos, se debe llevar a cabo geoméricamente por partes siendo  $x_e(\alpha_{ge}), y_e(\alpha_{ge}) = f(R_2, S, G, Z)$ . Ambos perfiles son mostrados en la Figura 1. Para cualquier otra posición del conjunto del engranaje sus perfiles pueden ser generados aplicando la ecuación de rotación

$$\begin{aligned} x_{r,j}(\omega_j) &= x_j(\alpha_{gi}) \cos \omega_j - y_j(\alpha_{gi}) \sin \omega_j \\ y_{r,j}(\omega_j) &= x_j(\alpha_{gi}) \sin \omega_j + y_j(\alpha_{gi}) \cos \omega_j \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $j = i$  para la rueda dentada interior y  $j = e$  para la rueda dentada exterior (Gamez-Montero<sup>3</sup>).

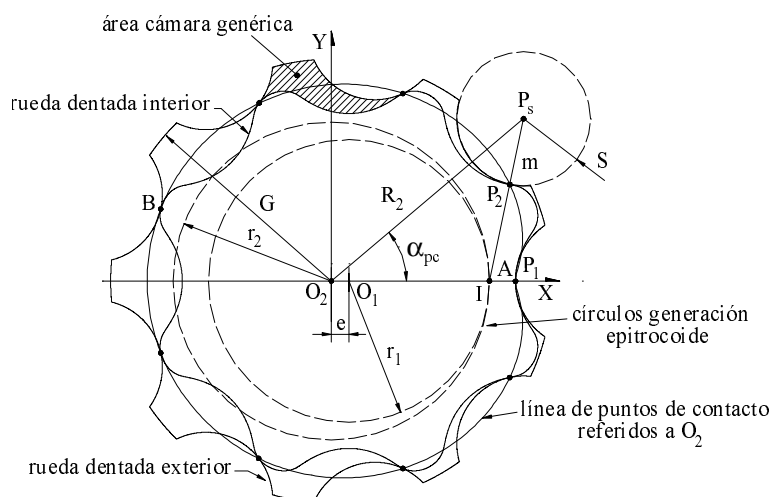


Figura 1. Conjunto del engranaje y línea de puntos de contacto en la posición de referencia

### Cálculo de la tensión de contacto y el momento de contacto

La Figura 2 muestra la inversión cinemática en la cual se produce una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj del sistema completo de valor  $(Z - 1)\psi$ , donde  $\psi$  es el ángulo de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de la rueda dentada exterior relativo a la rueda dentada interior.

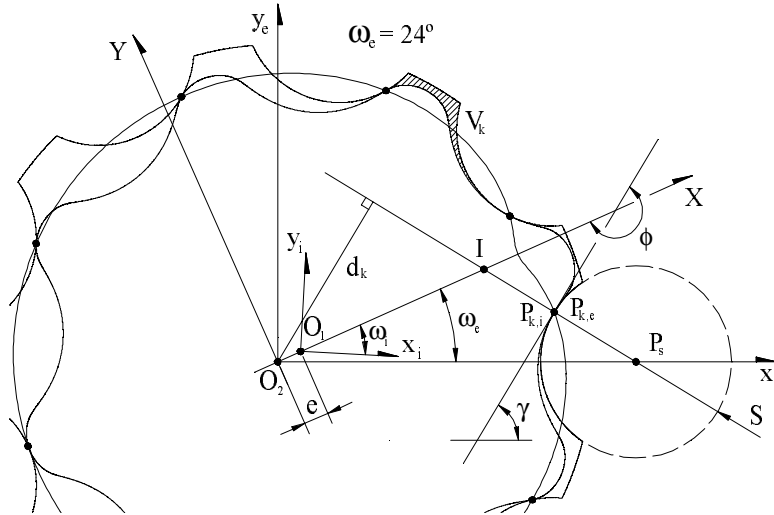


Figura 2. Inversión cinemática

Una vez conocidas las coordenadas de los puntos de contacto para cualquier posición del engranaje, la idea básica de este método es llevar todos los puntos de contacto al primer cuadrante de referencia de la rueda dentada exterior a través de la inversión cinemática (Figura 2). A partir de aquí la rueda dentada exterior es llevada a su posición original un ángulo  $\omega_e = -(Z - 1)\psi$ , por lo que la rueda dentada interior tendrá ahora su centro  $O_1$  rotado un ángulo de  $(Z - 1)\psi$  habiendo girado sobre sí misma un ángulo de  $-\psi$ . Por tanto, si un punto  $P_{k,i}$  de la rueda dentada interior toca la rueda dentada exterior en el punto  $P_{k,e}$ , entonces la normal a la rueda dentada exterior en  $P_{k,e}$  debe pasar a través del centro instantáneo de rotación  $I$ . Usando esta propiedad, la relación entre los radios de curvatura de perfiles conjugados derivada por L'Hôpital y citada en Hartenberg y Denavit<sup>4</sup> es

$$\frac{1}{IQ_{k,e}} - \frac{1}{IQ_{k,i}} = \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\sin \phi_k} \quad (3)$$

donde  $Q_{k,e}$  y  $Q_{k,i}$  son los centros de curvatura de la rueda dentada exterior e interior en los puntos de contacto. Conocida la curvatura de los dientes de la rueda dentada exterior debido a que su forma es un arco de círculo de radio  $S$ , esta relación permite calcular la curvatura de los dientes de la rueda dentada interior.

Finalmente el momento de contacto de la rueda dentada exterior respecto a su centro  $O_2$  es la suma del producto de las fuerzas de contacto  $F_{k,e}$  localizada a lo largo de la línea  $IP_{k,e}$  y su distancia normal  $d_k$  al centro  $O_2$  en el punto de contacto.

Sin embargo, no todos los puntos de contacto contribuyen a transmitir momento. Por un lado y tomando una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj como referencia, los puntos de contacto desde 2 al  $(Z + 1)/2$  transmitirán el momento de contacto desde la rueda

dentada interior a la exterior debido al hecho de que ellos son puntos activos (representados con flechas negras, siendo la longitud proporcional a la magnitud de la fuerza de contacto para la posición de referencia en la Figura 3).

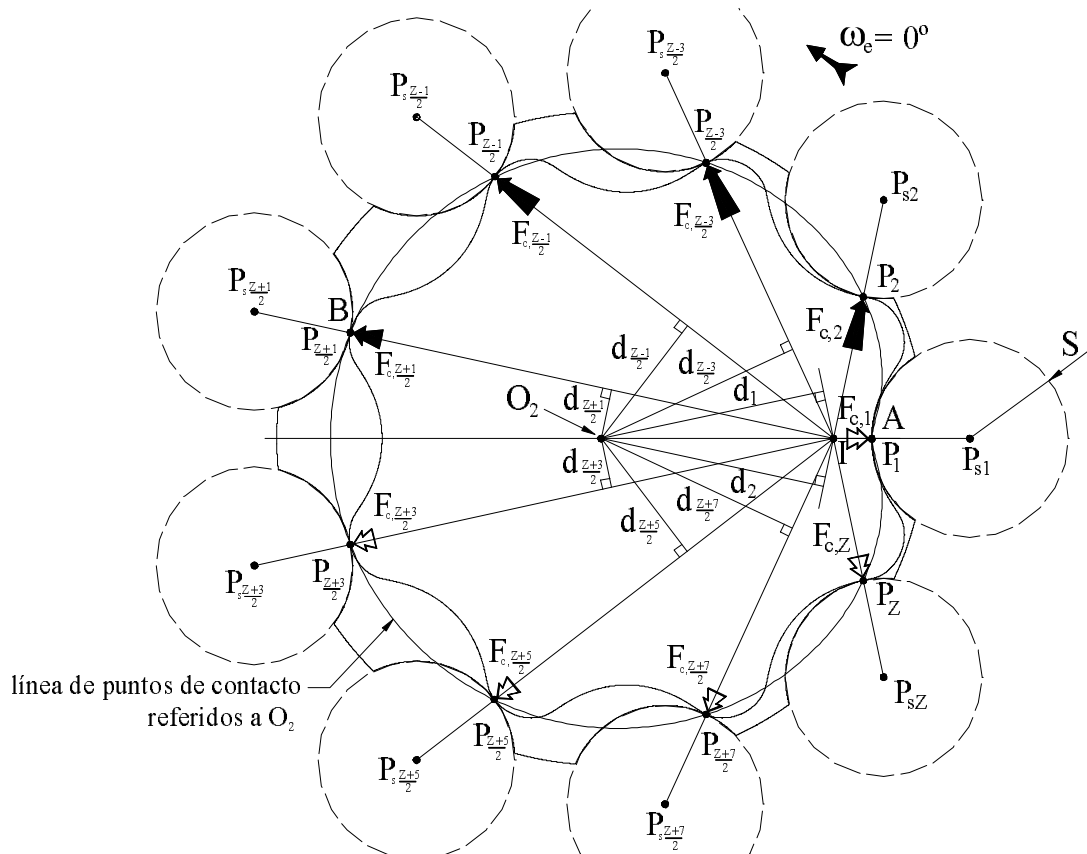


Figura 3. Fuerzas de contacto

Por otro lado los puntos de contacto desde  $(Z + 3)/2$  a 1 son puntos no activos con inexistencia de fuerza (representados con flechas blancas de igual longitud en la Figura 3). Debido al número de puntos de contacto, el cálculo de las fuerzas de contacto es hiperestático. Se sigue entonces que cuando un par es aplicado a la rueda dentada interior, esta rotará un pequeño ángulo sobre su eje hasta que la deformación en los dientes sea suficientemente grande como para producir fuerzas cuyos momentos combinados sobre  $O_2$  sean igual al momento de contacto sobre la rueda dentada exterior. Una pequeña rotación de  $\Delta\omega_i$  es impuesta a la rueda dentada interior y se calcula la penetración  $\Delta\nu$  causada en el diente. De aquí usando las ecuaciones de Hertz para encontrar las fuerzas de contacto, y con un proceso iterativo de cálculo, se obtiene la máxima tensión de contacto como

$$|\sigma_{yy}|_{\max} = \frac{2F}{\pi a} \tag{4}$$

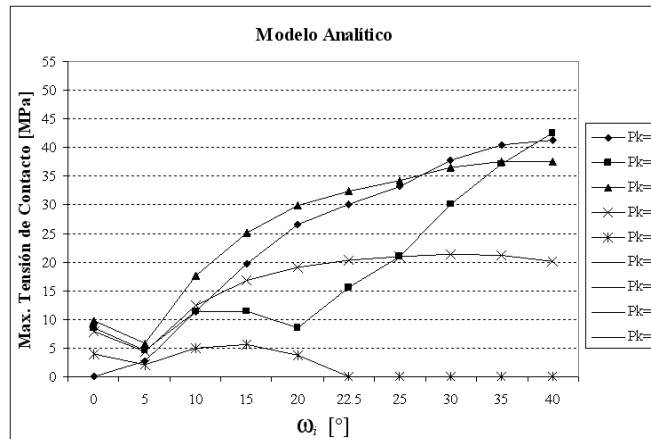


Figura 4. Estudio analítico de la máxima tensión de contacto versus la posición  $\omega_i$  en cada punto  $P_k$

### Cálculo del momento debido a la presión

El volumen de una cámara genérica formada entre dos puntos de contacto consecutivos alcanza su máximo o mínimo volumen cuando se sitúa de forma simétrica sobre el eje de abscisas  $X$ . Dos puntos de contacto, A y B en la Figura 1, forman la frontera que separa la zona de impulsión de alta presión de la zona de aspiración de baja presión. Una vez conocidas las coordenadas de todos los puntos de contacto, se puede usar el método energético (Tabla II) para calcular el momento debido a la presión del fluido sobre la rueda dentada exterior respecto  $O_2$ . La fuerza causada por la presión del fluido tendrá componentes  $-P\Delta Y$  y  $P\Delta X$  y actúa a través del punto medio de la línea que une los dos puntos de contacto.

### Máxima tensión de contacto

La unidad específica de bomba tipo gerotor que se ha tomado en estudio es el denominado PZ9e285 y sus parámetros geométricos se presentan en la Tabla I.

Engranaje PZ9e285	
$G$	35,8 mm
$R_2$	40,725 mm
$S$	10,85 mm
$e$	2,85 mm
$H$	9,25 mm
$Z$	9

Tabla I. Parámetros geométricos

La presión del fluido se establece a  $P = 0,5$  MPa. La máxima tensión de contacto para el conjunto del engranaje se calcula usando el modelo analítico expuesto y los resultados se muestran en la Figura 4. El estudio considera la máxima tensión de contacto para cada punto de contacto  $P_k$  en una posición específica del conjunto del engranaje, lo cual significa la rotación del ángulo  $\omega_i$  por la rueda dentada interior. Las posiciones en estudio son localizadas en el intervalo  $\omega_i = 0 \div 2\pi/Z$  debido a que la posición de referencia  $\omega_i = 0^\circ$  se repite cada  $2\pi/Z$ , ya que sólo es considerado el engranaje sin la influencia de las lumbreras de las zonas de aspiración e impulsión practicadas sobre el cuerpo de la bomba.



### Características volumétricas

El proceso de bombeo es llevado a cabo cuando el movimiento de rotación es transmitido desde la rueda dentada interna a la rueda dentada externa, creando la circulación de volúmenes crecientes de fluido (de las cámaras estancas entre dos puntos de contacto consecutivos) desde la zona de aspiración a la zona de impulsión de la bomba. Ambas ruedas dentadas rotan en el mismo sentido pero a diferente velocidad debido a la relación de transmisión  $(Z - 1)/Z$  entre los dientes, siendo más rápida la rueda dentada interior.

Las características volumétricas se refieren al volumen de la cámara y su variación, el caudal instantáneo, la capacidad volumétrica y la irregularidad del caudal. Mayormente existen dos análisis para calcular las características volumétricas: el análisis integral-derivativo y el análisis derivativo-integral (Gamez-Montero<sup>3</sup>). Sin embargo, hay varios métodos y desarrollos para determinar el volumen de una cámara y su variación, los cuales están resumidos en la Tabla II y cuyas ecuaciones principales son (5) (6) (7) (8) (9) (10) y (11).

Stryczek<sup>5</sup> mostró que las características volumétricas del engranaje pueden estar también basadas en cuatro parámetros básicos de diseño como caudal instantáneo (ecuación (8)), capacidad volumétrica (ecuación (9)) e irregularidad del caudal (ecuación (10)) que son función de  $f(M, Z, \lambda, \nu)$ , donde  $V_{u \max}$ ,  $V_{u \min}$  y  $V_{u \text{med}}$  representan el valor máximo, mínimo y medio del volumen desplazado por un diente de la rueda dentada interior. (Para más información, consultar la referencia de Gamez-Montero<sup>3</sup>.)

$$V_k(\alpha_{pck}) = V_1(\alpha_{pc1} + (k - 1)\Delta\alpha_{pc}) \quad (5)$$

$$\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}} = \frac{1}{2}H \left[ (\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2) + (\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2) \frac{Z}{Z-1} \right] \quad (6)$$

$$V_1(\alpha_{pc}) = V_1(\alpha_{pc} = 0) + \int_0^{\alpha_{pc}} \frac{dV_c}{d\alpha_{pc}} d\alpha_{pc} \quad (7)$$

$$\frac{dV_u}{d\omega_i} = \frac{1}{2}H \left[ R_{ei}^2 - \frac{r_1}{r_2}R_{ie}^2 - r_1(r_1 - r_2) - \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)u^2 \right] \quad (8)$$

$$c_v = (Z - 1) \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad (9)$$

$$\delta_Q = \frac{V_{u \max} - V_{u \min}}{V_{u \text{med}}} \quad (10)$$

$$Q_s = \frac{c_v}{\pi H M^2} = \frac{Z - 1}{\pi H M^2} \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad (11)$$

ANÁLISIS INTEGRAL-DERIVATIVO		ANÁLISIS DERIVATIVO-INTEGRAL		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Descripción necesaria de los perfiles de las ruedas dentadas</li> <li>• Cálculo inicial del volumen por integración numérica y su variación por derivación numérica</li> </ul>	Caracter. Análisis	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Descripción no necesaria de los perfiles de las ruedas dentadas</li> <li>• Cálculo inicial de la variación del volumen por derivación y el volumen por integración analítica o numérica</li> </ul>		
Método integral		Método radiovectores	Método energético	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Basado en el conocimiento de todos los puntos de contacto para cada posición genérica de la cámara</li> <li>• Resolución del volumen siguiendo un esquema de cálculo</li> <li>• No es posible calcular el módulo de los puntos de contacto en función de su ángulo respecto al eje de abscisas</li> </ul>	Caracter. Método	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Basado en los puntos de contacto próximos de cierre de una cámara</li> <li>• Cálculo de la variación del volumen en función del giro de la rueda dentada exterior</li> <li>• No existe simplificación en el cálculo de los puntos de contacto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Basado en los puntos de contacto de cierre de volumen máximo y mínimo para <math>\Delta\alpha_{pc}</math></li> <li>• Cálculo de la variación del volumen en función del giro de la rueda dentada interior</li> <li>• Existe simplificación en el cálculo de un punto de contacto</li> </ul>	
Variación		Variación	Balance	Balance
Concepto variación volumen para una cámara genérica	Caracter. Desarrollo	Concepto giro engranaje diferente a giro punto de contacto	Concepto aumento de volumen signo para balance caudal	Concepto disminución de volumen signo para balance de momento
Derivación numérica Ecuación (5)	Variación Volumen	Ecuación (5)	Ecuación (6)	Ecuación (8)
Ecuación (5)	Volumen Cámara	Ecuación (7)	Ecuación (7)	Integración analítica Ecuación (8)

**Tabla II.** Sumario de los métodos de cálculo de las características volumétricas

### Máxima tensión de contacto vs. características volumétricas

Los parámetros geométricos y las condiciones operativas en la bomba determinan las características volumétricas y la máxima tensión de contacto. Los factores más influyentes en las características volumétricas han mostrado ser la presión de trabajo y el número de dientes. Debido al hecho de que para bombas de lubricación la presión de trabajo es relativamente baja, ésta se puede excluir del foco del análisis. Con respecto a la tensión de contacto, un factor influyente que se suma a los dos anteriores es el mínimo radio de curvatura de la rueda dentada interior. Para el engranaje trocoidal en estudio PZ9e285 se muestra en la Figura 5 la máxima tensión de contacto y las características volumétrica versus el número de dientes, siendo  $Q_s$  (el caudal específico de la bomba) una forma adimensional de la capacidad volumétrica  $c_v$  útil para comparar el comportamiento de varios tipos de engranajes.

Se puede observar que la evolución de las características volumétricas y la máxima tensión de contacto ( $\sigma_{yy}$ ) son opuestas: mientras las características volumétricas mejoran a medida que el número de dientes aumenta, la tensión de contacto empeora y viceversa.

En la Figura 5 se observa un significativo punto de inflexión entre el décimo y undécimo diente donde la máxima tensión de contacto sufre un incremento importante. Los autores creen que la influencia del mínimo radio de curvatura de la rueda dentada interior es crítica. Incrementando el número de dientes, su perfil se vuelve más brusco y puntiagudo y esto

provoca altas tensiones de contacto. De hecho, delante de la tendencia de aplicaciones de más alta velocidad, se ha incrementado la atención sobre ello. El valor óptimo parece estar en el noveno diente para la rueda dentada exterior como parámetro geométrico a escoger.

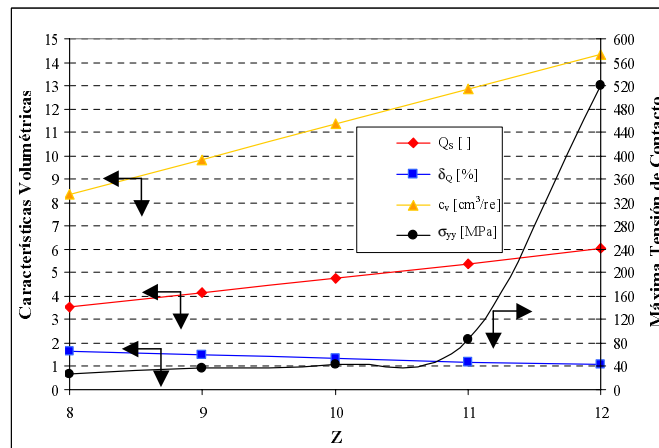


Figura 5. Comportamiento del engranaje trocoidal vs. número de dientes

## ANÁLISIS MEDIANTE MEF

Hablando en general, la bomba evaluada en este estudio está constituida por cuatro componentes básicos: dos ruedas dentadas, una interna y otra externa denominadas, como engranaje trocoidal PZ9e285, el cuerpo de la bomba y la cubierta. La bomba sin la cubierta se muestra en la Figura 6. Una válvula limitadora de presión está emplazada en el cuerpo de la bomba y cuya presión de tarado es de 0,6 MPa.

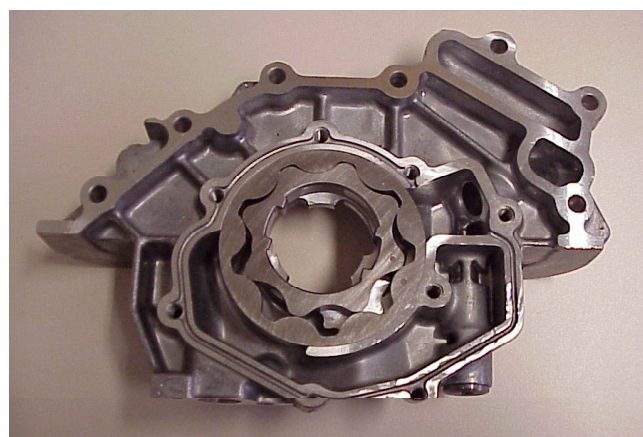
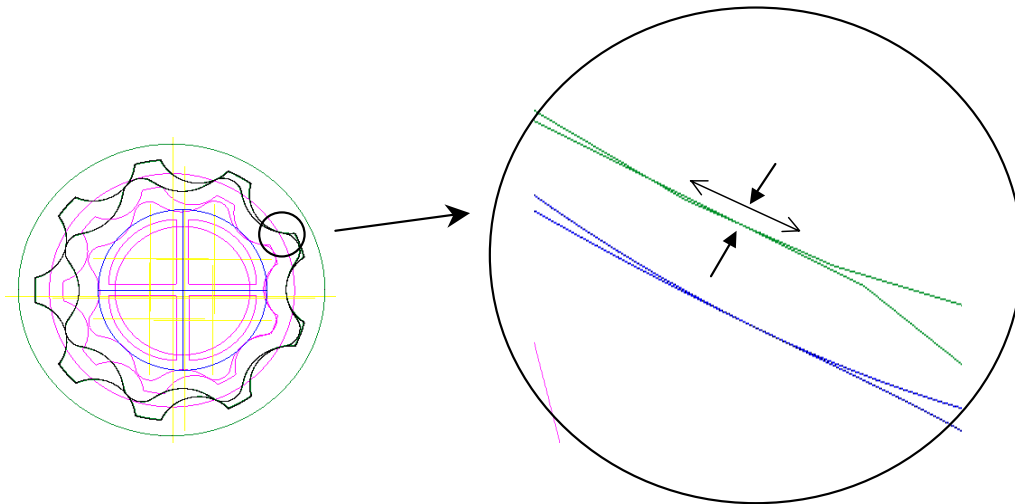


Figura 6. Unidad específica de bomba gerotor en estudio

## Proceso de modelado

El modelado de la geometría se ha centrado en los perfiles teóricos de los principales componentes de la bomba: las ruedas dentadas interior y exterior. Se excluyen de este estudio las tolerancias de fabricación, huelgo entre perfiles y efectos térmicos. La simulación ha sido realizada con el programa COMET v5.0<sup>6</sup> utilizando como pre y post procesador el programa GiD v7.0<sup>7</sup> COMET v5.0 es un código de investigación basado en el método de los elementos finitos en formulación implícita, que se encuentra acoplado completamente con el programa de pre y post GiD.

Uno de los principales problemas desde el punto de vista de la simulación corresponde a la generación de la geometría de los perfiles de las ruedas dentadas que deben ser definidas con la mayor exactitud, pues de lo contrario, al no existir huelgos, se produce una penetración inicial del perfil de la rueda dentada interior sobre el perfil de la rueda dentada exterior al realizar la discretización con elementos finitos. Esta penetración se ha de evitar por razones obvias. En la Figura 7 se muestra este fenómeno.



**Figura 7.** Geometría del engranaje trocoidal PZ9e285

La malla que se presenta en la Figura 8 corresponde a uno de los casos estudiados y se encuentra formada por 26 270 elementos triangulares y 17 845 nodos. Los elementos se concentran con mayor densidad en el perímetro de los engranajes por las siguientes razones:

- Minimizar el error de discretización entre ambas piezas para reducir la intersección geométrica de los elementos.
- El perfil de la rueda dentada interior está en contacto continuo en los correspondientes puntos de contacto para cualquier posición en una rotación completa del conjunto del engranaje.
- La curvatura del diente de la rueda dentada interior en el punto de contacto varía notablemente en función de la localización del punto de contacto sobre su perfil y es función de la posición en que se encuentra la rueda en una rotación completa del conjunto del engranaje.
- La máxima tensión de contacto se concentra en el perfil de las ruedas dentadas.

Sin embargo, como es bien sabido, se ha de tener en cuenta que la densidad de malla es un factor decisivo en el tiempo computacional de cálculo.

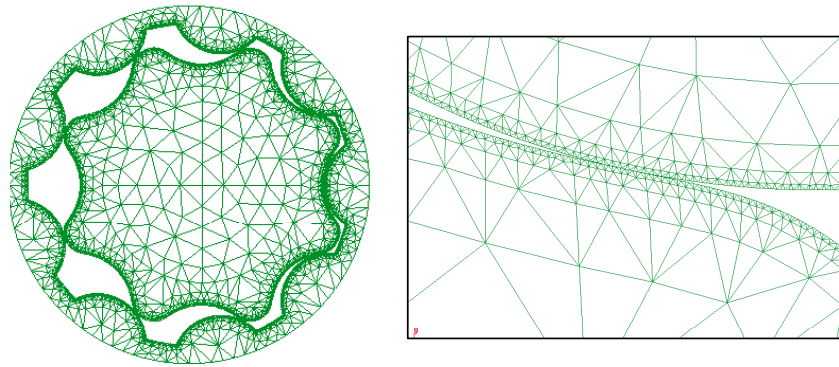


Figura 8. Malla sobre el engranaje y su densidad

### Análisis mecánico de la simulación mediante MEF

La gran ventaja de utilizar este código radica en la formulación de contacto implementada, ya que esta característica es fundamental en la resolución del problema. COMET v5.0 utiliza un esquema de multiplicadores de Lagrange para la resolución del contacto mecánico entre superficies, aunado a un esquema incremental de la aplicación de la carga, lo que garantiza la solución del problema.

El análisis mecánico se ha implementado de forma cuasi-estática haciendo uso de diez posiciones de rotación. A partir de la posición específica definida por el ángulo de rotación  $\omega_i$  se induce un momento de rotación a la rueda dentada interior mediante cuatro fuerzas localizadas en la periferia del eje motor. El contacto se define en la interfase entre los perfiles de las ruedas dentadas interior y exterior. La rueda dentada exterior es capaz de soportar dichos esfuerzos de contacto al encontrarse impedida en su movimiento. Para garantizar un correcto movimiento de la rueda dentada interior, el nodo central del eje se encuentra fijo permitiendo su rotación sin desplazamientos laterales. Se han estudiado diez ángulos de rotación  $\omega_i$ :  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $22,5^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$  y  $40^\circ$  para presión del fluido de  $0,5 \text{ MPa}$ .

La Figura 9 presenta un resultado particular de simulación de la tensión de contacto para la posición  $\omega_i = 25^\circ$  y por unidad de espesor del engranaje.

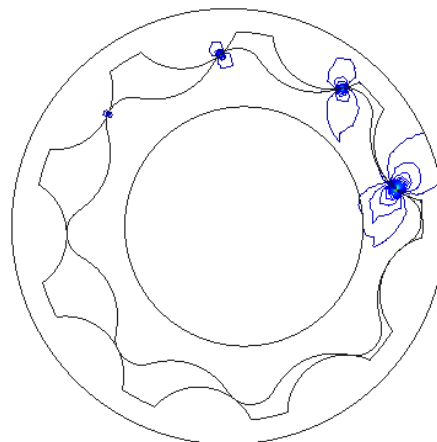
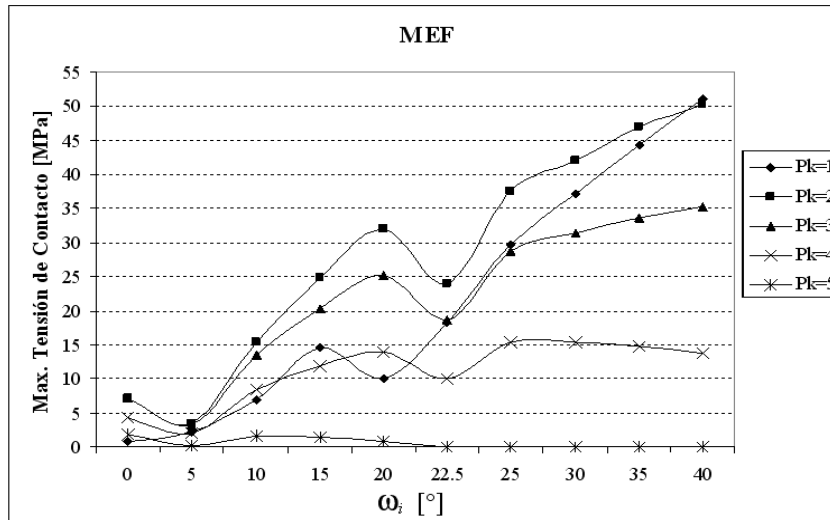


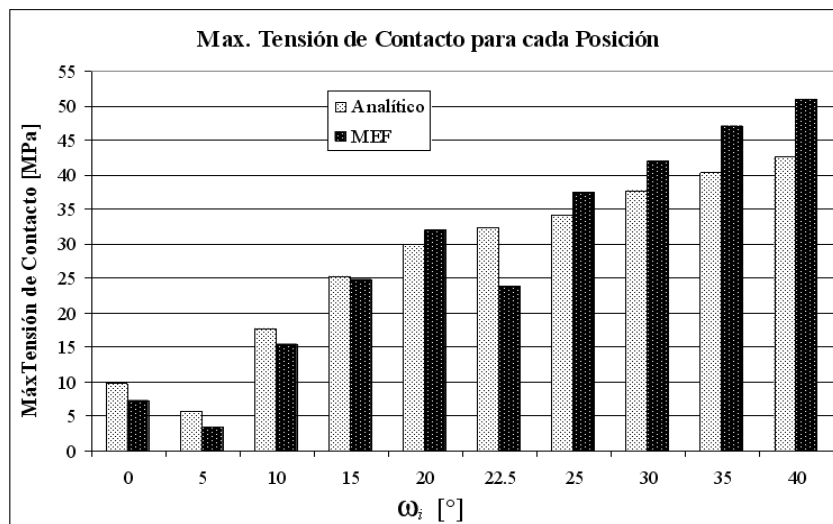
Figura 9. Análisis mecánico mediante MEF

Al igual que en la Figura 4, la Figura 10 muestra los resultados de la tensión máxima de contacto para cada uno de los puntos de contacto  $P_k$  en los engranajes.



**Figura 10.** Estudio de simulación MEF de la máxima tensión de contacto versus la posición  $\omega_i$  en cada punto de contacto  $P_k$

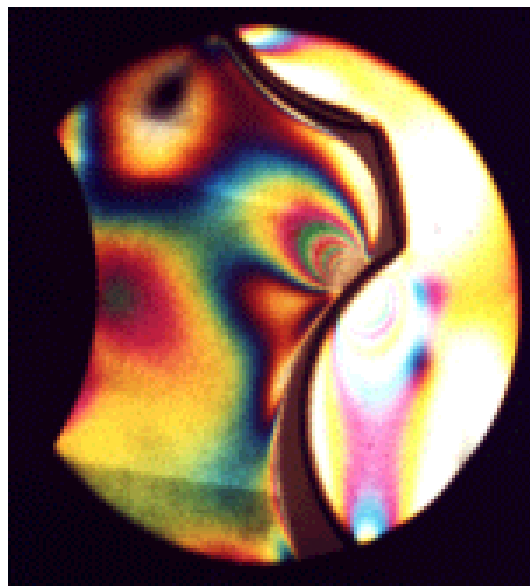
Los resultados de la máxima tensión de contacto encontrados por el modelo analítico y la simulación mediante el MEF se exponen en la Figura 11. El modelo del MEF muestra valores mayores, sin embargo la precisión de ambos estudios muestra ser satisfactoria.



**Figura 11.** Comparación modelo analítico y simulación mediante MEF

## TRABAJO EXPERIMENTAL

La fase de ensayos es también tenida en cuenta para la unidad de bomba en estudio. La técnica de la foto elasticidad se establece para evaluar la magnitud de la tensión en cada punto de contacto. A través de luz polarizada la tensión de contacto aparece como un espectro de colores. Cada color corresponde con una fuerza de contacto específica y esta puede ser calibrada en un banco de ensayos. Una vez calibrado el espectro de colores es posible determinar los rangos de magnitud de la tensión de contacto en el banco de ensayos.

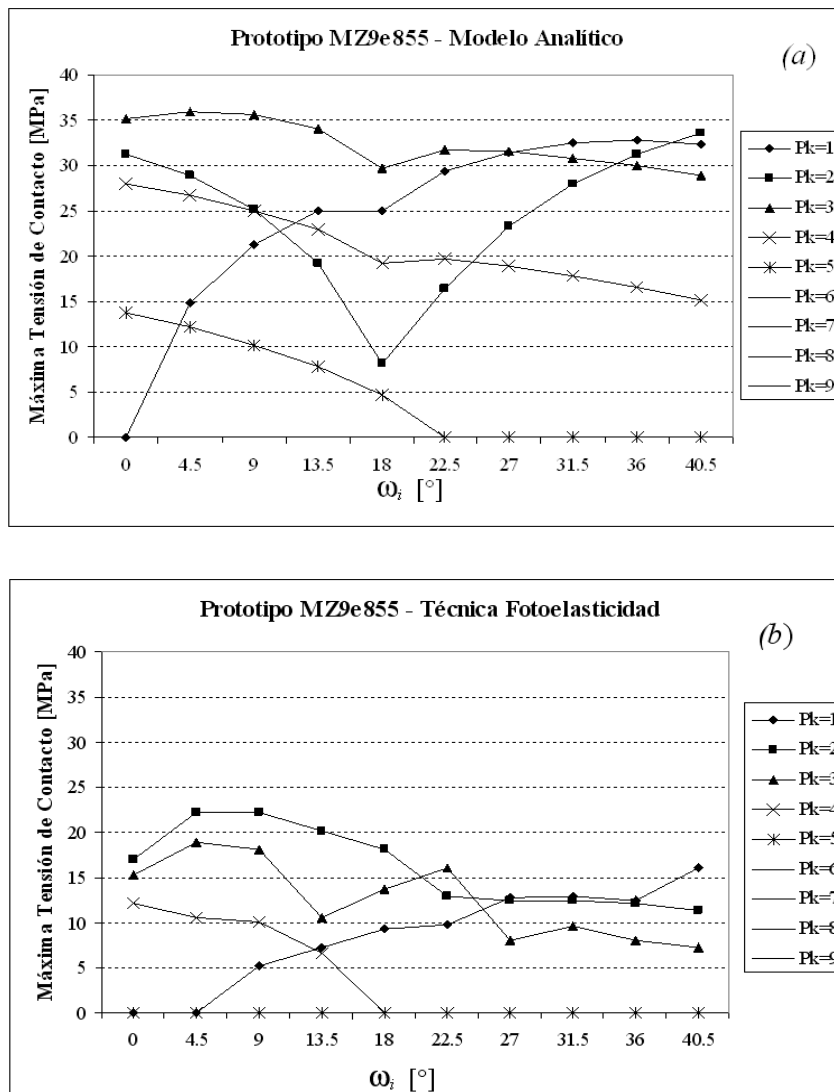


**Figura 12.** Tensión de contacto bajo luz polarizada

Se ha diseñado y construido en resina Epoxy un modelo prototipo del engranaje PZ9e285 a escala 3:1. El módulo de Young de la resina es 3 000 MPa. Es importante mencionar que la exactitud de los perfiles de las ruedas dentadas se ha tenido muy en cuenta a la hora de la construcción del prototipo.

El banco de ensayos se ha desarrollado para transmitir un momento específico desde la rueda dentada interior a la rueda dentada exterior. Al mismo tiempo la luz polarizada puede pasar a través del par de dientes en estudio y medir la tensión de contacto de su espectro de colores previamente calibrado. Sin embargo, esta técnica sólo permite obtener medidas visuales a través del espectro de colores por lo que estas medidas no pueden ser muy precisas. Por lo que calidad de los resultados se basa en dos factores: la precisión en la lectura del par de valores color-fuerza de contacto y la exactitud de los perfiles de las ruedas dentadas.

Se ha llevado a cabo el cálculo de las tensiones de contacto mediante el modelo analítico y los ensayos experimentales para iguales parámetros geométricos y del material, de forma que el prototipo es denominado MZ9e855. En él se han estudiado diferentes momentos desde la rueda dentada interna a la rueda dentada externa. Los resultados para un par de 37,5 Nm son presentados en la Figura 13 tanto para el modelo analítico (a) y la fase experimental (b).



**Figura 13.** Modelo analítico (a) y técnica de foto elasticidad (b) de la máxima tensión de contacto vs. la posición  $\omega_i$  en el punto de contacto  $P_k$

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han presentado dos métodos analíticos para calcular la tensión de contacto y las características volumétricas para un engranaje trocoidal cuando trabaja formando parte de una bomba oleo-hidráulica tipo gerotor. Los resultados de la máxima tensión de contacto y las características volumétricas se han mostrado para comparar y contrastar su comportamiento en frente a parámetros geométricos. Los resultados de la tensión de contacto mediante un modelo analítico, el cálculo mediante el MEF y el trabajo experimental también se exponen para una unidad específica de bomba gerotor.

Los resultados de la tensión de contacto han mostrado tener buena concordancia de rango de magnitud y localización de los puntos de contacto activos entre el modelo analítico y la simulación mediante MEF. Sin embargo, aparece discrepancia en el valor de la máxima tensión de contacto en cada punto de contacto. Parece claro que el modelado de los perfiles debe ser más exacto.



Se ha estudiado la variación del número de dientes en el engranaje trocoidal para comparar su influencia en dos magnitudes: la máxima tensión de contacto y las características volumétricas. El resultado muestra que ambas magnitudes tienen comportamientos opuestos frente al número de dientes, y que las mejoras de uno suponen empeorar el otro. Se debe pues considerar la solución de compromiso que lleve a un óptimo diseño.

A pesar de las limitaciones de la técnica de la foto elasticidad se observan buenas correlaciones del rango de magnitud de la tensión de contacto entre el modelo analítico y los ensayos. Sin embargo, los resultados discrepan entre ellos en la localización de la máxima tensión de contacto y los puntos de contacto activos. La razón es que se pierde un punto de contacto en la fase de ensayos debido a la imposibilidad de detectar el cambio de color (tensión de contacto) y del último punto de contacto activo.

Aparecen imprecisiones en los resultados y parece claro que se debe tomar precaución a la hora de interpretar los resultados del modelo analítico, la simulación y los ensayos experimentales conjuntamente. Sin embargo, existen factores físicos que no se pueden llegar a tener en cuenta en el modelo analítico y en la simulación debido a que nos encontramos lejos de la comprensión total de los fenómenos, particularmente debido a la compleja estructura de la bomba gerotor.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores del presente trabajo agradecen el soporte recibido por las empresas AMES y Pedro Roquet, S.A. en los diferentes fases del estudio. También agradecen al CIMNE por permitir el acceso al software y su trabajo de coordinación con el MEF.

## REFERENCIAS

- 1 J.R. Colbourne, "Reduction of the contact stress in internal gear pumps", *Journal of Engineering for Industry Transactions of the ASME*, pp. 1296–1300, (1976).
- 2 M. Fabiani, S. Manco, N. Nervegna y M. Rundo, "Modelling and simulation of gerotor gearing in lubricating oil pumps", *SAE Transactions N° 1999-01-0626*, pp. 989–1003, (1999).
- 3 P.J. Gamez-Montero, "Caracterización fluidodinámica de una bomba oleo-hidráulica de engranajes internos generados por perfiles trocoidales", tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, (2004).
- 4 R.S. Hartenberg y J. Denavit, "Kinematic synthesis of linkages", McGraw-Hill, New York, (1964).
- 5 J. Stryczek, "Hydraulic machines with cycloidal gearing", *Archiwum Budowy Maszyn*, pp. 29–72, (1996).
- 6 M. Cervera, C. Agelet de Saracibar y M. Chiumenti, "COMET Coupled mechanical and thermal analysis", CIMNE, Barcelona, (2002).
- 7 "GiD The personal pre and post processor", CIMNE, Barcelona, (2004).